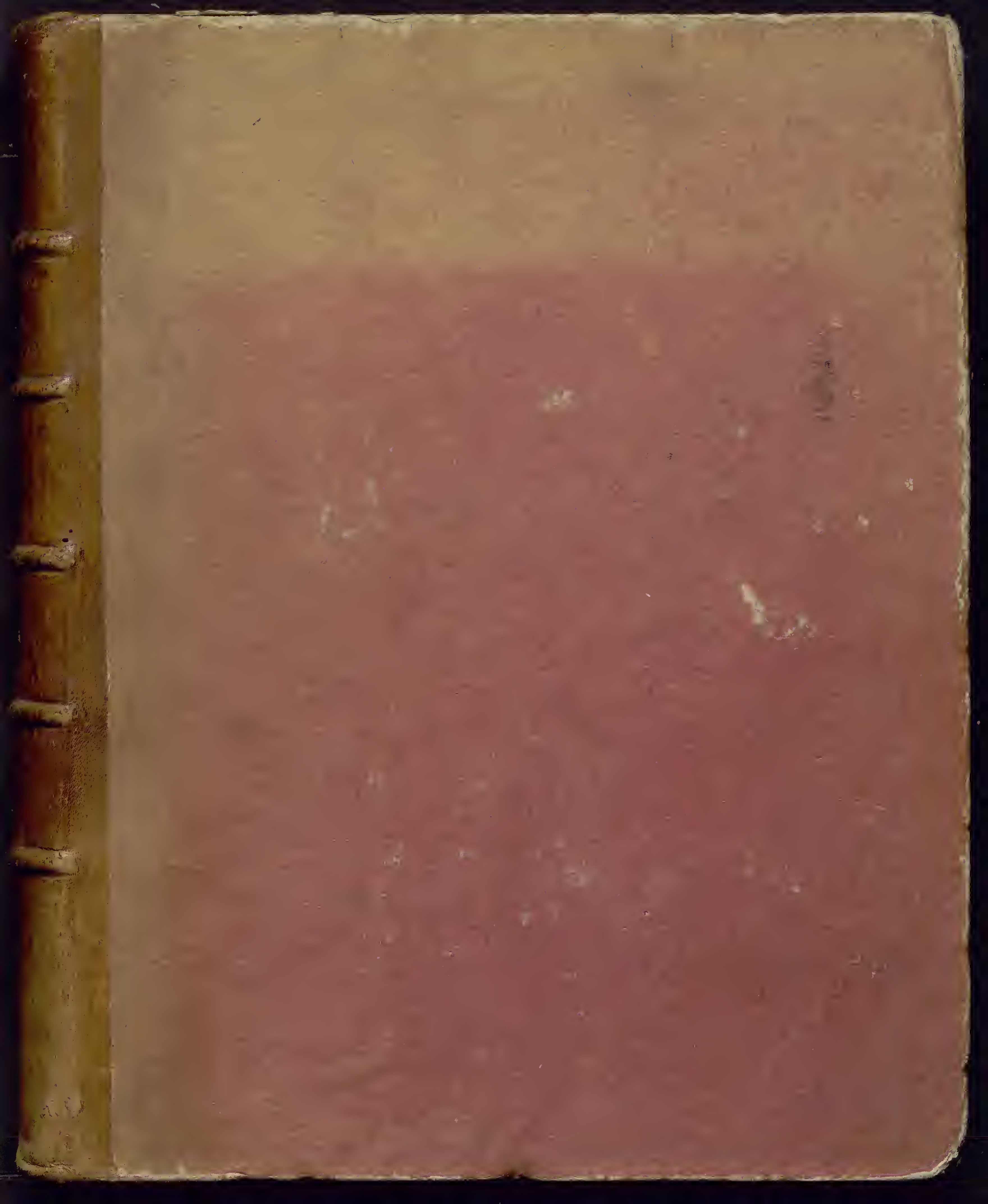


2000 F

Coll. complet

OEUVRES

PHILOSOPHIQUES

DE

M^{R}. 'S GRAVESANDE.

OEUVRES
PHILOSOPHIQUES
ET
MATHÉMATIQUES

DE

M^r. G. J. 's GRAVESANDE,

Rassemblées & Publiées

PAR

JEAN NIC. SEB. ALLAMAND,

qui y a ajouté l'Histoire de la Vie & des Ecrits de l'Auteur.

PREMIERE PARTIE.



A AMSTERDAM,
CHEZ MARC MICHEL REY,
MDCCLXXIV.

PRÉFACE
DE
L'ÉDITEUR.

MR. 'SGRAVESANDE *a tenu un rang si distingué parmi les Philosophes & les Mathématiciens de ce siècle, que tous les ouvrages qui sont sortis de sa plume ont été recherchés avec empressement. Sa Physique, qui a été écrite en Latin, & ensuite traduite plusieurs fois tant en François qu'en Anglois, est entre les mains de tous les Sçavans. Il a composé plusieurs autres ouvrages, moins volumineux, mais non moins intéressants, dont quelques uns sont devenus extrêmement rares, & ne se trouvent plus chez les Libraires: d'autres sont comme perdus dans les Journaux où ils ont été inserés. Depuis longtems on souhaitoit d'en avoir une* Collection *complette, du même format que sa Physique; & comme on savoit qu'aiant eu le bonheur d'être son disciple & son ami, j'étois resté dépositaire de ses manuscrits, on m'a souvent sollicité d'en donner une nouvelle édition, & d'y ajouter ceux de ses écrits, qui n'avoient encore point vu le jour.*

J'étois très déterminé à entreprendre la chose, parce que je savois combien elle seroit agréable & utile; mais des occupations multipliées m'ont empèché malgré moi d'y travailler aussitôt que je l'aurois souhaité. Enfin jouissant de quelque loisir, j'en ai profité pour mettre la main à l'œuvre, & j'ai au-

jourd'hui la satisfaction d'offrir au Public un Recueil, bien précieux par le mérite des différents Traités qui le composent.

MR. 'S GRAVESANDE *s'est appliqué avec le même succès aux diverses branches de la Philosophie. Il n'y en a aucune qu'il n'ait enrichie de nouvelles découvertes, & dans toutes il a porté cette précision, cette clarté & cette sagacité qu'il avoit contractées par une étude profonde des Mathématiques. Riche de son propre fonds, il n'a rien emprunté d'ailleurs: tous ses Ouvrages sont marqués au coin d'un génie original, & roulent sur des sujets intéressants: il n'en faut pas d'avantage pour les rendre recommandables. On trouvera ce que je devrois en dire de plus dans l'Histoire de la Vie de leur Auteur, que j'ai ajoutée ici. Je l'avois insérée dans le* Dictionaire historique de Marchand, *que j'ai publié en* 1759., *& je la fais reparoitre à la tête de ce Livre, comme à sa véritable place. J'en ai seulement retranché les Extraits assez étendus, que j'y ai donnés de quelques uns des Traités qui entrent dans cette Collection: ces Extraits ne sont plus nécessaires lorsqu'on a les Traités mêmes.*

Je me contenterai d'indiquer ceux qui n'ont point encore été imprimés, & qui paroissent ici pour la première fois: ils sont tels que ç'auroit été une véritable perte pour le Public, s'ils étoient restés manuscrits.

Le premier est la Lettre sur l'Utilité des Mathématiques; *cette Lettre est dirigée contre un passage d'un des Journaux de Mr.* le Clerc; *cet Auteur, si estimable d'ailleurs, n'étoit pas Mathématicien, & quand l'occasion s'en présentoit il témoignoit faire peu de cas des Mathématiques, parce que souvent on n'estime pas ce qu'on n'entend point. Il étoit naturel qu'un Mathématicien, tel que Mr.* 's Gravesande, *prit la*

défenfe de ces fciences. C'eft ce qu'il a fait avec autant de politeffe que de fuccès dans cette Lettre.

Le fecond eft le Traité qui a pour titre Effais de Métaphyfique. *Il n'y eft pas queftion de ces vaines fubtilités dont les Métaphyficiens, ne s'occupent que trop fouvent; ce petit Ouvrage roule uniquement fur les fujets les plus intéreffants: ils y font traités d'une manière toute nouvelle, & avec une clarté qui n'eft pas inférieure à celle des démonftrations mathématiques. Je ne crois pas en dire trop en affurant, que c'eft ici une des meilleures productions qui foient jamais forties de la plume d'aucun Métaphyficien.*

Le troifième eft la Démonftration mathématique de la Providence divine. *L'Auteur n'avoit pas encore 24. ans quand il la compofa: en la lifant on fe convaincra qu'il étoit déjà alors un très grand Mathématicien. Il l'avoit écrite en Hollandois; j'ai cru devoir la traduire en François, pour la rendre intelligible à un plus grand nombre de Lecteurs. J'y ai ajouté la difpute inftructive qu'il eut à fon occafion avec fon ami Mr.* Nicolas Bernoulli, *parce qu'elle répand beaucoup de jour fur la queftion dont il s'agit.*

On trouvera encore ici deux autres pièces qui n'ont point été publiées pendant la vie de Mr. 's Gravefande, *mais que j'ai fait imprimer, fans en nommer l'Auteur, dans le* Journal des Sçavans *de 1769 & 1770., de l'édition d'Amfterdam. La première eft la* Differtation morale fur le Commerce des actions de la Compagnie du Sud. *Le feconde eft* l'Examen de la queftion, fi des Perfonnes de Réligion différente peuvent fe marier enfemble fans crime. *Ceux qui les ont lues dans le Journal les reverront ici avec plaifir.*

Cette Collection eft terminée par trois harangues qui ont été prononcées & publiées en Latin. Celle qui traite de l'Evi-

dence *a été traduite en François, par un ami & sous les yeux de l'Auteur, pour être placée au commencement de la troisième édition de sa Physique. J'ai adopté cette traduction, & j'ai traduit les deux autres.*

*J'ai aussi donné en François l'*Introduction à la Philosophie, *dont l'original est en Latin; la traduction en a été approuvée par Mr.* 's Gravesande, *& il l'a faite imprimer lui même. On en ignore l'Auteur.*

Ces ouvrages, utiles à tout genre de Lecteurs, devoient leur être présentés dans une langue qui leur fut connue à tous.

Il n'en est pas de même du Cours d'Algèbre qu'on trouvera ici dans la première partie. Ceux qui seront en état de le lire entendront vraisemblablement tous le Latin; ainsi j'ai suivi l'édition originale, dans celle que j'en donne ici.

Je regrette de n'avoir pas pu enrichir cette Collection de plusieurs autres ouvrages, que j'ai en manuscrit; mais malheureusement l'Auteur les a laissés imparfaits; si j'en donnois la liste on verroit qu'ils étoient destinés à éclaircir les questions les plus épineuses de la Morale & de la Physique, & le Public joindroit ses regrets aux miens.



HIS-



HISTOIRE
DE LA VIE ET DES OUVRAGES
DE
Mr. 's GRAVESANDE. (*)

GUILLAUME JACOB 's GRAVESANDE, issu d'une ancienne Famille patricienne de Delft (*A*), naquit à Bois-le-Duc (*B*), le 27. Septem-

(*A*) *Issu d'une ancienne Famille patricienne de Delft.*] Le nom de cette Famille est STORM VAN 's GRAVESANDE; mais pour abréger elle a pris quelques fois le seul nom de *Storm*, & quelques fois le seul nom de *'s Gravesande.* J'ignore qu'elle est l'origine de ce dernier nom. Ce qu'il y a de certain, c'est qu'elle l'a eu depuis long-tems. Mr. Jeremie 's Gravesande, Frère de celui dont il s'agit dans cet Article, m'a foit voir un Extrait authentique du Registre des Hérauts d'Armes du tems de Philippe, Duc de Bourgogne, qui marque que les Armoiries, peintes dans cet Extrait, sont celles de la noble Famille de *Storm van 's Gravesande*, originaire de la Province de Hollande: & ces Armoiries sont les mêmes que cette Famille a encore. Elle a fourni des Magistrats à la Ville de Delft dès l'année 1419. En 1568. il y eut un Guillaume, & un Corneille 's Gravesande, qui furent bannis & eurent tous leurs bien confisqués par sentence du Duc d'Albe, pour avoir été, comme s'exprime la sentence, du nombre des principaux partisans du Prince d'Orange, qui étoient attachés à la nouvelle Réligion. Ce Corneille, que je viens de nommer, eut un Fils, qui se distingua par son savoir & par sa piété. Il est connu dans l'histoire de Delft, sous le nom de *Arnoldus Cornelii.* Ses Parens, pour le soustraire à la persécution, l'envoiérent étudier en Théologie hors du Païs. Quand il eut fini ses études, l'Eglise de Frankendaal, dans le Palatinat, le nomma pour son Pasteur: il y resta jusqu'en 1573.: alors il fut appellé à l'Eglise de Delft, où il remplit jusqu'à sa mort, qui arriva en 1605., tous les devoirs d'un homme de sa profession avec une telle application, que sa mémoire y est encore en vénération. Il a écrit deux Ouvrages sur des sujets de dévotion en langue hollandoise.

(*B*) *Il nâquit à Bois-le-Duc.*] Ce fut le Grand Père de notre 's Gravesande qui alla s'établir dans cette Ville, après qu'el-

(*) Je dois avertir ici que ce que je dis de la famille de Mr. *'s Gravesande* est tiré des mémoires qui m'ont éte communiqués par son Frère; & que quant aux autres choses, ou je les tiens de sa propre bouche, ou je les ai puisées dans les Lettres qui lui ont été écrites, & dans celles des siennes dont il a gardé copie, ou enfin j'en ai été témoin.

tembre 1688. Par sa Grand-Mère il descendoit du fameux Jean Heurnius (*C*). Son Père chargé d'une nombreuse Famille (*D*), ne négligea rien pour l'éducation de ses Enfans: & entre les Précepteurs qu'il leur donna, il y en eut un nommé Tourton, sous lequel notre Guillaume Jacob prit un gout particulier pour les Mathématiques, (*E*). En 1704., il alla à

qu'elle fut entrée sous l'obéïssance des Etats Généraux. A la recommandation du Prince d'Orange, FREDERIC HENRI, il y obtint des Etats divers emplois, qui le déterminérent à s'y fixer.

(*C*) *Par sa Grand-Mère il descendoit du fameux Jean Heurnius.*] Elle étoit Fille de Otto Heurnius, Fils de *Jean*. Celui-ci nâquit à Utrecht en 1543. Après y avoir appris les principes de la Latinité, il fut envoyé par ses Parens à l'Université de Louvain, où il s'appliqua à la Médecine. Il s'y arrêta deux ans, & ensuite il alla à Paris, où il continua ses études sous le célébre Duret, qui conçut pour lui beaucoup d'amitié. De là il passa en Italie, où après avoir fini ses études en Médecine, il prit le grade de Docteur. Il revint dans sa Patrie agê de 30. ans; il s'y maria avec Christine Bayers, & peu de tems après il fut fait Conseiller & Echevin de la Ville d'Utrecht; mais la grande réputation qu'il s'étoit faite par la pratique de la Médecine, engagea les Curateurs de l'Université de Leyde, à l'appeller à la chaire de Professeur en Médecine dans leur Académie. Il s'y rendit en 1581., & y enseigna avec beaucoup d'éclat jusqu'à sa mort, qui arriva en 1601. Il composa plusieurs Ouvrages, qui lui firent une très grande réputation. Il eut onze Enfans, parmi lesquels il y en eut un nommé Otto, qui fut aussi Médecin. Ce fut le Père de la Grand-Mère de notre 's Gravesande.

(*D*) *Son Père chargé d'une nombreuse Famille.*] Il s'appelloit THÉODORE 's GRAVESANDE; & il étoit Président de la Ville de Bois-le-Duc, Receveur général des Bourses, & Biens Ecclésiastiques fondés pour les Etudes, Controlleur des Droits d'entrée & de sortie sur les marchandises dans la Ville de Bois-le-Duc, & Receveur des Domaines & Biens Ecclésiastiques pour le Prince d'Orange dans sa Baronnie de Kranendonk, la Ville d'Eyndhoven, & autres terres seigneuriales, situées dans la Mairie de Bois-le-Duc.

Il eut dix Enfans, deux Filles & huit Fils. Une Fille & deux Fils moururent dans l'enfance. *Guillaume Jacob*, celui dont il est question dans cet article, fut le quatrième de ceux qui parvinrent à un age plus avancé.

(*E*) *Il eut un Précepteur nommé Tourton, sous lequel il prit un goût particulier pour les Mathématiques.*] Ce Mr. Tourton étoit un homme de mérite, & qui s'étoit appliqué particulièrement aux Mathématiques: il trouva en notre jeune 's GRAVESANDE toutes les dispositions les plus heureuses à profiter de ses leçons. Il étoit né Mathématicien, on s'en apperçut dès sa plus tendre enfance. Dans l'Ecole où il apprenoit à chiffrer, quand son Maître s'absentoit, il le préposoit sur ses Camarades, pour leur donner des leçons d'Arithmétique à sa place. Avec de pareilles dispositions, on comprend aisément combien il profita d'un Précepteur tel que Mr. Tourton; il fit dans les Mathématiques des progrès si rapides, que celui-ci étoit obligé d'étudier jour & nuit pour être en état de donner des leçons à son Elève. Quand il l'eut quitté, il alla s'établir à Surinam, où il n'oublia pas ce cher Disciple; il entretint avec lui un commerce de lettres, où l'on voit avec plaisir la joie avec laquelle il recevoit les Ouvrages qu'il avoit publiés, & qu'il avoit soin de lui envoier fort régulièrement: la satisfaction avec laquelle il avoue, que souvent il n'étoit en état de les entendre qu'à force d'application, a quelque chose de touchant. On trouve une Lettre de ce Mr. Tour-

à l'Académie de Leyde avec deux de ses Frères. Quoiqu'il s'y appliquât à l'étude du Droit, il n'y négligea pas son étude favorite, je veux dire celle des Mathématiques; il y composa son Essai de Perspective (*F*). En 1707., les trois Frères furent reçus Docteurs en Droit le même jour (*G*); après quoi ils allérent s'établir à la Haye pour s'y appliquer à la pratique du

Tourton dans le Journal Littéraire, sur une particularité intéressante d'Histoire naturelle.

(*F*) *Etant à l'Académie, il y composa son Essai de Perspective.*] C'est ici le premier Ouvrage de Mr. 's Gravesande; il l'avoit fini avant qu'il eut atteint l'age de 19. ans: mais pour l'examiner plus à son aise, il eut la sage précaution de ne le publier que quelques années après, & il ne fut imprimé qu'en 1711., *à la Haye, chez la Veuve d'Abraham Troyel.* C'est par lui que commence la première partie de ce Recueil. On verra dans la Préface que l'Auteur y a mise les raisons qui l'ont engagé à écrire sur une matière, qui avoit déjà exercé la plume de plusieurs Sçavans très distingués. Je lui ai entendu dire qu'il le composa en partie dans un Collège, où les ordres de son Père l'obligeoient d'assister, mais qui ne lui plaisoit pas. Pendant que les autres Etudians écrivoient ce que le Professeur leur dictoit, lui traçoit des Figures, & travailloit à sa Perspective. Quoique cet Ouvrage se ressente un peu de la jeunesse de l'Auteur, & de la manière dont il a été fait, quant au stile, & à l'ordre; on y découvre cependant par tout le profond Géomètre, qui résoud les problèmes les plus difficiles de la Perspective avec beaucoup de génie, & avec toute la clarté possible. Aussi eut-il une approbation générale; & mit en rélation son Auteur avec les principaux Mathématiciens de ce tems-là. Pour preuve de ce que j'avance, je me contenterai d'alléguer le seul témoignage du célébre Jean Bernoully; on sait de quel poids est le témoignage de ce Sçavant, si peu prodigue d'éloges. Voici ce qu'il écrivoit à Mr. 's Gravesande, dans une lettre datée de Bale le 20. Mars 1714. en lui envoiant son *Essai d'une nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux.* „ Je vous supplie de l'accepter, " lui dit-il, „ comme venant d'une Personne „ qui a beaucoup d'égard & de considé„ration pour votre mérite & savoir dans „ les Mathématiques, dont j'ai vu une „ preuve suffisante par l'excellent Traité „ sur la Perspective que vous avez pu„blié, & que mon Neveu a eu la bon„té de me prèter. J'y ai trouvé plu„sieurs régles fort ingénieuses & très „ commodes pour la pratique, que l'on „ ne trouve pas par tout ailleurs. Il „ seroit à souhaiter que vous prissiez la „ peine d'écrire sur les autres parties de „ l'Optique avec la même netteté, & „ avec la même addresse que vous l'avez „ fait sur la Perspective."

Cet Essai de Perspective étant devenu fort rare, l'Auteur avoit résolu d'en donner une nouvelle Edition in 4°., considérablement changée. Il en avoit même déjà fait graver les planches. Mais malheureusement il est mort avant que d'avoir mis par écrit aucun de ses changemens. Quand il vouloit publier un Ouvrage, sa coutume étoit de l'avoir tout composé en tête, & de ne le mettre sur le papier qu'à mésure que les Imprimeurs avoient besoin de copie.

(*G*) *Les trois Frères furent reçus Docteurs en Droit le même jour.*] Ces trois Frères étoient Ewout Henri, Guillaume Jacob, & Corneille Christian. Ce fut le 25. Octobre 1707., qu'ils prirent le grade. La Dissertation inaugurale, que le sécond défendit dans cette occasion, étoit intitulée *de Autocheiria.* On y trouve tous les argumens contre le Suicide, rapportés avec beaucoup de clarté & d'ordre. (*H*)

du Bareau. Celui dont nous parlons s'y lia bientôt avec tout ce qu'il y avoit de Gens de Lettres, & en 1713., il fut un des principaux membres de la Société qui se forma pour la composition du Journal Littéraire (*H*). Il

(*H*) *Il fut un des principaux membres de la Société qui se forma pour la composition du Journal Littéraire.*] Ce Journal, le meilleur peut-être qui ait été fait, a subi différentes révolutions, comme la plûpart des livres de cette espèce. Il fut commencé au Mois de Mai de 1713., par une Société de jeunes Gens, tous distingués par leur génie & leur savoir; & étroitement unis par les liens de l'estime & de l'amitié. Les principaux d'entr'eux étoient Mrs. 's Gravesande, Marchand, van Effen, Sallengre, Alexandre, & St. Hyacinthe, Auteur badin du Chef-d'Oeuvre d'un Inconnu; Ouvrage qu'on attribua à toute la Société, quoique les autres membres, qui la composoient, n'y eussent aucune part que par quelques plaisanteries, insérées dans le livre, comme autant de Notes *Variorum:* c'est ainsi, par exemple, que Mr. 's Gravesande y est auteur des Notes qui sont rapportées sous l'épithête d'*Ixixius*, nom qui lui fut donné à cause de son application à l'Algèbre, où l'on fait que la lettre *x* est souvent emploiée. Les Extraits fournis pour le Journal par chacun d'eux, étoient éxaminés dans une assemblée générale de la Société, avec toute la sévérité possible. Là, ils rejettoient sans miséricorde ce qui n'étoit pas approuvé de tous: & ils s'égaioient souvent aux dépens de ceux dont ils rejettoient les pièces, aussi bien que des Sçavans qui leur écrivoient de tous côtés, & dont les lettres graves servoient quelquefois de texte aux plaisanteries de cette jeunesse vive & érudite.

Ils continuérent ce Journal sans interruption jusqu'à l'année 1722.: & ils en donnérent 10. Volumes complets, avec la première partie du Tome XI., & celle du Tome XII. Alors, Johnson Libraire de la Haye, qui avoit été l'Imprimeur du Journal, ayant été obligé de quitter son négoce, ce livre cessa de paroitre, & ses Auteurs se dispersérent.

Mr. 's Gravesande, qui conservoit de l'affection pour ce Journal, travailla à former une nouvelle Société pour sa continuation; sécondé par Mr. Marchand, il y réussit. En 1729., il recommença, & ceux qui y travaillérent furent Mrs. 's Gravesande, Marchand, de Superville, de Joncourt, Sacrelaire, Pelerin, Catuffe, & de Haes, tous domiciliés en Hollande. Mr. 's Gravesande chercha encore à leur associer des Etrangers: pour cela il s'adsa à Mr. Calandrin, son ami, alors Professeur en Mathématiques & en Philosophie à Genève, & qui fut ensuite Membre du Conseil de cette République. Voici ce qu'il lui écrivit là-dessus en 1728.
„ autrefois j'ai eu quelque part au Journal Littéraire qui s'imprimoit à la Haye.
„ Ce Journal qui a été mal pendant assez de tems, & ensuite interrompu, doit se renouveller, & il s'est formé une Société pour y travailler. Un reste de tendresse pour ce Journal, fait que je m'intéresse à ce qui peut le faire valoir. Je vous demande des nouvelles littéraires, & à cette prière j'en ajoute une autre, c'est que si vous avez quelques pièces à faire imprimer, trop petites pour être imprimées à part, de me les envoyer pour être insérées dans le Journal."

Mr. 's Gravesande s'adressa aussi pour le même sujet à Mr. Cramer, Collégue de Mr. Calandrin dans la chaire de Mathématiques, & son ami intime. Ces deux Messieurs acceptérent la proposition que leur fit Mr. 's Gravesande, & fournirent pour le Journal des Extraits fort bien travaillés.

Ce Journal reparut donc sous le même titre à la Haye, en 1729., chez P. Gosse & J. Neaulme, qui en avoient acheté le droit de copie de Johnson. Ces deux Libraires, pour rendre leur Ouvrage complet, publiérent la 2de partie des Tomes XI. & XII., mais faite, par des Auteurs qui n'étoient ni de la première Société

Il y inséra plusieurs pièces (*I*), qui contribuérent beaucoup à la réputation

ciété ni de la seconde. Celle-ci travailla au Tome XIII., & continua l'ouvrage jusqu'au 30. Juin 1732., où finit le XIX. Tome. Alors les Libraires, qui imprimoient ce livre, l'aiant fait passer en d'autres mains, la Société en fit imprimer la continuation à Leyde chez Théodore Haak & Samuel Luchtmans, mais sous le titre de *Journal Historique de la République des Lettres :* & elle en publia 3 volumes. A la fin de 1733., le Journal cessa tout à fait.

(*I*) *Il y inséra plusieurs pièces qui contribuérent beaucoup à la réputation de cet Ouvrage.*] Je ne parlerai point des Extraits dont Mr. 's Gravesande fut auteur; plusieurs de ceux qui roulent sur des Ouvrages de Physique ou de Mathématiques, sont de lui. Ce qui sera le sujet de cette Remarque, ce seront les Dissertations entièrement de sa composition, qu'il a placées dans ce Journal. Je ne rangerai point dans ce nombre deux Réponses qu'il fit à des Lettres de Mr. Nic. Hartsoeker, à l'occasion de l'Extrait qu'il avoit donné de la *Suite des Conjectures Physiques* de cet Auteur, non plus qu'un Avertissement qui précéde une Lettre de Mrs. Ch. & Th. Hartsoeker. Ces pièces ne sont propres à faire connoitre Mr. 's Gravesande que comme Journaliste, & c'est comme Auteur que je l'envisage ici.

La Physique ayant toujours fait son occupation favorite, il s'appliqua à inventer ou à perfectionner les Machines, dont il avoit besoin pour éclaircir les différentes parties de cette science. La première qu'il travailla à rendre plus parfaite, fut la Machine Pneumatique, à laquelle il fit à diverses reprises des changemens, qui enfin l'ont portée au point de perfection où nous la voions aujourd'hui. Occupé à cela, il remarqua que les Ouvriers étoient dant l'erreur touchant la longueur des Pompes, qu'on emploioit à tirer l'air du Récipient. On croioit que les plus longues, produisoient le plus grand effet. Mr. 's Gravesande se convainquit du contraire, & cela l'engagea à insérer dans le IV. Tome du *Journal Littéraire* pag. 182., des *Remarques sur la Construction des Machines Pneumatiques & sur les Dimensions qu'il faut leur donner.* Il y résoud plusieurs beaux problémes qui ont rapport à ces Machines ; il y démontre que les grandes Pompes n'ont pas sur les petites les avantages qu'on s'imagine, & que de toutes celles qui sont de même diamètre, les plus courtes reduisent l'air dans le moins de tems à un dégré déterminé de raréfaction. On trouvera ici ces Rémarques à la page 285. de la première partie; j'y ai ajouté une Lettre fort intéressante de Mr. *Nicolas Bernoulli* sur le même sujet.

Mr. 's Gravesande promet dans cette dissertation, qu'elle sera suivie d'une autre, dans laquelle il s'attachera principalement à expliquer la construction des Machines Pneumatiques; mais d'autres occupations l'ont empêché de tenir parole: il l'avoit cependant commencée ; toutes les planches qui représentent celle de ces Machines qu'il avoit inventée, tant en entier, que par parties, ont été gravées; il y en a 8. mais malheureusement l'explication de ces planches n'a jamais été faite. C'est dommage : les Ouvriers y auroient trouvé tout ce qui leur étoit nécessaire pour la construction de ces Machines.

Dans le Tome V. du *Journal Littéraire* pag. 254., on trouve une Lettre sur le Mensonge, qui est de la façon de Mr. 's Gravesande. C'est celle que j'ai insérée ici, dans la 2de partie, pag. 251. Cette pièce est à mon avis ce qui a jamais été écrit de mieux sur la matière dont il y est question. L'Auteur recherche quel est le fondement de l'obligation qui engage les hommes à dire la vérité; & si cette obligation a lieu dans toutes les occasions que nous avons de parler. Tout ce qu'il avance est appuié sur des principes incontestables, & est un vrai modèle de la manière dont il faut raisonner en Morale. Dès que cette Lettre parut, chacun tacha de déviner qui en

 étoit

tion de cet ouvrage. Je ne parlerai que d'un ſeul des Extraits qu'il y mit

étoit l'auteur. Mr. Barbeyrac, qui y étoit le plus intéreſſé, parce qu'il y trouvoit démontrées des propoſitions, qui ne s'accordoient pas avec ſes idées, fit des efforts inutiles pour découvrir de qui elle étoit. Il ne penſa pas même à Mr. 's Graveſande. Un jeune homme, uniquement occupé de ce qu'il y a de plus ſublime dans les Mathématiques, ne lui paroiſſoit pas capable de compoſer une Diſſertation de Morale, qui annonçoit un homme qui avoit profondément médité ſur la matière.

Cette Lettre ſe trouve dans le Journal à la ſuite d'un Extrait de 4. *Diſcours* de Mr. Jaques Bernard, joints à ſon Traité de l'*Excellence de la Réligion*. Le IV. de ces Diſcours roule ſur le Menſonge, & l'Auteur y combat le Menſonge officieux. Mr. 's Graveſande ne fut pas convaincu de la ſolidité de ſes raiſons; il les examina dans une autre Diſſertation, qui ſe trouve dans la 2de partie du XI. Tome du Journal, pag. 344. & ici à la page 260. de la 2de partie. Son but dans cette pièce n'eſt pas d'y établir la légitimité du Menſonge officieux; il y veut ſimplement faire voir, que les argumens de Mr. Bernard ne ſuffiſent pas pour la détruire: & quoi qu'elle ſoit d'un genre différent de la précédente, n'étant que pure controverſe, on s'apperçoit aiſément qu'elle eſt partie de la même main. On y trouve la même ſolidité & la même clarté.

Dans le Tome X., pag. 234. Mr. 's Graveſande inſéra une Lettre ſur la Liberté, que l'on trouvera ici à la page 216. de la 2de partie. Pendant qu'il étoit à l'Académie, il avoit été un grand partiſan de la Liberté d'indifférence; mais enſuite ayant examiné la queſtion plus murement, il comprit qu'il étoit impoſſible que l'homme ſe déterminât jamais que pour le parti où il trouvoit les raiſons, ou les motifs les plus forts, & que par conſéquent il y avoit toujours une ſorte de néceſſité dans toutes ſes actions. Néceſſité qui ne détruit cependant point ſa Liberté. Cela le détermina à publier cette petite pièce, où l'on trouve les fondemens de ſon ſentiment ſur la Liberté, que j'expliquerai plus au long dans la ſuite.

Dans la première partie du Tom. XII., pag. 1. il y a un *Eſſai d'une Nouvelle Théorie ſur le Choc des Corps par Mr. 's Graveſande*, qui ſe trouve ici pag. 217. de la 1re partie. Avant Mr. Leibnitz, tous les Phyſiciens croioient que la Force des Corps en mouvement étoit proportionnelle à leur maſſe, multipliée par leur viteſſe. Mr. Huygens entrevit qu'il falloit eſtimer la Force autrement; dans ſes démonſtrations tant des Pendules que du Choc, il déduiſit tout de la conſidération des hauteurs auxquelles les Corps peuvent monter, leſquelles, comme il eſt connu, ſont proportionelles aux quarrés des viteſſes. Mais ce qu'il n'avoit fait qu'entrevoir, fut clairement développé par Mr. Leibnitz; celui-ci dit poſitivement, que la Force eſt proportionnelle au produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe, & que cette Force devoit être diſtinguée de la quantité du mouvement, qui étoit effectivement proportionnelle à la maſſe multipliée par la viteſſe. Une pareille nouveauté en Phyſique ne fut pas généralement reçue; il s'éleva des adverſaires contre ce ſentiment de Mr. Leibnitz, qui le combattirent vivement; celui-ci repliqua; & les Sçavans ſe partagérent, les uns reſtant dans l'ancien ſyſtème, & les autres adoptant le nouveau. Mr. 's Graveſande fut d'abord du nombre des premiers; il chercha même à refuter Leibnitz en ajoutant les expériences aux raiſons triomphantes qu'il croyoit avoir contre lui. La Force dans un Corps en mouvement n'étant autre choſe que la capacité d'agir, elle doit être meſurée par l'effet entier qu'elle produit. Partant de ce principe, il conclut que des Forces ſeroient égales, ſi en ſe conſumant elles produiſoient des effets égaux. Rien n'étoit plus facile que d'imaginer une expérience où ce cas eut lieu. Mr. le Marquis Poleni en avoit déjà fait une; mais Mr. 's Graveſande n'avoit pas encore vu l'Ou-

l'Ouvrage où il en rend compte. On sait que différens Corps qui tombent, parcourent des espaces qui sont comme les quarrés des vitesses qu'ils acquiérent durant leur chute. Si donc l'on a divers Corps, égaux en volumes, mais de masses différentes, & qu'on les laisse tomber sur de la terre glaise de différentes hauteurs, les cavités qu'ils y imprimeront devront être entr'elles, comme la masse de chacun d'eux multipliée par la racine quarrée de la hauteur d'où il est tombé, au cas que la Force suive la raison de la masse multipliée par la vitesse. Mr. 's Gravesande inventa une Machine à l'aide de laquelle il put faire commodément l'expérience. Il ne doutoit point du succès qu'elle auroit; mais sa surprise fut grande, quand il vit que des boules d'un volume égal, & de masses différentes, imprimoient sur l'argile des cavités égales, quand les hauteurs d'où elles tomboient étoient en raison inverse des masses. Leurs Forces étoient donc égales; or elles ne pouvoient l'être si la Force ne suivoit pas la raison de la masse multipliée par la hauteur d'où le Corps tombe, ou, ce qui est la même chose, par le quarré de la vitesse. Comme il ne cherchoit que la vérité, le préjugé où il avoit été jusqu'alors ne l'en détourna point, il l'embrassa dès qu'elle se presenta à lui. Ce fut même avec un transport, qui surprit son Beau-Frère, Mr. Sacrelaire, qui se trouvoit par hazard alors dans la même chambre. Il l'entendit s'écrier, *Ah! c'est moi qui me suis trompé:* là dessus s'étant approché pour savoir ce dont il s'agissoit, il repéta devant lui l'expérience avec la même satisfaction qu'il auroit eue, si elle avoit confirmé le sentiment qu'il avoit défendu jusqu'alors. Je tiens ce détail de Mr. Sacrelaire lui-même, & il m'a paru assez intéressant pour devoir être placé ici.

Dès ce moment Mr. 's Gravesande envisageant la chose sous un autre point de vue, fit de nouvelles expériences, qui le confirmérent de plus en plus dans le sentiment qu'il venoit d'embrasser, & qui lui firent découvrir une Théorie toute nouvelle sur le Choc des Corps; c'est celle qu'il explique dans la Dissertation que nous avons indiquée. Avant lui personne n'avoit traité cette matière, suivant les principes de Leibnitz; c'est lui qui le premier l'a réduite en systême, & qui l'a appuiée par des expériences qui devoient lever tout scrupule. Cela n'arriva cependant pas: d'abord après la publication de cette pièce, qu'il fit imprimer séparément pour la distribuer à ses amis, on lui fit plusieurs objections, qui l'engagérent à ajouter à sa Dissertation un Supplément, qui se trouve dans le même Tome XII., pag. 190., du Journal, & ici à la page 247. de la 1re partie. Il y répond en peu de mots à quelques unes des difficultés qu'on lui avoit proposées; il confirme ce qu'il avoit avancé dans son Essai, sur la mesure des Forces, par une nouvelle expérience, faite avec des Cilindres d'yvoire, de même diamètre & arrondis en hémisphère vers une de leurs extrémités. Si on les laisse tomber sur un plan de marbre de hauteurs qui soient en raison inverse des masses, les aplatissemens de l'yvoire sont égaux; ce qui prouve l'égalité des forces, & confirme l'expérience faite avec des Corps qui tombent sur un plan d'argile. A cela il ajoute une nouvelle démonstration de la mesure des Forces, tirée de la considération d'un Corps, sur lequel agissent en même tems deux efforts, qui lui font décrire la diagonale d'un rectangle; démonstration qui seule suffit pour prouver le sentiment de Leibnitz.

Ces deux petits Ouvrages firent grand bruit parmi les Physiciens. Jusqu'alors le sentiment de Leibnitz n'avoit guéres trouvé de partisans hors de l'Allemagne, excepté Mrs. Bernoulli en Suisse & Mr. Poleni en Italie; Sçavans illustres, dont le nom seul auroit suffi pour l'accréditer par tout, si en matières philosophiques l'autorité pouvoit servir de preuve. En France & en Angleterre, on restoit dans l'ancien systême sur les Forces; & dans ce dernier pays on fut surpris de voir Mr. 's Gravesande, ami de Mr. Newton, dont il avoit embrassé les principes philosophiques, soutenir cependant un sentiment opposé au sien sur la mesure des Forces. Mr. Samuel Clarcke entr'autres mit la main à la plume pour le refuter; & oubliant cette modération, qui lui avoit ac-

acquis tant de réputation comme Théologien, il fit insérer dans les *Transactions Philosophiques* n°. 401. une Lettre pleine d'aigreur contre Mr. 's Gravesande, & ceux qui pensoient comme lui sur les Forces. Il l'accusoit de manquer *de bon sens*, d'avoir avancé les *absurdités les plus palpables*, d'avoir refusé de voir *les vérités les plus frappantes*, d'avoir écrit dans le dessein d'*obscurcir la Philosophie* de Mr. Newton, & de l'avoir fait *avec acharnement*.

Quoique Mr. 's Gravesande fut ennemi de toute dispute, il ne put cependant s'empécher de mettre la main à la plume pour se justifier contre toutes ces odieuses imputations. Il étoit sur tout sensible à la dernière. Personne n'avoit plus de vénération que lui pour Mr. Newton, & n'admiroit davantage sa Philosophie; personne n'avoit travaillé plus que lui à l'éclaircir & à la défendre, comme cela paroitra par ses autres Ouvrages, dont je parlerai dans la suite. Il fut donc vivement piqué de voir qu'on l'accusat d'écrire dans la vue d'obscurcir ses principes philosophiques. Cela l'engagea à insérer dans le Journal Littéraire des *Remarques sur la Force des Corps en mouvement & sur le Choc, précedées de quelques Reflexions sur la manière d'écrire de Mr. le Docteur* SAMUEL CLARCKE. Il les partagea en deux Articles, dont le premier se trouve dans la première partie du Tome XIII., pag. 189., & le second dans la deuxième partie du même Tome, pag. 407. On les trouvera ici réunis à la page 251. de la 1re partie. Le premier de ces Articles, ne contient que ses Réflexions sur la manière d'écrire de Mr. Clarcke. Il ne s'arrète point aux reproches qu'il lui fait de manquer de bon sens, d'avancer les absurdités les plus palpables, & de fermer les yeux aux vérités les plus frappantes. Il se contente de remarquer que ces expressions, bien appréciées, ne signifient autre chose, si ce c'est qu'il n'est pas de l'avis de Mr. Clarcke, sur la question dont il s'agit.

Quant au reproche qu'on lui fait d'avoir écrit par envie contre Mr. Newton, Mr. 's Gravesande renvoye aux Ouvrages qu'il a publiés sur la Philosophie de cet illustre Sçavant, où l'intention de lui rendre justice & de faire honneur à ses découvertes est pleinement justifiée. Après quoi il remarque qu'il s'agit d'une question, dont Mr. Newton n'a jamais parlé qu'en passant, & sur laquelle il ne s'est pas écarté du sentiment généralement reçu dans ce tems-là; de sorte qu'il ne s'agit pas plus de son sentiment, que de celui de mille autres. Cette réflexion étoit si naturelle qu'il est étonnant qu'elle ne se soit pas présentée à Mr. Clarcke. Elle n'avoit pas échapé à Mr. Newton, qui ne soupçonna pas même que Mr. 's Gravesande l'eut eu en aucune façon en vue en écrivant sur la mesure des Forces; & bien loin de prendre feu sur cette matière, comme Mr. Clarcke, il en parloit avec beaucoup de sang froid & d'impartialité. S'entretenant un jour avec Mr. le Comte de Bentinck, sur ce qu'on avoit critiqué dans ses Ouvrages, il lui témoigna, qu'au lieu d'en être choqué, il étoit surpris que ces critiques n'eussent pas été en plus grand nombre; & passant ensuite à la question des Forces, il ajouta que son grand âge, & des occupations d'un genre tout différent ne lui permettoient plus d'entrer dans l'examen de cette matière: ce qu'il accompagna d'expressions, qui marquoient chez lui beaucoup d'estime & d'amitié pour Mr. 's Gravesande. Je tiens cela de Mr. le Comte de Bentinck même, qui voudra bien me pardonner la liberté que je prens de le citer ici. Pour autoriser une anecdote aussi intéressante sur la question dont il s'agit, j'avois besoin du témoignage d'un Seigneur tel que lui, aussi distingué par son gout pour les sciences, & par la protection qu'il accorde à ceux qui les cultivent, que par le rang qu'il occupe dans notre République. Ce fut en 1725. qu'il eut avec Mr. Newton cette conversation; & la Lettre de Mr. Clarcke a été écrite en 1728. Celui-ci n'avoit donc pas consulté son illustre Maitre, avant que d'entreprendre sa défense avec tant de vivacité.

Pour achever de donner une idée de la manière de disputer de Mr. Clarcke, Mr. 's Gravesande rapporte trois passages de sa Lettre qui prouvent qu'il n'avoit pas seulement lu l'Ouvrage contre lequel il écrivoit;

voit; ce qu'on aura de la peine à croire, mais qui est cependant certain.

Il est aisé de comprendre de quel côté fut l'avantage de cette dispute; tous les honnêtes-gens furent choqués du stile de Mr. Clarcke, en Angleterre aussi bien qu'ailleurs. Mrs. Reid & Gray, dans l'Abrégé qu'ils ont publié des Transactions Philosophiques, ont eu pour lui l'attention d'ôter de l'extrait qu'ils ont donné de sa Lettre, toutes les expressions & les passages qu'avoit rélevés Mr. 's Gravesande. Voici ce qu'en écrivit à Mr. 's Gravesande, Mr. Cramer, alors Professeur en Mathematiques à Génève, dans une Lettre datée du 22. Août 1729. „ C'est avec bien du plaisir que j'ai lu „ dans le Journal Littéraire votre Ré- „ ponse à la Dissertation impolie de Mr. „ Clarcke. Vous ne pouviez mieux ré- „ lever ses expressions inciviles, qu'en y „ répondant avec autant d'indifférence & „ de gayeté. Vous n'ignorez pas sans- „ doute que la mort l'empêchera de vous „ répliquer. J'attends avec une grande „ impatience le Journal suivant où vous „ entrerez en matière. Il manque encore „ au Public quelques éclaircissemens sur ce „ sujet, & je ne sache personne plus propre „ que vous à les donner comme il faut."

Mr. 's Gravesande les donna, ces éclaircissemens, dans la seconde partie de ses *Remarques*, qui, comme je l'ai dit plus haut, se trouve dans le Tom. XIII., du Journal Littéraire, pag. 407. & qui commence ici avec la page 256. de la 1re partie. Il y répond à toutes les objections qui lui avoient été proposées jusqu'alors, tant sur la Théorie des Forces, que sur celle du Choc.

Dans toute cette Dissertation Ms. 's Gravesande ne nomme aucun de ceux qu'il a en vue dans ses réponses. Quelques uns étoient ses Amis, tels étoient Mrs. Calandrin & Cramer; le dernier adoptoit le nouveau systême sur les Forces, & ne proposoit des difficultés à Mr. 's Gravesande, que pour être mieux en état de les résoudre lui-même; Mr. Calandrin hésitoit dans les commencemens; il sentoit toute la force des raisons qui appuioient le sentiment de Leibnitz; mais il n'étoit pas convaincu; il avoit des scrupules; & comme il cherchoit uniquement la vérité, il proposoit des difficultés, dans la vue d'embrasser le nouveau systême, si on les lui résolvoit, ou de rester dans l'ancien s'il voyoit qu'il fut établi sur des fondemens plus solides. Etant encore dans cet état d'incertitude, il rendoit à Mr. 's Gravesande toute la justice possible; en même tems qu'il lui faisoit les objections les plus fortes, il le défendoit avec chaleur tant à Londres qu'à Paris, quand il voyoit qu'on l'attaquoit mal à propos. Je pourrois donner de tout cela de bonnes preuves, tirées des Lettres qu'il à écrites à Mr. 's Gravesande, & que j'ai actuellement sous les yeux; elles feroient bien honneur à sa candeur & à son savoir; mais, je croirois manquer à ce que je lui dois, si je les publiois sans sa permission. (*)

En Angleterre Mr. 's Gravesande avoit des adversaires différents; la question sur la mesure des Forces étoit devenue une affaire de parti. Depuis la dispute entre Mrs. Newton & Leibnitz, ce qui venoit de ce dernier n'étoit pas reçu favorablement; ainsi le nouveau systême sur les Forces n'y faisoit pas fortune. Nombre de gens s'élevérent contre lui; outre Mr. Clarcke, Mrs. Eames, Pemberton, & Desaguliers, mirent la main à la plume pour le détruire. Mr. le Marquis Poleni leur répondit avec beaucoup de solidité, en les attaquant directement. Mr. 's Gravesande qui les estimoit beaucoup, se contenta de résoudre leurs difficultés, ou de poser les principes d'où découloient ces solutions, sans les nommer, de crainte que la dispute, pour laquelle il avoit beaucoup d'éloignement, ne s'aigrît, s'il avoit pris ces Mrs. directement à partie: il remarquoit que les esprits étoient échaufés.

En France sa mesure des Forces n'étoit guéres mieux reçue. Les autorités les plus respectables étoient pour le sentiment contraire. Mr. Saurin étoit à peu près le seul qui goutàt les nouvelles idées; Mr. de Fontenelle ne les approuvoit point, Mr. de Mairan les avoit combattues ouvertement, dans une Dissertation qui se trouve parmi les Mémoires de l'A- ca-

(*) Ceci a été écrit lorsque Mr. Calandrin vivoit.

cadémie Royale des Sciences de l'année 1728. Si l'autorité doit jamais imposer des loix en matières philosophiques, c'est quand elle est appuiée sur des noms aussi illustres. Aussi n'hésita-t-on point à proscrire le nouveau système: & tous les jours on le combattoit par de nouvelles objections, dont les Amis de Mr. 's Gravesande ne manquoient pas de l'instruire. Voici ce que lui écrivit dans ce tems là Mr. Cramer, qui se trouvoit alors à Paris, dans une Lettre du 7. Fevrier 1729. „ A ce que j'entends dans les conversations que j'ai eues avec quelques Membres de l'Académie, la Théorie des Forces vives est ici coulée à fonds. Je ne sai si le parti le plus fort n'a point un peu opprimé l'autre, en lui imposant une espèce de silence. On a fait entendre qu'il convenoit que l'Académie parlàt toute sur le même ton, & après la décision de ceux qui se sont fait regarder comme les plus habiles, il a bieu fallu que les autres se tussent."

Je viens de dire que Mr. Calandrin hésitoit entre les deux systèmes sur les Forces; il voulut même les concilier: „ Il m'étoit venu sur cet article," dit-il à Mr. 's Gravesande, dans une Lettre, datée du 26. Juin 1728., „ une idée qui n'est pas bien digérée, mais qui pourroit peut-être avoir son bon côté. On peut trouver moyen de vous faire avoir à tous raison, en supposant 1°. que la Force à masses égales est effectivement comme la vitesse. 2°. Qu'il n'y a point de Force d'inertie dans un Corps en repos. Puis appliquant vos principes sur le ployement des parties, &c. on explique aisément les différents faits de Mariotte & de Poleni sur le Choc des Corps." Ce qu'il ajoute ensuite pour développer son idée, est peut-être ce qui a jamais été écrit de plus ingénieux sur cette matière. Mr. 's Gravesande s'attacha principalement, dans la réponse qu'il lui fit, à lever l'équivoque du mot d'inertie, & à prouver que l'inertie existe réellement dans la nature, ce qui faisoit tomber le raisonnement de Mr. Calandrin. Celui-ci ne fut apparemment pas persuadé. Quelques années après, il fit pour la continuation du Journal Littéraire, qui s'imprimoit alors à Leyde, sous le titre de *Journal Historique de la République des Lettres*, un Extrait du *Fasciculus Epistolarum Mathematicarum J. Poleni*: & à l'occasion de la 6. Lettre à l'Abbé Conti, qui roule sur la mesure des Forces, il composa une Dissertation, dans laquelle il expliqua, suivant l'ancien système, l'expérience qu'avoit faite Mr. Poleni, & après lui, Mr. 's Gravesande, en laissant tomber sur quelques Corps mols des boules de même diamètre, mais de masses différentes, & qui produisoient des cavités égales quand elles tomboient de hauteurs, qui étoient réciproquement proportionnelles à leurs poids.

Il n'avoit rien encore paru d'aussi solide contre la mesure des Forces. Mr. Calandrin envoya son Extrait de Poleni & sa Dissertation à Mr. 's Gravesande, & voici ce qu'il lui écrivit en même tems, en date du 29. Août 1732. *Je me suis avisé de joindre à la fin des Réponses de Mr. Poleni aux Objections de Mrs. de Crousaz & Pemberton, une objection ou une explication de l'expérience de Mr. Poleni, dans le système ancien; je l'ai mise exprès de façon qu'on peut l'ôter sans déranger l'extrait. Faites en ce que vous voudrez, sans crainte d'être obligé de me donner un mot d'explication. Je l'ai mise parce que la* Paternité, *si je puis ainsi dire, m'y a engagé, mais je vous assure qu'elle n'ira pas jusques à la vouloir soutenir d'un seul mot.*

Mr. 's Gravesande n'eut garde de dérober au public une Pièce aussi bien écrite: il la fit donc imprimer à la suite de l'Extrait de Poleni. Mais il étoit trop intéressé à la mesure des Forces, pour ne pas travailler à détruire les impressions qu'elle devoit donner contre son système. Il le fit dans le troisième Tome du *Journal Historique de la République des Lettres*, pag. 374., où l'on trouve des *Nouvelles Expériences sur la Force des Corps en mouvement, précédées d'une Réponse à la Dissertation sur la Force des Corps*; on les trouvera ici, avec l'écrit de *Mr. Calandrin*, page 269. & suiv. de la 1re partie. Là, après avoir rendu à l'Ouvrage de Mr. Calandrin toute la justice qu'il

qu'il mérite, il convient que ſi ſon principe eſt vrai, ſes conſéquences ſont très bien tirées. Ce principe c'eſt que la ténacité des parties du Corps mol reſtant la même, la réſiſtence qui réſulte de cette ténacité eſt toujours la même auſſi. Pour prouver le contraire, Mr. 's Graveſande en appelle à l'expérience.

Enſuite Mr. 's Graveſande paſſe aux Expériences nouvelles, qu'annonce le titre de ſa Diſſertation. Il y en a cinq, qui confirment que, ſoit qu'on ait égard à la deſtruction des Forces, ſoit à leur production, on les trouve toujours proportionnelles aux quarrés des viteſſes.

Il remarque dans cette même Diſſertation que les deux opinions oppoſées avoient été défendues à Genève avec la même force & le même génie. En effet, Mr. Cramer, Collégue, & Ami de Mr. Calandrin, avoit mis dans le Journal Littéraire, un Extrait de cette même lettre de Mr. Poleni: Mr. de Crouſaz qui y étoit nommé parmi ceux dont cet illuſtre Italien avoit refuté le ſentiment, ſe défendit dans une lettre qui fut inſérée dans le même Journal. Mr. Cramer lui repliqua, en gardant l'incognito, & appuia le nouveau ſyſtème de raiſons très ſolides. Dans une lettre à Mr. 's Graveſande, en date du 7. Février 1729., il en avoit donné une démonſtration fort ingénieuſe; on la lira avec plaiſir, quoiqu'elle ne ſoit pas tout-à-fait nouvelle; la voici.

,, Si la Force des Corps étoit propor-
,, tionnelle à la quantité de tranſlation (au
,, produit de la maſſe par la viteſſe)
,, cette Force pourroit augmenter & di-
,, minuer alternativement, c'eſt à dire,
,, changer continuellement, ſans que la
,, Force que les Corps perdent, quand
,, elle diminue, ſoit emploiée à rien, ou
,, que celle qu'ils gagnent quand elle aug-
,, mente, leur ſoit communiquée par rien
,, d'extérieur, ce qui ſans doute doit être
,, regardé comme abſurde. Or c'eſt pour-
,, tant ce qui arriveroit dans le cas con-
,, ſideré par Mr. Newton, de deux
,, Corps tournants autour de leur centre
,, commun de gravité, pendant que ce
,, centre ſe meut en ligne droite: car leur
,, mouvement ou leur quantité de trans-
,, lation, & ſelon nos adverſaires, leur
,, Force, augmente & diminue alternati-
,, vement, étant le plus grand quand les
,, Corps ſont dans la ligne de direction
,, du centre, & le plus petit quand ils
,, ſont dans la ligne perpendiculaire à cel-
,, le là. Au lieu que ſelon notre métho-
,, de de meſurer les forces, en multi-
,, pliant la maſſe de chaque Corps, par
,, le quarré de ſa viteſſe, on trouve en-
,, toutes les ſituations des deux Corps
,, une force conſtante, comme elle doit
,, l'être puiſqu'il n'y a aucun effet pro-
,, duit, ni aucune force communiquée de
,, dehors."

Avant que de quitter le Journal je crois devoir parler d'un autre petit Ouvrage de Mr. 's Graveſande, qui y a été inſéré, mais ſous la forme d'extrait. On le trouvera ici en entier à la page 298. de la 2de partie. C'eſt une lettre qu'il écrivit à la demande de Mr. Saurin, ſon ami, qui travailloit alors à ſes *Diſcours ſur le V. & le N. Teſtament*. Ce Théologien parlant du miracle opéré par Joſué, lorsqu'il arrêta le ſoleil & la lune, & voulant établir qu'on ne ſauroit en tirer un argument contre le mouvement de la terre autour du ſoleil, pria Mr. 's Graveſande, de vouloir bien lui expoſer les raiſons qui prouvent ce mouvement, & de lui donner l'explication de ce paſſage, où il eſt dit que le ſoleil s'arrêta ſur Gabaon, & la lune ſur la vallée d'Ajalon. C'eſt ce que Mr. 's Graveſande fit dans la lettre dont il eſt ici queſtion. Il y démontre par des raiſonnemens à la portée de ceux pour qui les Diſcours de Mr. Saurin étoient deſtinés, 1°. le mouvement de la terre ſur ſon axe; 2°. ſon mouvement autour du ſoleil; & quoi qu'il parle pour des gens en qui il ſuppoſe très peu de connoiſſances aſtronomiques, on s'apperçoit aiſément que c'eſt un grand Aſtronome qui parle. Enſuite il examine les objections qu'on tire, contre ce mouvement, de l'Ecriture Sainte & en particulier du miracle opéré par Joſué: il prouve que le recit que fait l'Auteur ſacré de ce miracle n'eſt nullement ſuſceptible d'un ſens philoſophique, même dans l'hypothèſe du

mit (*K*). En 1715., il fut obligé d'interrompre ce travail, ayant été nom-

repos de la terre, & que par conséquent on ne peut en tirer aucune preuve contre une propofition auffi bien démontrée que l'eft celle de fon mouvement.

(*K*) *Je ne parlerai que d'un feul des Extraits qu'il y mit.*] C'eft de celui des *Elemens de la Géométrie de l'Infini*, par Mr. de Fontenelle. Quoique cet Extrait fut fait avec toute la politeffe & tous les égards dûs à un Sçavant auffi diftingué que Mr. de Fontenelle, celui-ci cependant n'en fut pas content; il crut voir une réfutation de fes fentimens dans le foin que le Journalifte avoit pris de les mettre en parallèle avec les fentimens communément reçus, fans cependant prononcer quels étoient préférables. Il adreffa fes plaintes à Mr. 's Gravefande, qu'il jugea bien être l'Auteur de cet Extrait; dans la lettre qu'il lui écrivit il ne put s'empêcher de laiffer paroitre la tendreffe qu'il avoit pour fon Ouvrage, & combien il fouhaitoit qu'on en portât un jugement favorable. Comme tout ce qui eft forti de fa plume eft intéreffant; on la lira avec plaifir. Elle eft datée du 7. Avril 1730.: la voici.

„ Je viens de lire ce que vous avez dit „ fur la 1re partie de ma *Géométrie de* „ *l'Infini*, dans le XIV. Tome du Jour- „ nal Littéraire. Je vous remercie très „ humblement de quelques traits obli- „ geants que vous y avez femés, & du „ ton honnête & impartial dont vous me „ faites des objections. Comme ces ob- „ jections ont de la force par elles mê- „ mes, & de l'autorité par votre nom „ très illuftre dans les Mathématiques, je „ les ai examinées avec beaucoup de foin, „ & je puis vous affurer très fincérement „ que je m'y rendrois, fi je n'y avois pas „ trouvé des réponfes très claires, & très „ précifes. Mais il me faudroit un peu „ de tems pour les bien rediger par „ écrit, & les mettre dans l'ordre & „ dans le jour néceffaire, & je n'ai pas „ préfentement ce loifir là. Je me hâte „ de vous les annoncer avant que de „ vous les envoyer, & je vous demande „ très inftamment une grace, c'eft de „ vouloir bien les annoncer vous même „ au public, comme je le fais ici, dans „ le premier Journal où vous parlerez en- „ core de mon Livre. Cela ne vous en- „ gage à rien, & convient fort à l'im- „ partialité, qui vous fait tant d'hon- „ neur, & moi j'ai lieu de craindre que „ vos difficultés, qui viennent de fi bon- „ ne main, ne fiffent trop d'impreffion. „ Je fai cependant déjà quelques Géomè- „ tres qui ne s'y rendent pas, quoique „ je ne leur aye rien communiqué de „ mes futurs éclairciffemens, car j'ai „ l'honneur de vous écrire dans le mo- „ ment que je me fuis pleinement affuré „ de leur validité. Je ne ferai point du „ tout furpris, & je l'ai dit à la fin de „ la Préface, qu'il fe foit gliffé des fau- „ tes dans un auffi gros Ouvrage, d'un „ deffein auffi hardi, & ce qu'il y a de „ pis, qui vient de moi; mais j'efpère „ qu'il reftera un Syftème géométrique, „ qui n'avoit point encore été formé, „ qui fe trouvera affez bien lié, & qui „ répandra du jour fur quantité de ma- „ tières auparavant fort obfcures. J'en „ ai déjà pour garants un grand nombre „ de fuffrages du plus grand poids, & „ je fouhaiterois infiniment que le votre „ en put être, que du moins vous don- „ naffiez à la fin de vos Extraits un ju- „ gement général, qui me feroit peut être „ plus favorable que les jugemens dé- „ taillés; mais je n'ai garde de vous rien „ demander contre votre confcience, & „ quel que foit votre fentiment fur ce Li- „ vre, je ferai toujours & avec beaucoup „ d'eftime &c."

Mr. 's Gravefande, qui n'avoit eu aucun deffein de faire de la peine à Mr. de Fontenelle, lui fit une réponfe, dans laquelle, fans convenir qu'il fut l'Auteur de l'Extrait, parce que les loix, que les Journaliftes s'étoient prefcrites, ne le lui permettoient pas, il lui témoigna avec combien de fatisfaction il avoit lu fon Li-

nommé pour accompagner, en qualité de Sécrétaire d'Ambassade (*L*), Mr. le Baron de Wassenaer de Duyvenvoorde, & Mr. de Borsfele van den Hoge, qui furent envoïés par les Etats-Généraux en Angleterre, pour y

Livre. „ Je me sers avec plaisir, " lui dit-il, „ de cette occasion pour vous assurer qu'en lisant votre Ouvrage j'ai été frapé de la grandeur de l'entreprise, & que j'ai admiré la manière dont vous avez exécuté vostre dessein. Les vues nouvelles sur l'Infini, que vous aviez repandues dans les différents volumes de l'Histoire de l'Académie, avoient fait l'étonnement des plus grands Mathématiciens. Vous venez de les réunir, de les étendre & de les éclaircir; vous y en avez joint un plus grand nombre d'autres qui n'avoient pas encore paru, & cela sur des matières que personne n'avoit touchées jusques à présent; vous en avez fait un systême qui ne peut être reçu des Connoisseurs que comme un présent qui a passé leur attente, quoi qu'ils connussent la main d'où il venoit. Excusez je vous prie, Monsieur, si je vous entretiens de votre propre Ouvrage, la lecture m'en a fait trop de plaisir pour laisser passer cette occasion de vous en marquer ma reconnoissance. Du reste je suis sensible à la manière obligeante dont vous vous exprimez sur mon chapitre dans votre lettre, je voudrois la mériter. Je suis &c.

Peu de tems après, Mr. de Fontenelle envoia à Mr. 's Gravesande les éclaircissemens qu'il lui avoit promis, & il les accompagna de cette séconde lettre, en date du 2. Juin 1730.

„ J'ai déjà eu l'honneur de vous écrire sous l'enveloppe de Mrs. Gosse & Neaulme au sujet des objections que vous m'avez faites sur la *Géométrie de l'Infini*, voici la Réponse que je vous avois promise, & j'espère que cet esprit d'équité, qui rend votre Journal si estimable, vous la fera insérer dans quelqu'un de vos volumes; je me flatte même que vous la trouverez satisfaisante, & je vous avoue que je me tiendrois trop heureux de pouvoir gagner un aussi habile homme que vous. J'en compte déjà plusieurs, & même plus que je n'espérois, car je sai bien que les paradoxes, quelque vrais qu'ils puissent être, n'opèrent que lentement; ne m'ôtez pas, je vous prie, toute espérance, mais dussiez vous me l'ôter, je n'en serois pas avec moins d'estime, & de considération, Monsieur, &c."

Mr. 's Gravesande fit insérer ces Eclaircissemens dans le XVI. Tome du Journal Littéraire, pag. 1., & suiv. & il y ajouta des Remarques qui se trouvent à la pag. 9. du même volume. Là il rend à Mr. de Fontenelle toute la justice qui lui est due, & en justifiant les expressions qui lui ont déplu dans l'Extrait, il fait voir que le Journaliste n'a point pensé à se déclarer contre ses sentimens. J'ai lieu de croire que ces Remarques ne plurent point à Mr. de Fontenelle; cependant, il ne me paroit pas qu'elles continssent rien dont il eut raison d'être offensé.

(*L*) *Il fut nommé Sécrétaire d'Ambassade.*] Cette Ambassade ne dura guéres plus d'une année, ainsi le séjour de Mr. 's Gravesande en Angleterre ne fut pas fort long. Je lui ai entendu dire que ce fut là qu'il acquit la facilité de pouvoir travailler au milieu du bruit, avec autant de liberté que quand il étoit retiré dans son cabinet. Sa chambre étoit le rendez-vous des Gentils-hommes qui étoient à la suite de Mrs. les Ambassadeurs. Il les recevoit lors même qu'il étoit le plus occupé: il leur permettoit de causer entr'eux pendant qu'il travailloit, mais sous condition que s'il se disoit quelque chose qu'il fut curieux d'entendre, celui qui l'auroit dite seroit tenu de la repéter dès qu'il l'éxigeroit. Cela l'accoutuma si bien à n'être point distrait par le bruit qui se faisoit autour de lui, qu'il pouvoit dans la suite faire les calculs les plus difficiles au milieu de la compagnie la plus nombreuse.

y féliciter le Roi George I. sur son avénement à la couronne. Il retrouva à Londres ses anciens amis, Mrs. Burnet, avec lesquels il avoit étudié à Leyde, & par leur moyen il se lia étroitement avec le fameux Evêque de Salisbury leur Père, & plusieurs autres Sçavans; mais ses principales relations furent avec l'illustre Newton, qui conçut pour lui beaucoup d'estime & d'amitié. Il y fut reçu membre de la Société Royale. Après son retour d'Angleterre, il s'établit de nouveau à la Haye, où la tranquillité dont il jouïssoit fut troublée par la fâcheuse nouvelle qu'il reçut de la mort de son Père, décédé le 18. Novembre 1716. L'Année suivante Mrs. les Curateurs de l'Université de Leyde le nommérent Professeur ordinaire de Mathématiques & d'Astronomie dans leur Académie (*M*). Il y

(*M*) *Il fut nommé Professeur de Mathématiques & d'Astronomie dans l'Université de Leyde.*] Mr. de Wassenaer de Duyvenvoorde, qui avoit conçu pour Mr. 's Gravesande beaucoup d'amitié, & qui avoit été témoin en Angleterre du cas qu'en faisoient Mr. Newton, & tous les plus grands Mathématiciens, le recommanda fortement à Mrs. les Curateurs de l'Université de Leyde. La vocation que ces Messieurs lui adressérent est datée du 16. Juin 1717., & il prit possession de la chaire d'Astronomie le 22. du même mois, en prononçant une Harangue *de Matheseos in omnibus Scientiis, præcipue in Physicis, Usu; nec non de Astronomiæ Perfectione ex Physica haurienda.* J'en ai donné ici la traduction Françoise, pag. 311. de la 2de partie. Elle fut imprimée d'abord séparément, ensuite il s'en fit une seconde édition, qui fut réunie à deux autres Harangues dont je parlerai dans la suite, & qui parurent en 1734. à Leyde chez Samuel Luchtmans. Après y avoir démontré combien l'étude des Mathématiques est propre à donner à l'esprit cette justesse & cette sagacité, si nécessaires pour faire des progrès dans les autres sciences, surtout dans l'Astronomie, il fit voir que cette dernière ne sauroit se passer du secours de la Physique, qui fournit les principes d'où dérive la cause de tous les mouvemens des Corps célestes. Il s'étendit principalement sur ce dernier article, pour préparer ses Auditeurs à l'entendre enseigner la Physique, quoique cette science ne fut pas expressément comprise parmi celles qui étoient attachées à la chaire qu'on venoit de lui conférer. Il étoit nécessaire qu'il en donnât des leçons. Celui qui remplissoit alors à Leyde la chaire de Philosophie, étoit Mr. Senguerd, homme d'esprit & de savoir, mais zélé partisan des dogmes scholastiques. La Philosophie de Newton, cette Philosophie, qui rejette toute hypothèse, & n'admet que ce qui est démontré géométriquement, ou fondé sur l'expérience, y étoit absolument inconnue.

Mr. 's Gravesande fut le premier hors de l'Angleterre qui entreprit de l'enseigner. Il le fit avec tout l'applaudissement possible; il ouvrit ses Colléges avec un appareil considérable de Machines, dont la plupart étoient de son invention, & qui le mirent en état d'éclaircir par des expériences toutes les différentes parties de la Physique. Jusqu'alors il ne s'étoit donné aucun Cours complet de cette science dans ce gout-là. Son appareil étoit admiré, comme ce qu'il y avoit jamais eu de plus parfait en ce genre: & il l'étoit en effet; lui seul n'en étoit pas content, il travailloit continuellement à l'augmenter & à le perfectionner par de nouvelles inventions. Nous verrons ci-dessous, en parlant des différentes éditions de ses Ouvrages sur la Physique, avec quel succès il en vint à bout.

Il n'enseigna pas l'Astronomie avec moins d'éclat. Il substitua les véritables causes des mouvemens des Corps célestes,

y donna le premier un Cours complet d'Expériences physiques; faites avec tout le soin possible.

En 1721., le Landgrave de Hesse-Cassel, qui se faisoit un plaisir d'attirer à sa Cour d'habiles gens, l'invita à venir passer quelque tems auprès de lui (*N*), afin de le consulter sur diverses Machines qu'il vouloit faire exé-

tes, découvertes avec tant de sagacité par le fameux Newton, aux Tourbillons imaginaires de Descartes, alors admis dans l'Université de Leyde.

Il ouvrit ses Colléges de Mathématiques en recommandant la lecture des Elémens d'Euclide; il mettoit cet Ouvrage fort au dessus de tous les Traités de Géométrie modernes: & en général la méthode des anciens Mathématiciens étoit fort de son gout; il ne négligeoit rien pour la faire gouter aussi à ses Auditeurs. Dans les leçons qu'il donna sur l'Algébre, il s'appliqua toujours à faire regarder cette science, comme un moyen de découvrir des vérités utiles à la Société; tous les problèmes qu'il donnoit à resoudre à ses disciples tendoient à ce but. J'en ai un grand nombre parmi ses manuscrits, dont la solution apprenoit toujours quelque chose d'intéressant à ceux qui en venoient à bout. Il méprisoit ces Calculateurs de profession, qui passent leur vie à la recherche de vérités de pure spéculation, & dont la découverte n'est d'aucune utilité soit pour les autres sciences, soit pour les besoins de la vie.

(*N*) *Le Landgrave de Hesse-Cassel l'invita à venir passer quelque tems auprès de lui.*] Ce Prince aimoit les sciences, & particuliérement la Méchanique, & il avoit un des plus beaux Cabinets de Machines qu'il y eut en Europe. La réputation que Mr. 's Gravesande s'étoit acquise dans les diverses branches de la Physique, lui fit souhaiter d'avoir son avis sur différentes Machines nouvelles, qu'il vouloit faire construire, & entr'autres sur une Machine, inventée par un nommé Orffyreus, qu'il croyoit être un mouvement perpétuel, & dont je parlerai au long dans la Remarque suivante. Il chargea Mr. Roman de Badeveld, Sur-Intendant de ses Bâtimens, de l'inviter à venir passer quelques semaines à sa Cour. Mr. 's Gravesande s'y rendit pendant les grandes vacances Académiques de l'année 1721. Il y trouva le Baron Fischers, qui lui avoit été recommandé par Mr. Desaguliers, comme un *très bon Méchanicien*. Il étoit Architecte de l'Empereur, & il travailloit dans ce tems là à accréditer en Allemagne les Machines à feu, inventées en Angleterre, destinées à élever l'eau par le moyen de la vapeur de l'eau bouillante. Le Landgrave, pour lui accorder sa protection, n'attendoit que la décision de Mr. 's Gravesande; celui-ci prononça en faveur de la nouvelle invention, qui lui étoit bien connue; car dés 1716. il l'avoit déjà perfectionnée avec le Dr. Desaguliers. Voiez *A course of Expérimental Phylosophy by J. T. Desaguliers* Vol. II. pag. 484. Il fit même avec Mrs. Fischers & Roman un Contract en date du 3. Août 1721., par lequel ils s'engageoient tous trois à travailler à la perfection de ces Machines, & à obtenir un Octroy pour en faire construire dans les mines, & autres endroits en Allemagne, où elles pourroient être utiles. De concert avec Mr. Fischers il s'appliqua d'abord à remplir le premier article de ce contract; il fit construire un petit modéle de cette Machine à laquelle il fit des changemens considérables; cependant cette association n'eut pas de suite, soit à cause des difficultés que Mr. Fischers, qui en étoit le principal promoteur, trouva à obtenir les privilèges nécessaires, soit parce que ces Messieurs voulurent favoriser un Anglois, qui construisit une de ces Machines en Hongrie, où elle eut tout le succès qu'on devoit attendre.

(O)

exécuter. Il profita du tems des Vacances pour ſe rendre à Caſſel. Là il vit la ſingulière Machine, conſtruite par Orffyreus, ſans pouvoir décider ſi c'étoit un mouvement perpétuel ou non *(O)*: ce qui ſuppoſe qu'il

(O) *Il vit à Caſſel la ſingulière Machine conſtruite par Orffyreus, ſans pouvoir décider ſi c'étoit un mouvement perpétuel ou non.*] Cette Machine a été ſi fameuſe, qu'on en verra ici avec plaiſir les particularités qui vont faire le ſujet de cette Remarque.

Orffyreus, Saxon de naiſſance, étoit un de ces hommes remarquables par les talens qu'ils ont reçu de la nature pour certains arts, talens très ſouvent accompagnés d'un ſingulier travers d'eſprit. Il avoit un génie fait pour la Méchanique; & il l'appliqua presque uniquement à la découverte du Mouvement perpétuel. On ſait que cette découverte eſt pour la Méchanique, ce que celle de la Pierre philoſophale eſt pour la Chymie. Orffyreus après y avoir travaillé, dit-on, pendant plus de 20. ans, & avoir fait dans ce but plus de 300. Machines différentes, parvint enfin à en conſtruire une qu'il prétendoit être le Mouvement perpétuel; il la fit d'abord à Gera dans le Voigtland, en 1712.; enſuite il la perfectionna en 1713., 1714., & 1715., à Draſchwitz & à Merſeburg en Saxe: mais piqué des railleries & des contradictions qu'il eut à eſſuyer de la part de ſes compatriotes ſur ſa nouvelle découverte, il mit cette Machine en piéces, & chercha à la faire ailleurs. Le Landgrave de Heſſe l'invita fort à propos à venir chez lui, il s'y rendit d'abord: ce Prince lui accorda un appartement dans ſon Château de Weiſſenſtein, & tout ce dont il avoit beſoin pour conſtruire une autre Machine ſemblable à la précédente: il y travailla avec ardeur, & dès qu'elle fut finie, le Landgrave ſuivi de toute ſa Cour alla la voir, & l'admira. Le ſpectacle étoit eſfectivement ſingulier. Orffyreus lui même l'a décrit dans un petit Traité qu'il publia ſur cette Machine en Alleman & en Latin, & dont j'ai tiré les particularités qu'on vient de lire; mais comme ſon témoignage pouvoit paroitre ſuſpect, il fut confirmé par une déclaration authentique du Landgrave, & par une Lettre du Baron Fiſchers à Mr. Deſaguliers, qui fut imprimée dans les Nouvelles publiques de ce tems là. A ces témoignages, Mr. 's Graveſande ajouta le ſien. Il examina cette Machine avec toute l'attention poſſible, & cela par ordre du Landgrave. Il en rendit compte à Mr. Newton dans une Lettre qu'il lui écrivit, & qui fut imprimée dans le *Mercure Hiſtorique & Politique du mois de Septembre* 1721. *pag.* 363. On la trouvera ici à la page 303. de la 1re partie. Cette Machine étoit une roue ou plutot un tambour de 14. pouces d'épaiſſeur ſur 12. pieds de diamètre, très léger & environné de toiles cirées pour qu'on n'en vit pas l'intérieur. Il étoit traverſé par un axe dont les extrémités étoient de fer, & de trois quarts de pouce d'épaiſſeur, & repoſoient ſur d'eux ſoutiens, ſur lesquels le tambour tournoit. Dans quelque ſens qu'on le mit en mouvement, & cela aſſez lentement, après deux ou trois tours, il acquéroit une telle viteſſe, qu'il en faiſoit 25. ou 26. dans une ſeconde; & c'eſt là le mouvement qu'il a conſervé pendant 2. mois, dans une chambre fermée & ſcellée du ſceau du Landgrave, pour que perſonne n'y put entrer. Mr. 's Graveſande, convaincu que rien d'extérieur ne pouvoit contribuer au mouvement de cette Machine, ne put pas prononcer que ce fut un mouvement perpétuel, n'en ayant pas vu l'intérieur; mais il crut avoir des préſomtions très fortes pour l'affirmative.

On voit par cette lettre, que le témoignage de Mr. 's Graveſande étoit auſſi avantageux à Orffyreus qu'il étoit poſſible; n'aiant pas vu l'intérieur il ne pouvoit pas juger autrement de ſa Machine: cependant nous allons voir que cet homme bizarre n'en fut point content, puis qu'à cauſe de cet examen il mit cette Machine en pièces. Par la rélation de Mr. 's Graveſande, par celle du Baron Fiſchers, &

& par le témoignage même du Landgrave, il paroit démontré, que cette roue n'étoit point mue par aucun agent extérieur. C'est cependant ce qu'on prétendit; on accusa Orffyreus d'être un imposteur, qui en avoit imposé à la bonne foi du Prince, qui avoit trompé Mr. 'sGravesande, & tous ceux qui avoient examiné sa Machine. Sa propre servante déposa contre lui, & dit que c'étoit elle qui faisoit tourner cette roue, & insensiblement il tomba si fort dans le mépris, que tous ceux qui l'avoient protégé, en avoient honte. Mr. de Crousaz, qui étoit dans ce tems-là à la Cour de Cassel, écrivit en date du 3. Février 1729. une lettre à Mr. 'sGravesande, où il s'énonçoit en ces termes: „ 1°. Orffyreus „ est un fou. 2°. Il est incroiable qu'un „ fou ait découvert ce qu'une infinité „ d'habiles gens ont cherché sans aucun „ succès. 3°. Je ne crois pas l'incroiable. 4°. On conçoit aisément d'où „ vient que des personnes gardent pour „ eux des sécrets, dont ils tirent du „ fruit. Celui-ci ne pouvoit espérer du „ sien que de la réputation, & il la laisse ternir par une accusation circonstanciée, dont il étoit en son pouvoir de „ démontrer le faux, si elle avoit été „ fausse. 5°. La servante se tire de chez „ lui de peur d'être égorgée, & en effet „ la vie d'un tel témoin est à charge. „ Elle a en main par écrit le serment „ terrible qu'Orffyreus lui a fait jurer.... „ 6°. Il n'avoit qu'à demander qu'on mit „ cette fille en sureté, & exiger un tems „ pour rétablir sa Machine . . . 7°. On „ publia que cette Machine alloit s'exécuter; & tout d'un coup les plus avisés furent ceux qui prirent le parti de „ s'en taire le plus exactement ... 8°. Il „ est vrai, qu'il a chez lui une Machine, à laquelle il donne aussi le nom „ de mouvement perpétuel; mais il ne „ la transporte pas. Elle est beaucoup „ plus petite & différente de la première, „ sur-tout en ce qu'elle ne tourne que „ d'un côté &c."

Voilà de quoi rendre fort suspect Orffyreus & sa Machine. Mr. 'sGravesande se feroit-il trompé au point que d'en avoir été la dupe? Lisons ce qu'il en dit lui-même dans sa Réponse à Mr. de Crousaz, & dont je trouve le brouillon parmi ses papiers, mais sans date: „ J'ai différé de vous répondre, jusques à ce „ que j'eusse recouvré un écrit que je „ dressai le lendemain de l'examen de la „ Machine; car, quoique je me souvienne très exactement de tout ce qui s'est „ passé, je crois qu'un écrit dressé le „ lendemain de l'examen, & communiqué à Monseigneur, en présence de „ qui l'examen avoit été fait, devoit être „ de plus de poids. C'est pourquoi j'ai „ voulu sçavoir comment je m'étois exprimé.

„ Voici ce que j'ai appris. On dit „ qu'une servante assure sous serment „ qu'elle, ou une autre servante, faisoit „ tourner la Machine d'Orffyreus, étant „ placée dans une chambre voisine.

„ Je sai bien qu'Orffyreus est un fou, „ j'ignore s'il est imposteur, je n'ai jamais décidé si sa Machine étoit une „ fourberie ou non; mais ce que je sai „ aussi sûrement qu'aucune chose au monde, c'est que si la servante dit ce que „ je viens de marquer, elle dit un mensonge insigne.

„ Monsgr. le Landgrave, en présence „ du Baron Fischers, Architecte de l'Empéreur, & d'autres personnes, a fait „ démonter à ma prière les soutiens de „ la Machine; nous en avons vu les axes „ à découvert, j'ai examiné les platines „ dans lesquelles les axes reposoient; & „ dans tout cet examen il n'a pas paru „ la moindre trace de communication avec „ une chambre voisine. Je me souviens „ très distinctement de toutes les circonstances de cet examen, qui mit Orffyreus dans une si grande colére contre „ moi, qu'il mit la Machine en pièces, „ le jour même, & écrivit sur la muraille que c'étoit l'impertinente curiosité du Professeur 'sGravesande qui en „ étoit la cause. C'est ce que j'ai lu „ moi-même l'année d'après; & le résultat de l'examen est exprimé clairement dans l'écrit dont je viens de parler, & qui est imprimé dans le Mercure Historique, Mois de Sept. 1721.

„ On m'a dit plusieurs circonstances du „ témoignage de la servante, mais je n'y

qu'il ne croioit par ce mouvement impossible (*P*). L'année suivante il re-

„ vois pas grande difficulté: en fait de Machines, je ne compte guères sur ce que „ peut dire une servante, qui peut-être „ en tournant le tourne-broche de son „ Maitre, aura cru faire aller le mouvement perpétuel. Si vous sçavez quelque chose de particulier touchant cette „ affaire, vous me ferez un sensible plaisir de me le marquer."

Il est difficile de déterminer ce qu'il faut croire de cette Machine. Il me paroit cependant que si l'on examine murement tout ce qui est pour & contre Orffyreus, on peut se fixer à ceci: 1°., Orffyreus étoit effectivement un fou, comme Mr. 's Gravesande en convient avec Mr. de Crousaz; ses Machines brisées à deux différentes reprises, pour de fort mauvaises raisons, & sans aucune nécessité, en sont de bonnes preuves. Mais c'étoit un de ces fous, tels qu'on en voit souvent, dont la folie se borne à certains objets, & mériteroit plutôt le nom de bizarrerie. Une telle folie est quelques fois accompagnée de beaucoup de génie, & quand des gens de ce caractère s'appliquent à une seule chose, comme il paroit que celui-ci a fait, il n'est pas surprenant de leur voir faire des découvertes qui ont échapé à la sagacité des plus habiles gens. Ainsi je ne voudrois point conclure avec Mr. de Crousaz qu'il est incroiable qu'un fou, de l'espèce de ceux parmi lesquels on doit ranger Orffyreus, ait trouvé une chose que tant de Sçavans ont cherchée inutilement. Ajoutons qu'il se trompe quand il dit qu'Orffyreus ne pouvoit espérer de son sécret que de la réputation: il en attendoit un profit considérable; puisqu'il en demandoit 200000. florins. 2°. Rien d'extérieur ne conservoit le mouvement de sa Machine: si c'étoit sa servante qui la faisoit mouvoir, est il apparent que cela n'eut point été remarqué par des yeux aussi clairvoiants que l'étoient ceux qui en ont fait l'examen, ou par le Landgrave qui avoit vu l'intérieur de la Machine? D'ailleurs comment peut-on concevoir qu'une roue, d'un si gros volume, eut pu être agitée par une cause, qui devoit agir uniquement sur l'axe en traversant ses soutiens, & qui étoit si petite qu'elle avoit échapé à l'examen le plus rigoureux? 3°. Si la servante n'a point été gagnée pour déposer contre Orffyreus, tout ce que son témoignage prouve, c'est que son Maitre lui avoit fait accroire que c'étoit elle qui mettoit en mouvement la Machine, en faisant tourner un petit rouet, & cela soit pour donner le change à ceux qui auroient cherché son sécret; soit par une suite de son carectère singulier, très capable d'une imagination aussi bizarre, comme je l'ai entendu dire souvent à Mr. 's Gravesande; & ce même caractère peut fort bien encore l'avoir empêché de refaire une nouvelle Machine. 4°. Il faut avouer que cette roue étoit un phénomène de Méchanique très remarquable: & c'est à quoi il faut s'en tenir si l'on n'en sçait que ce qu'on vient de lire; il y auroit autant de témérité à dire que cette invention étoit le mouvement perpétuel, qu'à ne la regarder que comme une fourberie, dont quelqu'agent extérieur étoit la cause.

(*P*) *Ce qui suppose qu'il ne croioit pas le* mouvement perpétuel *impossible.*] La plus forte objection qu'on puisse faire contre la Machine d'Orffyreus, c'est que le mouvement perpétuel n'est pas possible. La plus grande partie des Mathématiciens en conviennent, soutenir le contraire, c'est se rendre ridicule, & donner mauvaise opinion de son habileté en Méchanique; de la même façon que c'est se faire passer pour visionaire, que de chercher la Pierre philosophale en Chymie. Cependant je crois que plusieurs de ceux qui prononcent sur ceci, n'ont pas examiné la chose assez profondément pour pouvoir en juger: & je doute que jusqu'à present on ait prouvé l'impossibilité du mouvement perpétuel. Mr. 's Gravesande osoit dire plus; il croioit qu'il y avoit moyen d'en démontrer la possibilité; & c'est ce qu'il entreprit de faire, peu

retourna à Caſſel, ſur une nouvelle invitation du Landgrave. En 1724., en quittant le Rectorat de l'Académie, il prononça une harangue (*Q*), qui prouva bien clairement qu'il étoit en état d'enſeigner avec ſuccès, outre les Mathématiques & l'Aſtronomie, toutes les autres parties de la Philoſophie. Ce ne fut cependant qu'en 1734., que Mrs. les Curateurs de l'Univerſité lui en donnérent la commiſſion, en ajoutant à ſes titres, celui de Profeſſeur en Philoſophie (*R*). Le plus conſidérable des Ouvrages qu'il

peu de tems après avoir examiné la Machine de Caſſel. Bien des gens avoient trouvé étrange qu'un auſſi habile Mathématicien que lui eut avancé que le mouvement perpétuel n'avoit rien de contradictoire; il ſe crut obligé de rendre raiſon de ce qu'il avoit dit; & il le fit dans une Diſſertation intitulée *Remarques touchant le Mouvement perpétuel*. Cette pièce a éte inſérée dans les Ecrits périodiques de ce tems-là, qu'on ne lit plus, & on en a tiré ſéparément quelques exemplaires, que l'Auteur a diſtribués à ſes Amis; mais dont la plupart ſe ſont perdus à cauſe de la petiteſſe du format, qui eſt un in 12°., de 20. pages: ainſi elle eſt devenue ſi rare qu'il n'eſt preſque plus poſſible de la trouver; le ſeul éxemplaire que j'en aye jamais vu, m'a été prêté par Mr. Muſſchenbroek. Je l'ai donnée ici à la page 305. de la première partie.

Cette diſſertation attira à Mr. 's Graveſande des lettres de tous les chercheurs du mouvement perpétuel; il ne daigna répondre à aucun: il croioit le mouvement perpétuel poſſible, mais il croioit en même tems que peu de gens pouvoient le trouver. Nous verrons ci-deſſous, Remarque (*U*), le jugement que porta un des plus grands Mathématiciens de ce ſiècle, je veux dire Mr. Jean Bernoulli, ſur cette pièce.

(*Q*) *Il prononça une harangue.*] Cette harangue a pour titre *de Evidentia*; J'en ai donné ici la traduction françoiſe, pag. 329. de la ſeconde partie. L'Orateur y traite, en homme qui penſe juſte & profondément, des principes ſur leſquels eſt fondée la certitude de nos connoiſſances. Après avoir clairement établi la nature de l'Evidence mathématique, & démontré qu'elle eſt par elle même la marque caractériſtique du vrai, il examine quelles ſont les ſciences qui en ſont ſuſceptibles. Enſuite il paſſe à l'Evidence morale, qu'il prouve être un fondement de perſuaſion, non par ſa propre nature, mais parce que Dieu a voulu que nous ajoutaſſions foi à ce que les ſens, le témoignage, & l'analogie nous apprennent, trois choſes qui ſont les fondemens de cette eſpèce d'Evidence; & à cette occaſion il fait voir la contradiction qu'il y a dans les raiſonnemens des Sceptiques. La clarté & la ſolidité qui régnent dans toute cette harangue, la firent regarder comme le plus précieux morceau de Logique qui eut jamais paru ſur cette matière. Elle fut imprimée d'abord ſéparément, & enſuite on la réunit, comme je l'ai dit ci-devant, ſous un titre commun avec celle que Mr. 's Graveſande prononça quand il fut fait Profeſſeur, & une troiſième dont je parlerai dans la Remarque ſuivante. Depuis je l'ai fait réimprimer à la tête de la troiſième édition de ſa Phyſique, comme on le verra ci-deſſous.

(*R*) *En 1734. Mrs. les Curateurs ajoutérent à ſes titres, celui de Profeſſeur en Philoſophie.*] Juſqu'à ce tems là il n'avoit eu que le département des Mathématiques & de l'Aſtronomie; excepté qu'en 1730., on lui conféra la commiſſion d'enſeigner l'Architecture civile & militaire en langue hollandoiſe; commiſſion qui ſe donnoit toujours à un ſimple Lecteur; mais comme alors il n'y en avoit point, il voulut bien s'en charger, & il la remplit pendant 4. ans, au bout deſquels il s'en démit, en faveur de Mr. la Bordus, qu'à ſa recommandation Meſſieurs les Curateurs nommérent Lecteur en Mathé-

qu'il a publiés, est un Traité de Physique dont il y a eu plusieurs éditions (*S*). Les jugemens qu'on porta sur ce Livre furent très différents

thématiques ; & en même tems il obtint le titre de Professeur en Philosophie, ce qui le mettoit en état de donner des Collèges sur toutes les parties de cette science.

Il fit à cette occasion une troisième harangue, *de vera & nunquam vituperata Philosophia*, où après avoir exposé les défauts que l'on peut reprocher aux principales Sectes philosophiques, il fait voir que la vraye Philosophie, consiste en ce que chacun réponde au but pour lequel il a été créé par l'Etre suprême, & c'est de cette Philosophie qu'il démontre qu'elle n'a jamais été l'objet du mépris, mais qu'au contraire elle a toujours été également estimée dans les différents ages du Monde. Ce qu'il en dit est fondé sur la plus saine raison, &, quoique dénué des ornemens de l'éloquence, est très propre à inspirer l'amour de la sagesse, qui est le véritable but où doit tendre le Philosophe. Cette harangue fut prononcée le 25. de Septembre 1734., & imprimée la même année chez Samuel Luchtmans, réunie, comme je l'ai dit, avec deux autres. C'est celle qui se trouve ici en François à la page 346. de la seconde partie.

Immédiatement après l'avoir prononcée, il commença à donner des leçons sur la Logique, la Méthaphysique & la Morale. Nous verrons quelles étoient ses idées sur ces sciences, quand nous parlerons des Ouvrages qu'il en a publiés, ou qu'il en a voulu publier.

(*S*) *Il y a eu plusieurs éditions de sa Physique.*] Dès que Mr. 's Gravesande eut été nommé Professeur, il donna comme on l'a vû ci-dessus, des leçons de Physique, & pour qu'elles fussent plus utiles à ses Auditeurs, il publia un Cours de cette Science, sous ce titre, *Physices Elementa Mathematica, Experimentis confirmata. Sive, Introductio ad Philosophiam Newtonianam. Lugduni Batavorum, apud Petrum van der Aa, & Balduinum Janssonium van der Aa*, in 4°., en deux Tomes, dont le premier parut en 1720., & le second en 1721. C'est là le premier Ouvrage dans lequel on ait vu, dans toutes les différentes branches de la Physique, les expériences & les démonstrations substituées aux hypothèses & aux conjectures, qui dégoutoient ceux qui cherchoient uniquement la vérité. Tout y est déduit des loix de la Nature, qui, quoiqu'on en ignore la cause, doivent seules nous fournir les principes d'explication dans une science qui a uniquement pour objet les opérations mêmes de la Nature. Tout ce qui n'en découle pas clairement, & qui ne peut pas être confirmé pas des expériences, est banni de cet Ouvrage. Dans une excellente Préface qui est à la tête du premier volume, l'Auteur expose la méthode qu'il a suivie dans ses raisonnemens philosophiques; c'est celle du grand NEWTON, qui n'a rien admis en Physique que ce qui étoit démontré ; & ce fut la raison qui l'engagea à mettre le nom de cet illustre Philosophe sur le titre de son Livre, qui renfermoit d'ailleurs bien des choses dont Newton n'avoit point parlé, ou sur lesquelles il ne pensoit pas comme Mr. 's Gravesande.

Tout l'Ouvrage est divisé en quatre Livres. Le premier traite du Corps en général, & du mouvement des Corps solides: le second, des Fluides; le troisième de la Lumière, & le quatrième, de l'Astronomie. Il est orné de 58. Planches, très bien gravées, dont la plupart représentent les Machines, avec lesquelles ont été faites les expériences, qui y sont décrites avec beaucoup de soin. Ces Machines sont presque toutes de l'invention de Mr. 's Gravesande ; s'il y en a quelques unes qu'il ait empruntées d'ailleurs, il les a tellement changées & perfectionnées qu'elles peuvent passer pour être de lui. Celui qu'il emploioit à leur construction étoit Mr. *Jean Musschenbroek*, Artiste qui n'étoit pas moins distingué par son profond savoir en Mathématiques, que par son habileté à exécuter tout ce que

que Mr. 's Gravesande imaginoit; celui-ci n'avoit qu'à lui exposer de bouche ce qu'il avoit en tête pour qu'il le fit, si non avec toute la propreté possible, du moins avec solidité & avec justesse. L'estime & l'amitié que j'avois pour lui, me rendent encore très sensible à la perte que j'ai faite par sa mort arrivée en 1748.

Dès que la Physique de 's Gravesande parut, on s'empressa de la publier en Anglois. A Londres, les Libraires Senex & Taylor engagérent le Dr. Désaguliers à la traduire; le second volume n'étoit pas encore publié, lorsqu'il entreprit cette traduction, il se hâta de la finir pour prévenir les Libraires Mears & Woodward, qui de leur côté faisoient travailler à la même traduction, mais y emploioient un bon Prêtre, qui n'entendoit rien à la matière dont il étoit question. S'appercevant des défauts de leur Ouvrage, en bonne partie déjà imprimé, ils s'adressèrent au Dr. Keil, à qui ils avancérent 10. guinées, pour qu'il voulut bien le revoir, en lui promettant de réimprimer les feuilles où il trouveroit des corrections à faire; & tout de suite ils annoncérent leur édition comme faite sous les yeux de cet habile homme, & en même tems ils ne négligérent rien pour décrier celle de Mr. Désaguliers; celui-ci ne garda pas le silence, il leur repliqua vivement, & cela donna occasion à plusieurs avertissemens de part & d'autre qui parurent dans les papiers publics, & où les termes furent très peu ménagés. Cependant la traduction de Mr. Désaguliers parut la première; mais elle se ressentoit de la précipitation avec laquelle il l'avoit faite: il la dictoit quelques-fois à quatre copistes à la fois; & il en acheva le second Tome en 15. jours de tems. Les Libraires pour lui donner plus d'authenticité, profitérent de l'absence de Mr. Désaguliers, pour ajouter à l'Avertissement qu'il avoit mis à la tête de sa traduction, qu'elle avoit été faite à la demande & par conséquent avec l'approbation de l'Auteur: celui-ci s'en plaignit, & là dessus Mr. Désaguliers supprima cet Avertissement dans les exemplaires qui n'étoient pas encore distribués; mais cela n'en empêcha pas le débit, qui fut tel, que quelques mois après il en fallut donner une nouvelle édition, où plusieurs fautes de la première furent corrigées. Cependant les Libraires Mears & Woodward publiérent aussi leur traduction, mais remplie de fautes si lourdes, qu'il étoit aisé de voir qu'ils n'avoient aucunement profité des corrections faites par Mr. Keil; aussi tomba-t-elle bientôt dans l'oubli. On peut voir au commencement du second Tome de l'édition originale, le jugement qu'a porté Mr. 's Gravesande sur ces deux traductions, & le détail que j'en ai donné est tiré des Lettres qu'il avoit reçues du Dr. Désaguliers.

Le but de Mr. 's Gravesande en publiant sa Physique, étoit principalement l'utilité de ses Auditeurs: il leur étoit commode de pouvoir retrouver dans son Livre la description des expériences qu'ils lui avoient vu faire dans ses Collèges. Mais il étoit d'un trop grand format, pour qu'ils pussent le porter avec eux aux leçons; cela le détermina à l'abréger & à en faire un plus petit volume, qu'il publia sous le titre de *Philosophiæ Newtonianæ Institutiones, in usus Academicos. Lugduni Batavorum, apud Petrum van der Aa*, 1723., *in* 8°. Dans cet Abrégé il retrancha toutes les descriptions d'expériences, mais en même tems il y fit divers changemens, tant dans les choses que dans l'ordre, & donna plusieurs démonstrations qui ne se trouvoient pas dans son grand Ouvrage. Ce qu'il y eut sur tout de nouveau, fut un Chapitre où il exposa sa Théorie sur les Forces; il étoit encore dans l'ancien systême sur cette matière, lorsqu'il composa ses Elémens, mais comme on l'a vu ci-dessus, il adopta ensuite celui de Leibnitz, que l'on trouve expliqué & démontré dans le Chapitre XIX. du premier Livre de cet Abrégé.

Deux ans après il donna une nouvelle édition de ses Elémens de Physique, qui parut chez P. van der Aa, en 1725. Il s'étoit principalement appliqué dans la première édition à donner des expériences; elle avoit été faite pour des Etudiants, plus frappés par ce qui tombe sous leurs yeux, que par des démonstrations géométriques, qui sont pour l'ordinaire au dessus de leur portée. Mais l'approbation dont

dont les plus grands Mathématiciens honorèrent cet Ouvrage, détermina son Auteur à le rendre plus digne d'être lu par eux. Dans cette seconde édition on trouve des Scholies, où il donne les démonstrations des propositions, qui dans la première n'étoient appuiées que sur des expériences; ces mêmes Scholies, contiennent encore plusieurs propositions nouvelles, qui ne pouvoient pas être commodément placées dans le corps de l'Ouvrage. On y trouve aussi la description de diverses Machines, que Mr. 's Gravesande avoit inventées depuis peu; & grand nombre de celles qui avoient été décrites dans la première édition, sont si fort changées dans celle-ci qu'elles peuvent passer pour nouvelles. La Théorie des Forces, & du Choc, y est expliquée au long, & confirmée par un grand nombre de belles expériences.

Pour dispenser ceux qui avoient la première édition, de l'obligation d'acheter cette seconde, Mr. 's Gravesande fit en leur faveur un Supplément qui renfermoit les principaux changemens & les additions qu'il y avoit faites, & il le publia sous ce titre: *Supplementum Physicum, sive Addenda & Corrigenda in prima Editione, Tomi primi, Libri editi Lugd. Bat. anno MDCCXX. cui titulus* Physices Elementa Mathematica, Experimentis confirmata, sive Introductio ad Philosophiam Newtonianam. *Lugduni Batavorum*, apud *P. van der Aa*, 1725. Ce Supplément ne roule que sur le premier Tome, parce que les changemens faits au second étoient peu considérables.

En 1728. Mr. 's Gravesande publia une nouvelle édition de ses *Philosophiæ Newtonianæ Institutiones. Leidæ & Amstelodami, apud J. A. Langerak, J. & Herm. Verbeek, & B. Lakeman.* Elle fut faite d'après la seconde édition des Elémens, & même on y trouve quelque chose de plus sur le Choc, avec d'autres additions assez importantes.

En 1742., il parut une troisième édition des Elémens, à Leyde, chez A. Langerak, & J. & H. Verbeek. Depuis la publication des deux premières, Mr. 's Gravesande continuellement appliqué à perfectionner, & à étendre ses idées sur la Physique, avoit trouvé des démonstrations plus claires que celles qu'il avoit emploiées auparavant; il avoit fait de nouvelles découvertes, & inventé de nouvelles Machines, ou perfectioné celles dont il avoit fait usage jusqu'alors. Cela le détermina à faire réimprimer ces Elémens pour la troisième fois; & cette édition est si considérablement changée & augmentée, qu'elle peut être regardée comme un Ouvrage tout à fait nouveau, quoique les principes y soient les mêmes que dans les précedentes. Elle est ornée de 127 Planches, fort bien gravées, & qui représentent un très grand nombre de Machines, toutes de l'invention de l'Auteur, ou perfectionnées par lui. Elles sont bien différentes de celles qui avoient paru dans les premières éditions, qu'il est intéressant de comparer avec celle-ci, pour voir par quels dégrés l'esprit humain parvient à perfectionner ses inventions. Les Machines, telles que Mr. 's Gravesande les avoit décrites dans la première édition, étoient très ingénieusement inventées, on les admiroit. Elles parurent fort changées dans la seconde; en les voyant ainsi corrigées, on fut surpris de n'en avoir pas d'abord connu les défauts: cependant elles étoient encore bien éloignées de ce qu'elles devoient être; dans la troisième elles sont portées à un point de perfection, au delà duquel il semble qu'il ne soit pas possible d'aller. L'usage continuel qu'en faisoit Mr. 's Gravesande, lui en découvroit les défauts, qu'il corrigeoit d'abord, & de cette façon il a renouvellé plusieurs fois son cabinet, non sans des dépenses considérables. Presque toutes les Machines qui sont décrites dans les trois éditions, comparées ensemble, fournissent des preuves de ce que je dis ici; mais pour s'en convaincre il suffit de jetter les yeux sur celles qui servent aux expériences des Forces centrales, de la Percussion, des Loix de l'Elasticité, & de l'Hydraulique, & sur la Pompe pneumatique.

A la tête de cette troisième édition, Mr. 's Gravesande a mis une Préface, où il rend compte des divers changemens qu'il y a faits, & où il indique les sources où il a puisé les propositions, qui sans

ſans être de lui ſe trouvent dans ſon Ouvrage. On lui avoit fait un crime auparavant de ce qu'il n'avoit point cité les Auteurs, de qui il avoit emprunté quelque choſe; il voulut ôter tout ſujet de plainte à cet égard; mais cela ne lui étoit pas facile. Jamais il n'avoit fait de Recueils; quand ſes lectures lui apprenoient quelque choſe qu'il jugeoit digne d'être retenue, il ſe la mettoit en tête, ſans jamais la confier au papier, & ſans s'embaraſſer du nom de l'Auteur qui la lui fourniſſoit; il ne cherchoit qu'à orner ſon eſprit, & non à charger ſa mémoire. Auſſi ſe trouva-t-il très embaraſſé quand il fallut mettre la main à la plume pour ces citations, il me pria de l'aider; & nous emploiames enſemble pluſieurs jours à chercher les noms dont nous avions beſoin, & encore nous fut-il impoſſible de les trouver tous.

On avoit tort de le blâmer de s'être attribué les penſées des autres, ſans les citer; jamais perſonne ne fut plus éloigné que lui de chercher à ſe faire honneur de ce qui appartenoit à autrui; il avoit prévenu tout ſoupçon à cet égard, par cet avertiſſement qui ſe trouve dans la Preface de la première édition de ſes Elémens. *Qui ſcientiæ elementa conſcribit, non quid novi, quantum ad materiam pollicetur: ideoque inutile duxi monere, ubi reperiantur quæ hic traduntur. Pro meo ſumſi, quodcunque propoſito meo utile mihi viſum eſt, credidique ſatis eſſe de hoc monere ad omnem furti ſuſpicionem vitandam. Malo gloriam, ſi quam ex paucis novis, quæ ſparſim in hoc tractatu dantur, ſperare poſſum, amittere, quam alii ſuam detrahere: ſumat ergo quisque quod ſuum credit, nihil mihi vindico.*

Dans cette troiſième édition, après la Préface ſuit la harangue ſur l'*Evidence*, dont il a été parlé dans la Remarque (*Q*). L'Auteur a voulu qu'elle fut placée là, pour ſervir de réponſe à ceux qui prétendent que nous n'avons que des connoiſſances imparfaites en Phyſique, & que nos raiſonnemens ſur le peu que nous connoiſſons ſont hypothétiques; & qu'ainſi vouloir bannir les hypothèſes de la Phyſique, c'eſt réduire cette ſcience à rien.

Le corps de l'Ouvrage même eſt partagé en ſix Livres, chacun deſquels eſt plus grand qu'aucun des quatre qui faiſoient le partage des éditions précédentes. Dans le prémier, outre des additions conſidérables dans tous les Chapitres, particuliérement dans ceux où il eſt queſtion des Pendules & des Forces centrales, on trouve un Chapitre nouveau très intéresſant; c'eſt le XXI. où il eſt traité de l'uſage des Machines; rien n'avoit jamais été publié d'auſſi profond ſur cette matière. Le ſecond Livre qui roule ſur les Forces, le Choc, tant ſimple que composé, & les Loix de l'Elaſticité, contient tout ce qui a été dit d'eſſentiel ſur ces matières. Les Forces y ſont examinées dans trois Chapitres, & le ſyſtème de Leibnitz y eſt établi & confirmé par un grand nombre d'expériences, qui ne laiſſent plus lieu à aucun doute. Mr. 's Graveſande y donne tous les principes néceſſaires pour réſoudre les différentes difficultés qui lui avoient été faites; mais il les donne ſans indiquer ces difficultés, non plus que leurs Auteurs, pour ne pas s'engager dans des diſputes, pour lesquelles on a vu qu'il avoit beaucoup déloignement. Mr. Déſaguliers, zélé partiſan de l'ancien ſyſtème ſur les Forces, ayant ſuſpendu, par le conſeil de Mr. Muſſchenbroek, la publication du ſecond volume de ſon Cours de Phyſique, jusqu'à ce qu'il eut vu cette troiſième édition, tacha de réconcilier l'ancien ſyſtème avec le nouveau, quand il eut lu ce que Mr. 's Graveſande y diſoit ſur les Forces. Il prétend que toute la diſpute ſur cette matière eſt une diſpute de mots; les partiſans de l'ancien ſyſtème n'entendant autre choſe par le mot de Force que la quantité de mouvement d'un Corps, ou la preſſion inſtantanée qu'il opére, pendant que ceux qui ſuivent le nouveau ſyſtème, déſignent par ce mot le pouvoir d'agir qui ſe trouve dans un Corps en mouvement. A l'aide de cette diſtinction il croit lever toute difficulté; la Force dans le premier ſens eſt égale à la maſſe multipliée par la viteſſe, & dans le ſecond elle eſt proportionnelle au produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe. Il eſt ſurprenant que Mr. Déſaguliers ait tant tardé à faire cette découverte. Il y avoit

avoit longtems que Mr. 's Gravesande avoit établi la question de cette même manière, & qu'il avoit levé toute l'équivoque que Mr. Désaguliers prétend avoir trouvée. Voyez ci-dessus la Remarque (*I.*).

Le troisième Livre qui traite des Fluides, est considérablement augmenté & changé. On y trouve une méthode très ingénieuse de peser exactement les Corps avec la balance hydrostatique, un Chapitre sur l'action latérale des Fluides en mouvement, & un autre sur les Machines hydrauliques, qui n'avoient point paru dans les éditions précédentes.

Le quatrième Livre roule sur l'Air & sur le Feu. Les expériences sur l'Air y sont décrites avec beaucoup plus d'étendue, de même que les Machines avec lesquelles elles ont été faites, & qui sont toutes changées. Dans le Traité du Feu on trouve bien des idées nouvelles.

Dans le cinquième Livre il est question de la Lumière, & tout y est démontré par des expériences, faites avec toute l'exactitude & la commodité possible, à l'aide d'une Machine de l'invention de Mr. 's Gravesande, & à laquelle il a donné le nom d'*Héliostate*: cette ingénieuse Machine sert à retenir un rayon solaire dans une même ligne, aussi longtems que l'expérience dure. Elle consiste dans un miroir de métal, dirigé de façon par une horloge, qu'il réfléchit toujours les rayons de lumière vers le même point. Fahrenheit en avoit eu la première idée, mais une idée très imparfaite, il falloit un génie aussi inventif que celui de Mr. 's Gravesande pour l'exécuter comme il a fait (*).

Dans le sixième Livre qui traite de l'Astronomie, les changemens sont moins considérables que dans les autres: il y en a cependant, surtout dans le Chapitre, où il est parlé de la figure des Planètes: celle de la Terre y est déterminée d'après les observations faites par les Académiciens François, tant au Nord que sous l'Equateur.

En lisant cet Ouvrage, il faut se souvenir que ce ne sont que des Elémens, & qu'ainsi l'Auteur n'a pas du y dire tout ce qu'il y avoit à dire sur les sujets qu'il traite: son but n'étoit point de rendre inutiles les Ouvrages de ceux qui avoient écrit sur les mêmes matières: & ce qu'il en a emprunté, il l'a toujours présenté sous une face nouvelle, & accompagné de démonstrations de sa façon.

Il avoit à peine achevé de corriger la dernière épreuve de cette troisième édition, lorsqu'il mourut sans avoir le tems d'en faire imprimer la Préface. Je fus obligé de me charger de ce soin; elle n'étoit pas entiérement achevée, la fin en devoit être changée: je la fis imprimer telle qu'elle étoit. J'ajoutai de plus à cette édition une Table des figures, dans laquelle, pour la commodité de ceux qui voudroient faire exécuter les Machines qu'elles représentoient, j'indiquai la proportion qu'il y avoit entre chaque Machine & sa représentation dans les Planches.

Mr. 's Gravesande se proposoit de réformer ses *Institutiones Philosophiæ Newtonianæ* d'après cette nouvelle édition, mais la mort l'ayant empêché d'exécuter ce dessein, je me vis encore dans l'obligation de prendre la chose sur moi; je fis donc un abrégé exact des *Elémens*, où je fis entrer tout ce que Mr. 's Gravesande m'avoit dit y vouloir insérer, & qu'il expliquoit dans ses Collèges, & j'en donnai ainsi une troisième édition, qui parut à Leyde en 1744., chez J. A. Langerak, & J. & H. Verbeek. En 1766. elle fut réimprimée pour la quatrième fois, avec quelques changemens que j'y fis.

Comme cette nouvelle édition des Elémens étoit attendue avec beaucoup d'impatience, les mêmes Libraires qui l'imprimoient résolurent de la faire traduire en Hollandois. Mr. Engelman, Docteur en Médecine à Haarlem, entreprit cette traduction, & il en parut un volume qui contenoit les deux prémiers Livres sous ce titre, *Wiskundige Grondbeginselen der Natuurkunde, door Proef-Onder-* vin-

(*) Cette Machine a été ingénieusement appliquée à l'usage des télescopes astronomiques, par Mr. *C. G. Kratzenstein.*

rents (*T*), & l'on verra avec plaisir les remarques que fit un des plus grands

vindingen gestaafd. Of te Inleiding tot de Newtoniaansche Wysbegeerte, door den Heere W. J. 's Gravesande. Uit het Latyn, naar de derde, en dubbeld vermeerderde uitgaave, vertaald door Jan Engelman, *Medecinæ Doctor; te Leyden, by J. A. Langerak, J. en H. Verbeek*, 1743. Mais l'Ouvrage ne fut pas continué, parce que la plupart de ceux qui étoient en état de le lire dans ces Provinces, entendant le Latin, préferoient l'original. Cependant cette traduction est très bien faite, & elle a passé sous les yeux de l'Auteur.

Il en parut aussi une traduction Françoise, faite par Mr. de Joncourt, ami de Mr. 's Gravesande, qui en a revu la plus grande partie, faite déjà avant sa mort. Elle a été imprimée en deux volumes, in 4°.: en voici le titre: *Elémens de Physique démontrés mathématiquement & confirmés par des Expériences: ou Introduction à la Philosophie Newtonienne. Ouvrage traduit du Latin de* G. J. 's Gravesande, *par* E. de Joncourt, & imprimé *à Leyde, chez J. A. Langerak & J. & H. Verbeek*, 1746. Cette traduction est faite avec tout le soin possible, par un homme bien au fait des matières qui y sont traitées: ainsi l'on peut être assuré de sa fidélité.

Je voudrois en pouvoir dire autant d'une autre qui a été faite à Paris, par C. F. Rolande de Virlois, & imprimée chez *C. A. Jombert*: en 2. Volumes, in 8°. Mais je ne la connois que par l'extrait qu'on en a donné dans le Journal des Sçavans. On en a retranché les Scholies, ce qui ne peut que répandre de l'obscurité sur tout l'Ouvrage, & le rendre très imparfait. Cette même édition a été aussi traduite en Anglois par Mr. Désaguliers.

(*T*) *Les jugemens qu'on porta de ce Livre, furent très différents.*] Il fut reçu en Angleterre avec beaucoup d'applaudissement; les deux traductions qu'on en fit dès qu'il y parut, en sont une preuve. Il étoit flatteur pour les Anglois de voir un Mathématicien du premier ordre, faire profession ouverte de ne reconnoitre d'autre véritable Philosophie que celle où en suivant les principes de Newton, on n'admettoit aucune hypothèse, & d'où l'on rejettoit tout ce qui n'étoit pas démontré géométriquement, ou appuié sur l'expérience. Les idées Newtoniennes n'étoient guéres connues en deça de la mer: personne n'avoit encore travaillé à en former un systême. Mr. 's Gravesande fut le premier qui entreprit la chose & qui l'exécuta avec succès. Les Anglois même n'avoient encore aucun Ouvrage complet de Physique dans ce goût. Voici ce qu'en écrivit Mr. G. Carmichaël, célèbre Professeur dans l'Université de Glasgow, à Mr. 's Gravesande, dans une Lettre, datée le 14. Octobre 1721.

Nequeo non uti, Vir Clarissime, licet tibi prorsus ignotus, commoda occasione quam mihi suppeditat filius meus, (ad celeberrimam vestram Academiam, ob uberiorem animi cultum capessendum, nuper profectus) te salutandi, tibique simul ex animo gratulandi, quod egregio & utilissimo opere Physices Elementorum, a te nuper in lucem edito, rempublicam literariam, juniores in primis Philosophiæ naturalis Studiosos, eorumque Institutores, plurimum demerueris. Ego certe, ad quem post plures (tertio quoque anno recurrente) vices, proximæ denuo illam Disciplinam in hac nostra Academia docendi partes attinent, tibi uni acceptum refero, quod suppetat tandem dudum desideratum ejusmodi Systema, ex quo compendiaria Institutione præcipua Physices Mathematicæ & Experimentalis Elementa, absque rerum inutilium aut dogmatum hodie dediscendorum mistura, cum Auditoribus communicare liceat. Hac commoditate quo minus utar, nec Libri tui mole, nec pretio, deterreri me patior; quorum tamen utrumque mallem esse aliquanto minus: & sane nescio, an non Academicæ Institutionis usibus adbuc magis esses consulturus, si imprimi curares definitiones & propositiones

nes tuas, una cum brevibus, quæ plerumque adduntur, earum demonstrationibus a priori (suppletis etiam paucis quæ desunt, præsertim ubi ex ipsis Geometriæ elementis, aut facili computo, peti possunt) omissis interim apparatibus Experimentorum, una cum figuris eo pertinentibus: quamvis enim cum omnibus æquis Arbitris ultro agnoscam, tuarum lucubrationum non minimam hanc esse laudem, quod varias & ingeniosas admodum rationes excogitaveris, dogmata physica ad oculorum judicium revocandi, etiam non pauca, quæ demonstratione fere & calculo animo persuadere fuimus hucusque contenti; putaverim tamen in Academica Institutione, si ipsa experimenta, ut fieri debet, Auditorum oculis cernenda exhibeantur, non fore etiam necessarium, ut accuratæ eorum explicationes e libro tradantur. Sed hac de re tu ipse melius judicabis. (*)

Quand la seconde édition de cette Physique parut, on fut un peu mécontent en Angleterre d'y trouver le sentiment de Mr. Leibnitz, appuié sur des expériences qui embarassoient ceux qui étoient dans d'autres idées; cependant on n'en rendit pas moins justice au reste de l'Ouvrage.

Les Allemans donnérent aussi de grands éloges à ce Livre. En plusieurs Académies, les Professeurs l'expliquérent dans leurs leçons; Mr. Bulfinger le choisit pour le texte de celles, qu'il donnoit à Petersbourg, & fit une partie des expériences qui y sont décrites. La Théorie des Forces qui déplaisoit aux Anglois, étoit précisément une des raisons qui le faisoient rechercher par les Mathématiciens d'Allemagne. On verra avec plaisir ce que Mr. Herman écrivit là-dessus à Mr. 's Gravesande, dans une Lettre du 20. Juin 1727. „ ce que vous dites de Mr. *Huygens* est „ très juste; car, en effet ce qu'il dit „ de la Force ascentionnelle des Corps „ qui montent, qu'elle doit rester la même, & lorsqu'il fait cette Force égale „ à la somme des quarrés des vitesses, „ pour peu qu'on y prenne garde, mène „ tout droit à la mesure des Forces vives, que Mr. Leibnitz a bien indiquée, mais, à mon avis, qu'il n'a en „ aucun endroit de ses Ouvrages publiés, „ bien prouvée. Cependant malgré toutes les oppositions qu'on y fait en „ France & en Angleterre, je crois cette „ mesure, tant à cause de vos expériences, avec celles de Mr. Poleni, comme aussi à cause des démonstrations „ que vous en avez données & d'autres, „ qui verront encore le jour, hors d'atteinte: & ce que je trouve de fort curieux, c'est que cette même mesure se „ peut tirer aussi de quelques théorèmes „ que Mr. Newton a donnés dans ses „ *Principes de Philosophie.*"

En France l'on pensoit différemment sur la Physique de Mr. 's Gravesande; on n'y voyoit pas avec plaisir la Philosophie de Newton, qui étoit Anglois, préferée à celle de Descartes, qui étoit François; l'esprit de parti souffroit d'une telle préference. Les Journalistes de Trévoux travaillérent à en sapper les fondemens dans un Extrait qu'ils donnérent du I. Tome de cet Ouvrage, dans leurs Mémoires du mois de Mai 1721., & qui fut réimprimé dans le mois d'Octobre de la même année, parce que dans la première impression, l'ordre en avoit été tellement brouillé par la négligence du Correcteur, qu'il étoit impossible d'y trouver du sens. Cet Extrait, qui a été fait par le Père Castel, est presque une critique continuelle des idées de Mr. 's Gravesande, quelques fois même exprimée en des termes peu décents. On pourra juger de l'esprit qui y régne, par quelques traits de ce que le Journaliste dit en parlant de la Préface de Mr. 's Gravesande, & de la méthode de raisonner de Mr. Newton en matière de Physique.

Il trouve fort mauvais qu'on veuille exclure de la Philosophie les simples conjectures; *vouloir proscrire toute hypothèse*, dit-il, *c'est fermer souvent l'entrée à la vérité.* Mais s'il avoit voulu donner un peu d'attention à ce que Mr. 's Gravesande avan-

(*) On a vu dans la Remarque précédente que Mr. 's Gravesande a fait ce que desire ici Mr. Carmichaël.

avance ſur les hypothèſes, il auroit vu que celui-ci n'a jamais entendu par hypothèſe une choſe, qu'on ſuppoſe d'abord, pour avoir occaſion de s'en éclaircir, & qu'on prouve enſuite. Dès qu'elle eſt prouvée, elle n'eſt plus hypothèſe. L'Arithmétique n'admet point d'hypothèſes, & cependant elle n'exclut pas la régle de fauſſe poſition, dans laquelle on poſe une choſe qu'on ſait être fauſſe. On n'a jamais nié qu'il ne fut permis, & même néceſſaire en Phyſique, de tatonner avant de découvrir le vrai. Tout ce que Mr. 's Graveſande ſoutient avec les Newtoniens, c'eſt qu'une hypothèſe, avant que d'être prouvée, ne doit pas être régardée comme faiſant partie de la Phyſique, dans laquelle, comme dans toute autre ſcience, on ne doit rien admettre que de démontré.

Auſſi, ajoute le Journaliſte, *a-t-on beau s'en défendre; on a beau déclamer contre les hypothèſes, après tout ce bruit, on s'y livre comme les autres. Mr. 's Graveſande voudroit-il bien qu'on prit autrement que pour des hypothèſes, ſes penſées ſur l'eſpace, ſur le vuide, ſur Dieu lui même, & ſur la plus-part des queſtions, où il a ôſé commettre le crime de penſer & de raiſonner au delà de l'expérience & de la Géométrie?* Il eſt aiſé de renverſer ce raiſonnement. Si Mr. 's Graveſande a confondu des hypothèſes avec des choſes démontrées, il a eu tort: & cela ne prouve pas qu'il faille en admettre. Il croit avoir eû des preuves du vuide, & ce qu'il dit de l'eſpace en eſt une ſuite; ſi on lui avoit fait voir que ſes preuves ne ſont pas aſſez fortes, & que ce qu'il dit eſt hypothétique, il auroit ſurement renoncé à ce qu'il avoit avancé. Il a dit de Dieu que c'eſt un Etre ſage, qui a créé le monde, qui nous a mis dans la néceſſité de juger de bien des choſes par nos ſens, & de juger de certaines choſes que nous n'avons pas examinées, par celles qui nous ſont connues. Il n'en a rien dit de plus dans tout ſon Livre. Ce ſont là des hypothèſes, ſuivant le Journaliſte; c'eſt-à-dire, qu'il croit que Dieu eſt ſage, juſqu'à ce qu'on ait trouvé une autre hypothèſe plus probable. Quelles réflexions ne pourroit-on pas faire ſur un pareil ſentiment?

Après la défenſe des hypothèſes, le Journaliſte attaque la méthode de ne rien avancer en Phyſique qui ne ſoit fondé ſur des expériences. *Les expériences*, dit-il, *ne ſont pas également recevables, quoi qu'en diſe notre Auteur, qui ſemble vouloir reduire les hommes à n'avoir abſolument que des yeux . . . Il a raiſon de vouloir qu'on ſe borne à ce que Dieu a fait, ſans s'égarer dans ce qu'il a pu faire. C'eſt donc la Nature, & la Nature elle même, qu'il faut continuellement avoir devant les yeux, & examiner avec un travail infatigable: On en tombe d'accord, excepté du travail infatigable. Car pourquoi cet attirail d'expériences, de recherches pénibles, de creuſets, & d'alembics, où ſous prétexte que la Nature veut qu'on lui arrache ſon ſécret, on la met ſans ceſſe à la torture, à la queſtion, l'alterant, la déguiſant pour la mieux connoitre. L'Art eſt bon, il eſt bon de faire des expériences, mais lorsque je vois des Livres entiers de Phyſique, comme celui de notre Auteur, tout pleins de ces expériences rares, curieuſes, ingénieuſes ſi l'on veut, que l'Art fournit, dit on, à l'Angletterre, ſans presque aucune des obſervations ſimples, naïves, faciles, que la Nature fournit abondamment dans tous les Pays, à tous les eſprits, je me ſouviens alors que l'Art altère tout, & je me défie avec le ſavant Anglois, Mr. Boyle, que l'Artiſte prévenu ne porte à ſes recherches l'imagination pour juge, & que le plus ſouvent l'eſprit n'en ſoit la dupe.* On s'apperçoit aiſément que toute cette déclamation tend à ruiner la Philoſophie Newtonienne, auſſi bien qu'à décréditer l'Ouvrage de notre Auteur. Mais le Journaliſte a manqué ſon but. Les Newtoniens conviennent avec lui, que toutes les expériences ne ſont pas également recevables, & rejettent celles dans leſquelles on déguiſe la Nature, pour la mieux connoitre. Pour les accuſer d'en emploier de telles, il faudroit indiquer du moins ſur quoi cette accuſation eſt fondée. Dans tout l'Ouvrage de Mr. 's Graveſande, il n'eſt

grands Mathématiciens de ce ſiècle ſur ſon titre (*U*). On a encore de lui

n'eſt pas parlé une ſeule fois d'alembic ou de creuſet, & les plus recherchées de ſes expériences ſont approuvées dans la ſuite de l'Extrait.

Enfin ce Journaliſte eſt choqué de voir des Philoſophes ſe donner le titre de Newtoniens, comme ſi Newton étoit l'inventeur de *la méthode de procéder par Géomètrie & par expériences, . . : Descartes, Rohault & tous les Carteſiens . . . avoient donné là deſſus d'aſſez beaux exemples à l'Angleterre & à Mr. Newton.* Mais cela ne ſuffit pas pour être Newtonien; il faut encore en même tems rejetter les hypothèſes; c'eſt ce que Descartes, & ſes Diſciples n'ont jamais fait; Newton eſt véritablement le premier qui ait dit, qu'en Phyſique il ne falloit admettre rien d'hypothétique, & ne raiſonner que par expériences, en emploiant les mathématiques pour aller plus loin & marcher plus ſurement.

Ces remarques du Journaliſte ſur la ſeule Préface du Livre, ſont comprendre de quelle façon il parle de l'Ouvrage même; mais comme tout ce qu'il en dit ſe réduit aux objections qu'on fait ordinairement aux Newtoniens, & qui ont été réfutées ſi ſouvent, je me diſpenſerai de les rapporter ici. Je vois par les papiers de Mr. 's Graveſande qu'il avoit formé le deſſein de répondre à cet Extrait: mais vraiſemblablement, ennemi de la diſpute comme il l'étoit, il a refléchi que des traits, qui portoient ſi fort à faux, ne méritoient pas d'être repouſſés; au moins je n'ai pu trouver nulle part cette réponſe imprimée.

(*U*) *L'on verra avec plaiſir les remarques d'un très grand Mathématicien ſur ſon titre.*] C'eſt Mr. Bernoulli, dont je veux parler. Mr. 's Graveſande lui ayant envoié la première édition de ſa Phyſique, avec ſon Eſſai ſur le Choc des Corps, & ſes Remarques ſur la Poſſibilité du mouvement perpétuel, cet illuſtre Sçavant lui écrivit fort au long ſon ſentiment ſur ces trois Ouvrages: ce qu'il lui dit des deux derniers auroit dû paroitre ci-deſſus dans les Remarques (*I*) & (*P*), où il en a été queſtion. Mais, je n'aurois pu l'inſérer à ſa véritable place ſans couper en pluſieurs parties la lettre, qu'on ſera bien aiſe de voir toute entière & de ſuite. Elle contient tant de remarques intéreſſantes, & ſi propres à caractériſer le grand homme qui l'a écrite, que je me flatte qu'on me ſaura gré de l'avoir rendue publique: tout ce qui eſt ſorti de ſa plume eſt intéreſſant, & inſtructif; d'ailleurs, comme elle roule ſur les Ouvrages de Mr. 's Graveſande, il eſt naturel d'en faire ici uſage. Je n'en retrancherai pas même la fin, quoi qu'étrangére à mon ſujet, mais trop curieuſe pour être ſupprimée. La voici, accompagnée de quelques petits éclairciſſemens.

,, Le beau préſent que vous m'avez
,, fait de votre Traité de Phyſique, mé-
,, rite bien que je vous écrive cette let-
,, tre, pour vous marquer le plaiſir que
,, cela m'a fait, & la reconnoiſſance que
,, je vous témoigne maintenant: C'eſt en-
,, core un ſurcroit d'obligation pour moi,
,, que vous ayez bien voulu ajouter à ce
,, préſent celui de vos deux petites Piè-
,, ces, qui portent pour titres, *Remar-*
,, *ques ſur la poſſibilité du Mouvement*
,, *perpétuel*, & *Eſſai d'une nouvelle*
,, *Théorie du Choc des Corps*; comme j'y
,, ai trouvé des choſes qui m'intéreſſent
,, en quelque façon, vous pouvez bien
,, vous imaginer, Monſieur, que j'ai lu
,, ces deux dernières Pièces avec beaucoup
,, d'attention; auſſi prendrai-je la liberté
,, ici de vous en parler, après que je
,, vous aurai dit quelques mots ſur votre
,, Traité de Phyſique, que vous nommez
,, *Introduction à la Philoſophie de Mr.*
,, *Newton:* Je vois bien que c'eſt un re-
,, cueil d'un grand nombre de belles ex-
,, périences, mais dont la plus part n'ap-
,, partiennent nullement à Mr. Newton,
,, & ne regardent pas plus ſa Philoſophie
,, en particulier, que celle de tout autre,
qui

„ qui veut qu'on joigne l'expérience à la
„ raison. Selon ce que vous dites dans
„ la Préface devant le premier Tome,
„ vous avez jugé inutile de mentionner
„ où se trouvent les expériences que
„ vous avez ramassées dans votre livre:
„ j'approuve ce dessein, car il importe
„ peu pour l'avancement des sciences de
„ sçavoir qui est le premier Auteur d'une
„ telle ou telle découverte, *unde habeas*
„ *quærit nemo, sed oportet habere:* Ce-
„ pendant cette loi que vous vous êtes
„ dictée en faisant votre livre, devroit
„ être observée généralement, par rapport
„ à Mr. Newton aussi bien que par rap-
„ port à d'autres, (*) de peur que votre
„ Lecteur ne commette quelque injusti-
„ ce, étant induit à attribuer à Mr. New-
„ ton quelque chose qui peut-être n'est
„ pas de lui; en voici un exemple: dans
„ l'Avis au Lecteur, devant le second
„ Tome, vous dites, que votre propos
„ étoit de donner dans ce Tome une
„ idée générale des principales découver-
„ tes de Physique de Mr. Newton; qui
„ est ce qui en lisant cela ne croiroit pas,
„ que tout ce qu'il va trouver est ou de
„ Mr. Newton ou du moins déduit de
„ sa Philosophie? (†) Mais, de grace, mon
„ cher Monsieur, dites moi, ma décou-
„ verte du Phosphore Mercuriel, quelle
„ obligation a-t-elle à Mr. Newton ou
„ à sa Philosophie? Cependant cette dé-
„ couverte est insérée dans votre livre,
„ Tome II. pag. 8. Exper. 10. avec celle
„ de la page suivante, que Mr. Haubs-
„ bée a tirée de la mienne; ainsi donc,
„ un Lecteur pas assez instruit de l'ori-
„ gine des découvertes sera porté à croi-
„ re sur votre foi, qu'on est redevable de
„ celle-ci à Mr. Newton, non sans pré-
„ judice du véritable Auteur. Ne pensez
„ pas Monsieur, que je dise cela pour me
„ plaindre de vous; c'est plutôt pour
„ vous avertir en Ami, de ce que d'au-
„ tres gens pourroient peut-être trouver
„ à redire dans la manière dont vous
„ avez usé en composant votre Ouvrage,
„ envers ceux qui pourroient prétendre
„ avoir quelque part aux inventions indé-
„ pendemment de Mr. Newton & de sa
„ Philosophie. En effet, je viens de
„ voir un Traité Allemand sur des Ex-
„ périences de Physique, où l'Auteur
„ qui est Mr. Wolf, Professeur en Ma-
„ thématiques à Halle en Saxe, faisant
„ mention de cette même expérience sur
„ la lumière du Mercure dans le vuide,
„ trouve mauvais que vous ne nommiez
„ pas les Auteurs dont vous avez em-
„ prunté leurs découvertes. *Mr. 's Gra-*
„ *vesande, dit-il, a exactement décrit*
„ *les Essais de cet Homme (Mr. Haubs-*
„ *bée), quoiqu'il ne lui ait pas fait*
„ *l'honneur, non plus qu'aux autres dont*
„ *il a ramassé les inventions, de les ci-*
„ *ter. Personne autre que le seul Mr.*
„ *Newton, a eu l'honneur d'être expri-*
„ *mé sur le titre & dans la Préface du*
„ *Livre, d'une manière plus que conve-*
„ *nable; quoiqu'il ne soit marqué nulle*
„ *part dans tout l'Ouvrage, ce qui est pro-*
„ *prement dû à Mr. Newton.* (**) Vous
„ voyez Monsieur, ce que l'on en pense
„ ailleurs. Mais outre cela, ne croyez
„ vous pas, que bien des Gens feront
„ cho-

(*) Mr. Bernoulli n'auroit pas fait ce reproche à Mr. 's Gravesande, s'il s'étoit rappellé ce que celui-ci dit dans sa Préface, c'est que son Ouvrage n'est intitulé *Introduction à la Philosophie Newtonienne*, que parce qu'il y suit la méthode de Newton, qui ne vouloit admettre aucune hypothèse.

(†) Dans la Préface de ce second Volume, l'Auteur fait principalement mention des découvertes de Newton sur les Couleurs, & sur le Systême planétaire. Je doute qu'en la lisant quelqu'un puisse s'imaginer que tout ce qu'il va trouver dans le Livre est tiré des Ouvrages de Newton.

(**) Quoique Mr. 's Gravesande crût avoir suffisamment prévenu ce reproche par les paroles que l'on a lues ci-dessus, pag xxxi. & ce qu'on vient de lire dans la premiére note qui est ici, cependant pour faire cesser de pareilles plaintes, il s'est déterminé à nommer, dans la Préface de sa troisième édition, ceux qui avoient quelque chose à revendiquer dans son Ouvrage, comme je l'ai dit, Remarque (S).

„ choqués, en lisant dans votre Préface „ devant le second Tome, ce qui suit? „ *quibus in fonte ipso, id est, in nostri* „ *Philosophi* (Newtoni) *scriptis, poterit* „ *ea haurire, ad quæ ne quidem præ-* „ *stantissimi Philosophi potuere attinge-* „ *re, & quæ, nisi cum Mathematicis* „ *diligentioribus, non communicavit* „ *Newtonus.* Je suis un de ceux qui esti- „ ment & admirent Mr. Newton autant „ qu'on le doit faire à cause de son ra- „ re mérite; je ne lui envie nullement „ les éloges qu'on lui donne, car, je „ lui en ai donné moi-même en toute „ occasion; mais je n'approuve pas qu'on „ l'encense aux dépens de tous les autres „ Mathématiciens & Philosophes, ni qu'on „ fonde ses louanges sur la ruine de la „ réputation de tant d'illustres hommes, „ qui ont si bien mérité de la Philosophie „ & des Mathématiques. Vous dites „ qu'on peut puiser dans les Ecrits de „ Mr. Newton, des choses auxquelles „ les plus excellents Philosophes n'ont ja- „ mais pu atteindre; pardon, Monsieur! „ c'est là le langage de tous les Anglois, „ qui font de Mr. Newton leur Idole „ au mépris de tous les Etrangers, des- „ quels ils ne sçauroient souffrir qu'on „ parle honorablement. Je me mets dans „ le rang des Géomètres fort médiocres „ & infiniment au dessous de Mr. New- „ ton; non obstant ma médiocrité, je le „ dis sans me vanter, j'ai rédressé Mr. „ Newton en bien des rencontres, où il „ s'étoit mépris, particuliérement dans ses „ *Principia Philosophiæ naturalis.* J'y „ ai résolu des problèmes & des difficul- „ tés que lui même selon son propre a- „ veu ne pouvoit pas résoudre, témoins „ quelques Lettres d'Angleterre que je „ puis produire: aussi n'en trouve-t-on „ rien dans son Livre, où naturellement „ il en devoit traiter; avec quelle justi- „ ce dites vous donc, que l'on puise „ dans Newton, ce à quoi personne au- „ tre ne sçauroit atteindre, comme si on „ ne sçavoit autre chose que ce qu'il „ nous a bien voulu communiquer? (*) „ Avant que de quitter ce Chapitre, je vai „ transcrire ici ce que j'ai trouvé dans „ les Actes de Leipsic de 1720., au „ Mois de Mai, où on fait la rélation „ du premier Tome de votre Ouvrage; „ sur la fin de la pag. 223., le Collec- „ teur des Actes finit sa rélation par une „ réflexion, que vous n'avez peut-être „ pas encore vue; la voici: *Non vide-* „ *tur Autor*, dit-il, *Historiæ Philoso-* „ *phiæ experimentalis satis esse peritus,* „ *cum pleraque eorum, quæ habet, ex-* „ *perimentorum ante Newtonum extra* „ *Angliam facta fuerint.* (†) *Methodus* „ *etiam probandi per experimenta propo-* „ *sitiones de motu geometrice demonstra-* „ *tas a Galilæo, Hugenio aliisque fuit* „ *usurpata.* (**) *Et de Machinis simpli-* „ *cibus olim apud nostros Experimenta dedit* „ *Jungenickel, homo quidem illiteratus,* „ *sed Mechanicæ non imperitus, in Cla-* „ *ve Machinarum. Imo jam Stevinus* „ *talia dedit in Staticis* .... Je crois „ que cette réflexion confirme assez que „ le public ne juge pas autrement que „ moi.

„ En commençant cette Lettre je ne „ pensois pas m'étendre si loin sur votre „ Ouvrage, qui est d'ailleurs véritable- „ ment beau & très digne de son Auteur. „ Je vai maintenant vous entretenir sur „ votre Essai sur le Choc des Corps. „ Avant toute chose je dois vous dire, „ que j'ai été bien édifié de voir que la „ vérité commence peu à peu de lever „ la tête; j'espère qu'il ne se passera plus „ si longtems qu'elle ne triomphe entière- „ ment, non seulement de l'aveuglement, „ mais de la raillerie & de la fierté des „ envieux qui la haïssent par cette seule „ raison, qu'elle n'a pas pris naissance „ chez

(*) Mr. Bernoulli n'a pas compris la pensée de Mr. 's Gravesande: celui-ci n'a vou-lu dire autre chose dans le passage cité, si non que personne avant Newton, n'avoit pû donner une explication des Couleurs & du Systême planétaire, comme il a fait.

(†) Mr. 's Gravesande ne dit nulle-part que les Expériences qu'il rapporte soient dues aux Anglois.

(**) Dans la Remarque précédente, vers la fin, j'ai repondu à cette difficulté.

„ chez eux : vous m'entendez bien de „ quelle vérité je parle, c'eſt celle dont „ vous venez de prendre la deffenſe, „ ſçavoir que la Force d'un Corps en „ mouvement eſt proportionnelle, non „ point à ſa ſimple viteſſe, ſelon le ſen„ timent commun, mais au quarré de ſa „ viteſſe, & que par conſéquent les For„ ces de deux Corps inégaux, ſont en „ raiſon des produits de leurs maſſes, „ par les quarrés de leurs viteſſes, c'eſt „ à dire, en raiſon compoſée de la ſim„ ple des maſſes & de la doublée des „ viteſſes. Enfin, Monſieur, vous êtes „ donc converti, c'en eſt aſſez ; mais „ d'ou vient, que ſi tard? les raiſons ſo„ lides n'étoient-elles pas ſuffiſantes pour „ vous convaincre? Vous falloit-il juſte„ ment les expériences pour vous ou„ vrir les yeux; les expériences, dis-je, „ faites par des boules qui tomboient de „ différentes hauteurs pour s'enfoncer „ dans de la terre glaiſe, comme vous „ l'expoſez pag. 21. & 22.; après Mon„ ſieur le M. Poleni, qui en place de „ terre glaiſe avoit pris du ſuif, ſe„ lon le récit qu'il en fait dans ſon „ Traité *de Caſtellis:* Mais les Anglois, „ dont il paroit que vous avez épouſé „ les ſentimens, & pris parti ſous leur „ drapeau, au moins en fait de Phyſi„ que ; les Anglois, dis-je, que diront „ ils, quand ils vous verront tombé dans „ une des héréſies de Mr. Leibnitz? (*) „ Car, chez eux c'eſt héréſie tout ce qui „ vient originairement de ce grand hom„ me; c'eſt dommage pour eux, que la „ première découverte de la véritable eſti„ mation des Forces, n'ait pas été faite „ par Mr. Newton, ils n'auroient pas „ manqué d'en tirer matière d'exalter la „ clairvoiance de leur Nation, & ſujet „ de triompher de l'aveuglement des au„ tres ; au lieu que préſentement c'eſt „ une erreur, c'eſt une réverie, c'eſt une „ abſurdité puérile, que de penſer avec „ Mr. Leibnitz que la Force des Corps „ ſoit proportionelle aux maſſes & aux „ quarrés des viteſſes ; & qu'ainſi la „ quantité des Forces ſoit bien différente „ de ce qu'on appelle communément „ *Quantité du Mouvement.* Je ne dis „ rien qui ne ſoit vrai au pied de la let„ tre: regardez, s'il vous plait l'exemple „ de Mr. Clarcke, avec quelle hauteur, „ avec quelle fierté ne traite-t-il pas „ Mr. Leibnitz? que d'expreſſions mé„ priſantes ne ſe ſert il pas pour turlupi„ ner Mr. Leibnitz, & ſa nouvelle doc„ trine touchant la Force des Corps? „ En voici un échantillon: Mr. Clarcke „ dans ſes notes à la cinquiéme Répli„ que à Mr. Leibnitz, laquelle ne fut „ écrite, je crois, qu'après la mort de „ celui-ci, à la page 328. de la premiè„ re édition, ſe ſert de ces termes qui „ ſentent un ſouverain mépris pour Mr. „ Leibnitz, *Ce qui a donné* (dit-il) *oc„ caſion à Mr. Leibnitz de ſe contre„ dire ſur cette matière, c'eſt qu'il a „ ſupputé, par une mépriſe tout à fait „ indigne d'un Philoſophe, la quantité „ de la Force impulſive dans un Corps „ qui monte*, &c. . . . *Mais Mr. Leib„ nitz ſe trompe fort en faiſant cette „ ſuppoſition.* pag. 332. *Mr. Leibnitz „ confond les cas où les tems ſont égaux, „ avec les cas où les tems ſont inégaux. „ Il confond particulièrement*, &c. pag. „ 332. *Ce qui eſt une contradiction ma„ nifeſte. La contradiction eſt la même*, „ &c. pag. 338. *Tant il eſt vrai que „ le ſentiment de Mr. Leibnitz ſur ce „ ſujet, eſt rempli d'abſurdités.* pag. 326. „ *Tout ce que Mr. Leibnitz dit ſur cet„ te matière paroit rempli de confuſion „ & de recours à un autre ſubterfuge, „ en diſant que le Mouvement & la „ Force ne ſont pas toujours les mêmes „ en quantité. Mais ceci eſt auſſi con„ traire à l'expérience.* Après ces re„ proches d'*erreurs* & de *mépriſes indi„ gnes d'un Philoſophe*, de *confuſion*, de „ *contradictions*, d'*abſurdités*, de *ſub„ terfuges*, & telles autres duretés qu'on „ ne diroit pas au plus vil des hommes „ ſans

(*) Cette demande auroit du prévenir les reproches précédens. Ms. 's Graveſande ne cherchoit que la verité: il a ſuivi Newton, quand il croioit qu'il l'avoit trouvée : mais là, où il a crû qu'il l'avoit manquée, il s'en eſt écarté.

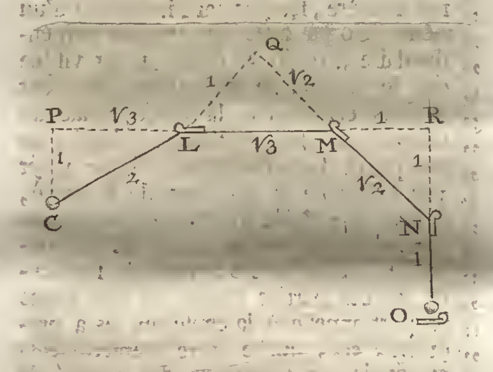
„ sans se départir de toute civilité, Mr. „ Clarcke se donnant un air de maitre, „ conclut enfin avec une autorité impé„ rieuse & décisive contre Mr. Leibnitz „ en ces termes, (pag. 342.) *la For„ ce*, dit-il, *dont nous parlons ici, est „ la Force active, impulsive, & rélati„ ve, qui est toujours proportionnée à la „ quantité du Mouvement rélatif.* Et „ de peur qu'on ne sente pas assez que „ c'est le nouveau dogme de Mr. Leib„ nitz, qu'il veut terrasser comme un au„ tre Hercule, il ajoute dans ses notes „ de la même page ces mots: *C'est à „ dire, proportionnée à la quantité de la „ matière & à la vitesse, & non (com„ me Mr. Leibnitz l'assure Act. Erud. „ ad Ann.* 1695. pag. 156.) *à la quan„ tité de la matière & au quarré de la „ vitesse.*

„ Hé bien, Monsieur, est-il possible „ que la vérité, toute vérité qu'elle est, „ soit le sujet de moquerie en Angletter„ re, par cela seul que Mr. Newton n'a „ pas encore trouvé à propos de la re„ connoitre & qu'apparemment il ne re„ connoitra jamais, parce que c'est Mr. „ Leibnitz qui l'a découverte le premier; „ cela suffit déjà, car en Angleterre on „ ne veut rien lui accorder en fait d'in„ vention! Mais vous qui avez enfin em„ brassé cette vérité, & qui avez comme „ il paroit un assez grand ascendant sur „ les Anglois, n'avez vous pas encore „ trouvé le moyen de les convertir aussi, „ & de leur faire gouter cette proposition „ que la Force active est comme le pro„ duit de la masse par le quarré de la „ vélocité, dont vous avez même donné „ une démonstration à la page 26. de „ votre Essai? Cette démonstration est à „ la vérité bonne & belle si on la lit avec „ attention: cependant un homme préve„ nu de préjugé pour l'opinion vulgaire, „ y trouvera je ne sai quoi d'obscur dans „ la manière d'expliquer l'action des pe„ tits ressorts pliés, qui en se débandant „ doivent communiquer successivement au „ corps P une certaine vitesse; sur tout, „ il ne verra pas clair ce que vous dites „ que pour ajouter toujours un nouveau „ petit dégré de vitesse, il faut qu'au„ tant de petits ressorts se débandent à „ la fois qu'il y a de petits dégrés déjà „ acquis de vitesse au corps P. Il pour„ ra croire, que tous les ressorts, e, e, „ e, e, &c. commencent à se débander „ tout à la fois, & non pas successive„ ment selon votre hypothèse, en sorte „ que le ressort E, qui est le plus pro„ che & contigu au corps P, ne sçauroit „ se débander qu'en même instant le plus „ éloigné *e* ne se débande aussi, quoique „ moins amplement que le premier, c'est „ à dire, que la quantité du débande„ ment de chaque ressort *e*, ou la perte „ de la pression qui se fait dans le mê„ me temps pendant qu'il se débande est „ proportionnelle au nombre des ressorts „ qui le suivent, y étant compris lui mê„ me. Quant au reste votre démonstra„ tion me plait très bien, quoique je „ doute que les opiniatres s'y rendront. „ Je ne sçai si vous avez jamais vu cel„ le que j'ai trouvée il y a près de 30. „ ans, & dont Mr. Poleni fait mention; „ je l'ai communiquée à Mr. Wolfius, „ qui l'a depuis publiée dans le premier „ Tome de ses Elémens de Mathémati„ que, pag. 594. Il semble que vous „ n'avez pas vu cette démonstration; „ car, si vous l'aviez vue vous vous y „ seriez rapporté, sans en chercher une „ autre; car, elle est entièrement géo„ metrique & convaincante, fondée sur „ la seule composition du Mouvement, „ par laquelle je fais voir que, quand „ un Corps a précisément autant de vi„ tesse qu'il faut pour bander un ressort „ contre lequel il heurte perpendiculaire„ ment, ce même Corps pourra avec le „ double de vitesse bander, non seule„ ment deux, mais quatre ressorts pareils „ au premier, & qu'avec le triple de vi„ tesse il bandera neuf de ces ressorts, „ & ainsi de suite. Puisque je me suis „ mis en train de vous écrire une lon„ gue Lettre, je veux bien vous la com„ muniquer, j'espère qu'elle vous fera „ plaisir, d'autant plus que c'est par cet„ te même démonstration que j'eus le „ bonheur il y a environ 23. ans, de „ convertir feu Mr. de Volder votre „ Prédecesseur, rigide Cartésien s'il en „ fut jamais, après que Mr. Leibnitz eut „ employé inutilement tous ses argumens

„ (dans

„ (dans un long commerce de Lettres
„ qu'il y avoit entre eux deux, & qui
„ passoit toujours par mes mains) pour
„ le convaincre de la vérité. Il seroit à
„ souhaiter que les Héritiers de Mr. de
„ Volder voulussent vous communiquer
„ ses papiers, vous y trouveriez une de
„ mes Lettres, datée je crois dans l'an-
„ née 1700. qui contient la démonstra-
„ tion dont je vous parle, & dont voici
„ le contenu. (*)

„ Concevez que le Corps C aille avec
„ la vitesse CL, choquer obliquement le
„ ressort L. Soit l'angle de l'obliquité
„ CLP de 30. degrés, afin que la per-
„ pendiculaire CP devienne $= \frac{1}{2}$ CL;
„ soit la vitesse CL comme 2.; soit aussi
„ la résistance du ressort L, précisément
„ telle que pour le plier il faille un degré
„ de vitesse dans le corps C, si ce corps
„ y heurtoit perpendiculairement. D'où
„ il suit, qu'après le Choc oblique du
„ Corps C avec la vitesse CL de 2 degrés,



„ laquelle est composée (en vertu de la
„ composition du mouvement) de CP
„ (1) & de PL (√3), le corps C
„ perdra entiérement le mouvement per-
„ pendiculaire par CP, & retiendra ce-
„ lui par PL; ainsi le corps C, après
„ avoir plié le premier ressort L, conti-
„ nuera à se mouvoir dans la direction
„ PLM avec la vitesse LM = PL =
„ √3: Concevez qu'au point M soit
„ placé un autre ressort semblable au pre-
„ mier, mais que l'angle de l'obliquité
„ LMQ soit tel, que la perpendiculaire
„ LQ soit = 1; Il est clair que le mou-
„ vement par LM étant composé des
„ deux collatéraux par LQ & par QM,
„ celui par LQ se consumera en pliant
„ le ressort M, & l'autre par QM sub-
„ sistera, dont la vitesse sera √2; donc
„ le corps C, après avoir plié le second
„ ressort M, continuera sur la direction
„ QMN avec la vitesse MN = QM =
„ √2; au point N imaginez vous le
„ troisième ressort, que le corps rencon-
„ tre sous l'angle demi-droit MNR, afin
„ que la perpendiculaire MR sur la situa-
„ tion du ressort devienne = 1; Il est
„ manifeste que le mouvement par MN,
„ composé de celui par MR, & de celui
„ par RN, employera le premier par
„ MR à plier le ressort N; & que l'au-
„ tre par RN continuera, dont la vitesse
„ sera encore = 1. Donc le corps C,
„ après avoir déjà plié 3 ressorts, con-
„ serve encore un degré de vitesse sur la
„ direction RNO; ainsi avec ce degré
„ de vitesse qui lui reste il pliera le qua-
„ trième ressort O, sur lequel je suppose
„ qu'il choque perpendiculairement; si
„ bien que le corps C, avec deux dé-
„ grés de vitesse a la force de plier qua-
„ tre ressorts, dont chacun demande un
„ degré de vitesse dans le corps C pour
„ être plié. Or, ces 4 ressorts pliés sont
„ l'effet total de la force du corps C mu
„ avec deux degrés de vitesse, parce que
„ toute cette vitesse se consume en les
„ pliant, & un seul ressort plié est l'effet
„ total de la force du même corps C
„ mu avec un degré de vitesse, parce
„ qu'on suppose que la résistance de cha-
„ que ressort est telle qu'elle peut détrui-
„ re précisément toute cette vitesse d'un
„ degré du corps C; puisque donc les
„ effets totaux sont comme les forces, il
„ faut que la force du corps C mu avec
„ deux degrés de vitesse, soit quatre fois
„ plus grande que la force du même
„ corps mu avec un degré de vitesse.

„ On demontrera de la même manière
„ qu'u-

(*) Cette même démonstration se trouve dans *J. Bernoulli Opera omnia*, Lausannæ & Genevæ, apud *M. M. Bousquet*, 1742. Tom. I. pag. 321.

„ qu'une vitesse triple, quadruple, quintuple, &c. fait avoir au corps C une force 9^{ple}, 16^{ple}, 25^{ple}, &c. parce qu'il pourra plier 9, 16, 25, &c. ressorts égaux, avant que de s'arrêter. Il n'y a qu'à donner à CL une obliquité convenable au premier ressort, pour que CP soit à CL comme 1 à 3, 4, 5. &c. & faire les autres obliquités selon que chaque cas exige. D'où il suit généralement que la Force d'un Corps est proportionnelle au quarré de sa vitesse, & non point à sa simple vitesse. c. q. f. d.

„ Que Mrs. les Anglois se roidissent tant qu'ils voudront contre la nouvelle doctrine de Mr. Leibnitz, qu'ils la sifflent, qu'ils s'en moquent avec un mépris affecté: Que Mr. Clarcke la traite de ridicule, d'absurde & d'indigne d'un Philosophe; je les défie tous, & chacun d'eux, de pouvoir répondre à ma démonstration, ni d'y avoir à redire. Ils feront peut-être des chicanes, (*) mais je suis assuré qu'ils ne produiront rien qui ne soit frivole, & dont la foiblesse ne saute aux yeux.

„ Vos Expériences, Monsieur, faites avec des boules, & de la terre glaise, ou avec du suif selon Mr. Poleni, confirment très bien ma démonstration; mais j'apprehende que Mr. Clarcke, (†) & les autres Adversaires, ne vous fassent des objections semblables à celles qu'ils ont fait à Mr. Leibnitz, contre les hauteurs verticales, auxquelles les Corps pesants peuvent monter avec différents dégrés de vitesses; disant que Mr. Leibnitz n'avoit pas raison de prendre ces hauteurs pour les mesures des Forces, parce qu'elles n'étoient pas parcourues dans le même tems ou en tems égaux: car ne croiez vous pas, Monsieur, qu'ils feront aussi ces sortes d'exceptions contre vos Expériences de la page 22? La première par exemple, où vous dites qu'*aiant laissé tomber la boule trois de la hauteur de neuf pouces, & la boule un de la hauteur de vingt-sept pouces, les enfoncemens dans la terre glaise ont été égaux entre eux*, ne prouve pas, diront-ils, que les forces de ces deux boules soient égales, parce que les enfoncemens, quoique égaux en eux mêmes, ne le sont pas dans les circonstances, vu que l'enfoncement de *la boule un* commence à se faire avec plus de vitesse, & s'achève en moins de temps, que l'enfoncement de *la boule trois*; ce qui selon eux suffira déjà pour croire, que ces enfoncemens égaux ne marquent pas une égalité de forces dans les Corps qui les ont faits: Mr. Poleni, à qui j'avois fait la même remontrance, a bien senti la difficulté, mais il n'y a pas répondu. Il n'en est pas de même des ressorts égaux à plier, dont je me sers dans ma démonstration, car, chacun d'eux venant à être plié de la même manière, sçavoir par l'impulsion d'un même Corps avec une vitesse perpendiculaire, toujours égale, il est visible que le nombre de ces ressorts pliés doit mesurer exactement la Force totale du Corps qui consume toute sa vitesse, en les pliant successivement. Pour juger par l'effet de la grandeur de la cause, il faut que l'effet soit homogène & uniforme en toutes les parties & en toutes les circonstances; alors la multitude de ces parties égales est sans doute proportionnelle à la cause qui les a produites, car, quelle autre manière peut-on avoir de comparer des causes de différente *intensité*, comme on l'appelle dans les Ecoles? Or, c'est ce que j'observe dans ma démonstration.

„ Je passe, Monsieur, à vos Remarques sur la possibilité du Mouvement perpétuel, faites à l'occasion de la Machine de Cassel, dont vous dites que vous avez examiné les effets. Il y a déjà plusieurs années que l'on m'a écrit

„ d'Al-

(*) Mr. Bernoulli a prédit juste. Voiez ce que *J. Eames* a écrit contre cette démonstration dans les Transactions Philosophiques pour l'année 1726., n. 396. pag. 188.

(†) Encore à cet égard la prédiction de Mr. Bernoulli a été accomplie, comme nous l'avons vu ci-dessus, Remarque (*I*).

„ d'Allemagne des merveilles de cette „ Machine; on m'en a même communiqué la figure extérieure, qui fait voir „ que c'eſt une Roue garnie d'une eſpéce de pendule, qui doit égaler le mouvement. Mr. Orfiré, c'eſt le nom de „ l'Inventeur, l'a fait voir d'abord à Leipſic, & en quelques autres Places de „ l'Allemagne: on m'aſſure préſentement „ qu'il en a communiqué le ſécret, ſous „ la foi du ſilence, à Mr. le Landgrave „ de Heſſe, en lui faiſant voir la ſtructure intérieure de la Roue: & que là „ deſſus S. A. S. doit avoir dit à ſes „ Miniſtres, qu'elle trouvoit que cette „ Machine eſt un véritable Mobile perpétuel, & encore ſi ſimple & ſi aiſé „ qu'elle étoit étonnée, que perſonne „ avant Mr. Orfiré n'ait pu réuſſir à trouver quelque choſe de ſemblable. Pour „ moi, je ne ſçai ce que j'en dois croire: au moins il me ſemble que le Mouvement perpétuel, *purement artificiel*, „ eſt impoſſible (*); mon ſentiment eſt „ fondé ſur la Loi générale de la Statique, en vertu de laquelle il faut que „ le commun centre de gravité de toutes „ les parties d'une Machine qui ſont en „ mouvement, deſcende continuellement; „ car, dès qu'il ne pourra plus deſcendre, le mouvement s'arrêtera, à moins „ qu'on ne le remonte comme on le pratique dans les Horloges & en d'autres „ Automates. Je vois que vous êtes d'un „ ſentiment contraire; vous donnez pour „ raiſon, pag. 18., que les loix de la „ Nature nous ſont trop inconnues pour „ en démontrer l'impoſſibilité du Mouvement perpétuel. Mais, Monſieur, „ qu'eſt-il beſoin de connoitre toutes les „ loix? ſi une ſeule m'eſt connue, laquelle me dicte clairement, qu'une telle ou telle choſe eſt contradictoire, cela me ſuffit déjà pour en conclure l'impoſſibilité d'une telle choſe: quoi qu'il „ en ſoit du reſte des loix qui me ſont „ inconnues, étant aſſuré que les loix de „ la Nature ne ſe contrediſent ni ne ſe „ détruiſent pas l'une l'autre.

„ Ce que vous ajoutez, qu'*il y a dans „ la Nature des principes actifs, pour „ rétablir le mouvement qui ſe perd en „ tant de rencontres:* qu'*on découvre de „ tels principes dans toutes les petites „ parties dont les Corps ſont composés;* „ *&* qu'*on en voit des effets bien conſidérables dans les reſſorts, dans les „ fermentations, & dans une infinité „ d'autres occaſions;* qu'*il y auroit quelque témérité d'aſſurer qu'il ſoit contradictoire de mettre à profit ces principes:* tout cela, je vous avoue, prouve bien que le Mouvement perpétuel, „ entant qu'il eſt produit, ou du moins „ aidé, par un mouvement extérieur, „ établi dans la nature des choſes, n'eſt „ pas abſolument impoſſible; au contraire, on en voit l'exiſtence, tels ſont, „ par exemple, les Mouvemens des „ Eaux, des Rivières, & de la Mer, „ celui de la matière magnétique, & une „ infinité d'autres ſemblables. Mais ſouvenez vous, Monſieur, de la définition „ que vous donnez pag. 4., de ce qu'on „ appelle en Méchanique *Mouvement „ perpétuel:* Vous y dites que, *c'eſt une „ Machine dont le principe du Mouvement ne dépend d'aucun Agent étranger, & dont le Mouvement ne s'arrêteroit jamais, ſi les matériaux ne „ s'uſoient pas.* Or, je vous demande, „ ſi ces ſortes de principes actifs empruntés de la Nature, pour faire jouer une „ Machine, ne ſont pas des Agens „ étrangers, qui ne permettroient plus à „ cette Machine de porter le nom de „ *Mobile perpétuel*, purement artificiel, „ car ce ſeroit tout au plus un Mobile „ perpétuel mixte, c'eſt à dire où l'art „ & la nature concourent à en perpétuer „ le mouvement. Je ſuis en effet très „ perſuadé que la Machine de Caſſel n'eſt „ que de ce genre, y aiant peut-être „ dans l'intérieur des aimans ou certains res-

(*) Je ſuis ſurpris de ce que dit ici Mr. Bernoulli, lui, qui non ſeulement avoit affirmé que le Mouvement perpétuel, purement artificiel, eſt poſſible, mais qui même prétendoit avoir trouvé le moyen de l'exécuter. Voyez *J. Bernoulli Opera*, Tom. I., pag. 41. & ſuivantes.

„ ressorts, qui peuvent entretenir le mouvement imprimé à la Roue (*). Je crois même avoir découvert le moyen „ d'en faire une semblable; je souhaiterois seulement que quelque habile Ouvrier put exécuter mon projet, en ce cas je me fais fort de réussir. On me dit que Mr. Orfiré demande une récompense de cent mille écus pour la communication du secret; pour moi, je me contenterois de beaucoup moins.

„ Quant au reste, vous avez, Monsieur, très bien démontré, que le sentiment commun, quand on croit que la Force d'un Corps en mouvement est proportionnelle à sa vitesse, emporte nécessairement une augmentation de force, c'est à dire, le Mouvement perpétuel. Mais, c'est justement ce que Mr. Leibnitz a déjà démontré il y a fort long-tems, lorsqu'il étoit en dispute sur cela avec Mr. Papin & d'autres.

„ En voilà bien assez sur vos deux belles pièces: il est vrai que ce n'est pas tout; car elles ont donné occasion à plusieurs autres réflexions que je vous aurois aussi communiquées, si je n'avois eu peur de fatiguer votre patience par une Lettre qui est déjà si furieusement longue.

„ Je vous prie, Monsieur, de remercier de ma part, par occasion, Mr. Mac Laurin du présent qu'il m'a fait de son Livre. Je l'ai parcouru en hâte: mais il ne m'a pas été possible d'examiner le tout avec attention, ni de faire les calculs extrémement prolixes & embarassants que demande sa description des Lignes Courbes. Je me suis un peu plus attaché à la Section quatrième de la seconde partie de son Livre, parce que j'y ai trouvé des choses qui me regardent plus particuliérement, touchant les Courbes que décrivent des projectiles agités autour d'un centre, vers lequel ils sont poussés ou attirés par de certaines forces, qu'on nomme Centrales ou Centripétes. Il a daigné prendre de moi en plusieurs endroits ce que j'ai publié autrefois, sans qu'il ait fait semblant de rien. Par exemple, presque tout ce qu'il y a sur la Spirale Hyperbolique se trouve dans mon écrit, que je fis insérer dans les Actes de Leipsic de 1713. J'ai le premier enseigné la véritable manière de supputer la loi de la résistance & de la densité des milieux résistants, par rapport à la Force centrale, pour que le projectile décrive une Courbe donnée; car tout ce que Mr. Newton avoit écrit sur cette matière dans la première édition de ses Principes Philosophiques étoit fautif, aussi a-t-il reconnu mes corrections, & les a suivies dans la seconde édition: mais Mr. M. Laurin nous veut assurer qu'il a trouvé mon Théorème général quelques années avant qu'il ait vu mon Traité qui le contient, & qui est publié dans les Mémoires de l'Académie de Paris; comme s'il n'avoit pas pu voir ce Théorème dans les dits Actes de 1713, où il se trouve aussi, & lesquels Actes il avoit nécessairement vu lorsqu'il composoit son Livre, puisqu'il en a emprunté, comme je vous l'ai déjà dit: il est aussi plaisant que pour exténuer ma Découverte il tache d'insinuer, qu'il étoit facile d'y parvenir par le moyen de quelques propositions de Mr. Newton, quoique cependant Mr. Newton lui même n'y put pas parvenir & ne put traiter cette matière sans erreur: certainement Mr. M. Laurin auroit mieux fait de n'en point parler que de trahir sa conscience par un motif de flatterie pour Mr. Newton, & de jalousie & d'envie qu'il porte à nous autres Etrangers, à l'exemple de plusieurs de ses Compatriotes: car que gagne-t-il par là, sinon que les honnêtes-gens en jugent peu favorablement; lisez seulement la Rélation de son Livre, qui se trouve dans les Actes de Leipsic du mois de Juin de cette année, où l'Auteur de la Rélation fait précisément la même

(*) Par la description donnée ci-dessus de la Machine d'Orffyreus, on est tenté de croire, que Mr. Bernoulli n'a pas conjecturé juste.

lui un Traité d'Algèbre (X), & une Introduction à la Philosophie

„ même remarque, disant que *Mr. M. Laurin s'est servi de mon Théorême, mais qu'avec cela il a eu soin de donner à connoitre qu'il l'avoit trouvé quelques années avant que d'avoir vu mon Traité dans les Mémoires, de peur qu'on ne crut qu'il a appris quelque chose d'un Allemand, imitant en cela la coutume de quelques autres Anglois.* D'ailleurs, que pensez vous, Monsieur, de l'encens inoui que Mr. M. Laurin prodigue à Mr. Newton avec si grande profusion ? Selon lui c'est le seul Mr. Newton qui ait élévé les sciences à leur faîte de dignité & de splendeur; c'est lui seul qui a trouvé un nombre infini de vérités très abstruses de la Philosophie naturelle; *nec cujusquam vestigiis insistens, nec a quoquam in posterum æquandus.* Selon Mr. M. Laurin, (car c'est le sens naturel de ses expressions) personne n'a rien contribué à l'avancement de la Géométrie & de la Philosophie naturelle; on en est redevable à Mr. Newton & au seul Mr. Newton. Il dit aussi quelque part que les progrès de ce siécle dans la géométrie sont si grands & si subits, qu'ils feront l'étonnement des siécles à venir, à moins que chaque siécle n'ait son Newton, comme si l'unique Mr. Newton nous avoit donné tous ces progrès, & qu'il fut le seul capable de les comprendre sans étonnement. Je vous ai déjà dit, Monsieur, que j'estime Mr. Newton & son rare mérite; je l'estime, dis-je, comme un des plus grands génies de notre siécle, mais je vous avoue franchement que je plains sa foiblesse, il voit que les siens l'adorent, qu'ils l'encensent presque comme un Dieu, qu'ils l'élévent au dessus du sort des mortels; il voit toutes ces louanges excessives qu'on lui donne avec des marques de dédain & de mépris pour tout le reste des Géomètres & des Philosophes; il voit ces basses flatteries, il les goute, & bien plus, il les approuve, il les autorise publiquement; car, je vous prie, la permission positive qu'il donne par son *Imprimatur. Is. Newton, P. R. S.* (*), n'est-ce pas autant qu'une approbation publique de tout ce qu'il y a dans le Livre de Mr. M. Laurin, par conséquent, de cette pompeuse Dédicace farcie de ce que l'ame la plus flatteuse & la plus esclave peut inventer, pour s'acquérir les bonnes graces de son Maitre?" Je suis, &c. *Bâle* 31. *Oct.* 1722.

(X) *On a de lui un Traité d'Algèbre.*] Il fut imprimé à Leyde en 1727. chez Samuel Luchtmans, & on le trouvera ici à la page 89. de la première partie. Cet Ouvrage étoit destiné à servir de texte aux leçons que Mr. 's Gravesande donnoit sur l'Algèbre; ainsi ce ne sont que des Elémens, où il n'est pas question des Problèmes qui vont au dé-là de deux dimensions, & tout y est dit avec cette précision & cette briévété, qui doit se trouver dans un Livre fait pour être expliqué dans des Collèges; les raisons des opérations, dans la solution des Problèmes, y sont déduites des règles générales, avec beaucoup de clarté & de sagacité. Je crois qu'on peut le regarder comme le meilleur Cours d'Algèbre à suivre dans des Institutions particulières. On l'a, dit-on, traduit en François, mais comme je n'ai point vu cette traduction, je n'en puis rien dire. Mr. de Joncourt en a donné une traduction hollandoise, accompagnée de quelques notes:

(*) Cet *Imprimatur*, accompagné de la signature *Is. Newton*, n'est pas une permission de Mr *Newton*; mais l'Approbation de la Société Royale, qu'il a signée en sa qualité de Président. c'est ce que veulent dire les lettres *P. R. S.*

tes : mais elle paroit avoir été faite un peu à la hâte.

Le premier des deux Traités, qui y ſont joints, eſt un Eſſai de Commentaire ſur l'Arithmétique de Newton ; Ouvrage, qui contient une infinité d'excellentes choſes, mais dites d'une façon ſi abrégée, qu'elles ne peuvent preſque être entendues, que par les Mathématiciens du premier rang. Mr. 's Graveſande ſouhaitoit que ce Livre fut mis à la portée des Commençans. Il ne pouvoit l'être qu'à l'aide d'un bon commentaire. Pour engager quelqu'habile Mathématicien, à en entreprendre un, il donna cet Eſſai, dans lequel il éclaircit deux paſſages de Newton, qui ſans être des plus difficiles, ont cependant beſoin d'être rendus plus intelligibles pour la pluſpart des Lecteurs. Dans le premier il s'agit de la Méthode de trouver les Diviſeurs, & dans le ſecond de l'Extraction de la Racine d'un Binome.

L'invitation addreſſée dans cet Eſſai aux Mathématiciens, de travailler ſur l'Arithmétique de Newton, ne fut pas tout à fait inutile. Mr. Caſtillon, ci-devant Profeſſeur en Mathématiques à Utrecht, à préſent chargé de la même fonction à Berlin, entreprit de faire un Commentaire ſur ce Livre ; voici le plan qu'il y avoit ſuivi, & qu'il communiqua à Mr. 's Graveſande, dans une Lettre, datée du 1. Juin 1740. „ Le but que je me ſuis „ propoſé, eſt de mettre ce Livre à la „ portée des Commençans, & de faire „ en même tems quelque choſe qui puiſ„ ſe être utile à ceux, qui, ſans avoir „ une parfaite connoiſſance des Mathé„ matiques, ſont déjà d'une certaine for„ ce. Pour cela ; 1°. j'ai ſuppléé les „ calculs, les raiſonnemens, & les „ preuves, que Mr. Newton ſuppoſe, „ & qui ſouvent ſont aſſez difficiles. Ce„ pendant j'omets quelque choſe, ſur„ tout après la moitié de l'Ouvrage. Na„ turellement mes Lecteurs ne doivent „ pas alors trouver difficile ce qui l'étoit „ pour eux au commencement. 2°. J'ai „ démontré les propoſitions, que Mr. „ Newton ſuppoſe démontrées, & dont „ on ne trouve pas ailleurs les démon„ ſtrations, ou dont on ne les trouve „ pas aiſément. C'eſt ici, que j'ai fait „ uſage de ce que vous avez donné ſur „ ce ſujet, ſous le titre d'Eſſai d'un „ Commentaire, &c. Au reſte, je dé„ montre, lorſqu'il eſt poſſible, ces pro„ poſitions des deux manières différen„ tes, géométriquement, & algébrique„ ment ; la première méthode me ſem„ ble plus lumineuſe que la ſeconde, & „ celle-ci ne me ſemble pas à négliger „ dans un Livre, dans lequel on en„ ſeigne l'Algèbre. 3°. J'ai expliqué en „ peu de mots la nature des Courbes, „ qui réſultent de la ſolution des Pro„ blèmes de mon Auteur. 4°. J'ai auſſi „ expliqué brièvement les principes d'au„ tres ſciences, qui ſont néceſſaires pour „ entendre les Problèmes, qu'on trouve „ dans mon texte ; par exemple, les „ premiers principes de Méchanique, „ d'Optique, &c. 5°. J'ai tiré des pro„ poſitions de mon Auteur les Corollai„ res les plus importants, que j'ai cru „ qu'on en put tirer. 6°. Enfin j'ai don„ né la ſolution de quelques Problèmes, „ que Mr. Newton indique, & qu'il ne „ réſout pas. Quelques fois auſſi j'ai ré„ ſolu un Problème d'une manière diffé„ rente de celle de mon Auteur."

Mr. 's Graveſande approuva le plan, & exhorta Mr. Caſtillon à faire imprimer ſon Ouvrage ; mais diverſes fatalités l'en ont empêché longtems ; enfin, à la grande ſatisfaction de tous les Mathématiciens, il a paru en 1761. à Amſterdam, chez M. M. Rey, en deux volumes in 4°.

Le ſecond Traité que Mr. 's Graveſande a joint à ſon Algèbre, eſt une Methode nouvelle de déterminer la valeur y, par la quantité connue x dans une équation donnée : valeur qu'on exprime ordinairement par une ſuite indéterminée, en poſant $y = Ax^{n} + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r}$ &c. ; mais ſans expliquer comment on peut trouver les valeurs de n & de r, quoique ce ſoit en cela que conſiſte toute la difficulté. Ici Mr. 's Graveſande ſupplée à cette omiſſion.

phie (*Y*), qui l'a exposé à des accusations bien odieuses (*Z*). Sa mort

(*Y*) *Une Introduction à la Philosophie.*] Dès que Mr. 's Gravesande eut été nommé Professeur en Philosophie, il donna des Collèges sur la Logique & la Métaphysique, & comme il est plus naturel de suivre sa propre méthode, quand on est en état de s'en former une, que de s'astreindre à celle d'autrui, il travailla d'abord à un Abrégé de ces sciences, qu'il put mettre entre les mains de ses Auditeurs; & il le publia sous ce titre, *G. J. 's Gravesande Introductio ad Philosophiam; Metaphysicam & Logicam continens. Leidæ, apud J. & H. Verbeek*, 1736. *in* 8°. L'année suivante 1737., le prompt débit de la première édition obligea l'Auteur d'en donner une seconde, avec une addition de quelques pages, dont je parlerai tout à l'heure. La même année, ce Livre fut réimprimé à Venise, d'après la première édition, chez Jean Baptiste Pasquali, & cela avec la permission des Réformateurs de l'Etude de Padoue, qui attestent qu'ils n'y ont rien trouvé de contraire aux Dogmes de l'Eglise Catholique; ce qui suppose qu'ils ne se sont pas embarassés des conséquentes, qui découlent de plusieurs propositions qu'il renferme.

En même tems que Mr. 's Gravesande travailloit à sa seconde édition Latine, il reçut d'une main inconnue, une traduction Françoise de ce même Livre, qui lui parut assez bien faite pour mériter d'être imprimée: elle le fut donc chez les mêmes Libraires J. & H. Verbeek, en 1737. C'est celle par laquelle commence la seconde partie de ce Recueil.

Enfin, en 1756. j'ai donné une troisième Edition de cette même Introduction, & une quatrième en 1765., augmentées de quelques Chapitres dont je dirai un mot ci-dessous.

Comme le titre l'annonce, cet Ouvrage est divisé en deux Livres. Le premier comprend la Métaphysique, & l'autre la Logique. Cet ordre paroit d'abord assez extraordinaire. Une Introduction à la Philosophie doit-elle commencer par la Métaphysique? Science, qui suppose un esprit déjà cultivé par l'étude des autres parties de la Philosophie. Mais si nous considérons les choses en elles mêmes, nous trouverons que cet ordre est le plus naturel, comme l'ont fort bien remarqué les Auteurs du Journal des Sçavans; il faut connoitre l'Ame & ses Facultés, par l'étude d'une saine Métaphysique, avant que de penser à en diriger les Opérations, par les préceptes de la Logique. Cependant ce même ordre n'est pas celui qu'il faut suivre en enseignant les jeunes gens; les discussions métaphysiques, sont trop au-dessus de leur portée: aussi Mr. 's Gravesande commençoit-il ses Collèges par l'éxplicarion de la Logique; après quoi il passoit à la Métaphysique.

Le Cours qu'il a donné de cette dernière science, est divisé en deux parties; dans la première il traite de l'Etre en général, & dans la seconde de l'Ame humaine. Dans ce qu'il dit de l'Etre, il a retranché les inutilités dont les Traités d'Ontologie sont surchargés. On y trouve les propriétés, communes à toutes les choses qui éxistent, exposées avec autant de clarté que de briéveté, & les questions agitées par d'autres, y sont présentées sous une face nouvelle. Les Chapitres où il est parlé *du Possible & de l'Impossible; du Nécessaire & du Contingent; de la Cause & de l'Effet*, méritent une attention particulière, & ce dernier surtout, qui est comme la clef du Systême de l'Auteur sur la Liberté.

La seconde partie commence par un Chapitre, où il est traité de l'Intelligence en général; ce qui est dit de la Volonté, du Bonheur & du Malheur, est ce qui a jamais été avancé là-dessus de plus philosophique. Dans les trois Chapitres suivants Mr. 's Gravesande expose son sentiment sur la Liberté, fait voir combien il diffère de celui qui admet le fatalisme, & enfin répond aux difficultés, par lesquelles on a tâché, & l'on tâche encore, de rendre ce sentiment odieux. Il définit la Liberté, *la faculté de faire ce qu'on veut, quelle que soit la déter-*mi-

mination de la Volonté. Mais il n'y a point de détermination sans cause. Pourquoi donc la Volonté prend-elle un parti plutôt qu'un autre? Il ne suffit pas de dire que l'Ame a la faculté de se déterminer; cette faculté, dont l'existence est réelle, n'est pas plus portée d'un côté que d'un autre; dans la détermination cette faculté, qui auparavant ne panchoit vers aucun parti, se détermine pour l'un, à l'exclusion de l'autre; il lui arrive donc un changement, qui doit avoir une cause, & qu'elle est cette cause? L'Auteur répond que toute détermination a pour cause la persuasion de l'Ame; persuasion qui n'est point produite par des causes méchaniques; mais par des raisons & des motifs. Ainsi la cause des déterminations n'est point physique, mais morale. Elle agit sur l'intelligence même, de manière qu'un homme n'est jamais poussé à agir, que par des moyens propres à le persuader, & qu'il y a toujours dans ses déterminations une nécessité morale. Voilà pourquoi il faut des loix, & que les peines & les récompenses sont nécessaires; l'espérance & la crainte agissant immédiatement sur l'Ingelligence. Mr. 's Gravesande rejette donc la Liberté d'indifférence, qui suppose que l'homme peut déterminer sa volonté entre plusieurs objets, en mettant à part toutes les raisons, & toutes les causes, qui pourroient le porter à préférer un des objets aux autres. Dire, je veux parce que je veux; telle chose me plait parce qu'elle me plait; c'est tenir un langage qui ne signifie rien, ou qui doit être entendu ainsi. Telle chose me plait à cause de quelque raison qui me la fait paroitre préférable à telle autre. Sans cela le néant produiroit un effet.

Il paroit par ce court exposé que le sentiment de Mr. 's Gravesande n'étoit autre chose que l'expression philosophique de celui de nos Théologiens Reformés; sentiment par conséquent, qu'il lui étoit très permis d'avoir dans un Pays protestant: cependant nous allons voir dans la Remarque suivante, qu'on l'a représenté dans ce même Pays avec les couleurs les plus noires.

Dans les Chapitres suivants, l'Auteur démontre que l'Ame est immatérielle, prouve qu'elle ne consiste point dans la pensée, & ne décide rien sur la question qu'on fait, savoir si elle pense toujours. Il passe ensuite aux effets de son union avec le Corps, à la manière dont cette union a lieu, & à l'examen des diverses opinions, par lesquelles on a tâché de l'expliquer: enfin, il finit par un Chapitre qui traite de l'origine des idées; en exposant les différents sentimens sur cette matière, il ne se déclare pour aucun; c'est sa méthode ordinaire quand il s'agit de questions sur lesquelles on ne peut former que des conjectures; ainsi c'est avec bien de la raison que l'on a dit de lui, *les grands esprits font des Systêmes, mais les bons esprits n'y croient point.* (*)

J'ai dit ci-dessus que dans la troisième & quatrième édition de cette Introduction j'avois ajouté trois Chapitres. Ils suivent ceux que je viens d'indiquer. Le premier traite de Dieu, & de ses Attributs, qui y sont tous déduits de l'existence par soi-même. Dans le second il est question du plan que Dieu a suivi dans la création de l'Univers. J'y soutiens que l'Etre, souverainement bon, & dont la sagesse & la puissance sont sans bornes, n'a pu créer que le meilleur de tous les Mondes possibles; & dans le troisième j'établis l'unité de Dieu. L'existence de Dieu & ses Attributs sont sans contredit un des objets de la Méthaphysique, cependant Mr. 's Gravesande n'en avoit rien dit dans la sienne, parce qu'il se proposoit de traiter cette importante matière dans un autre Ouvrage, dont je parlerai dans la suite; la mort l'ayant prévenu avant qu'il put exécuter ce dessein; j'ai cru devoir faire cette addition à un Livre, que j'explique toutes les années dans le cours de nos exercices Académiques. Mais, comme j'en ai averti dans la Préface, j'ai puisé tout ce que j'ai dit, dans un Manuscrit de l'Auteur même sur la Métaphysique: Manuscrit pré-

(*) *Voiez* le Journal des Sçavans, mois de Septembre de 1738. pag. 80. *de l'édition d'Amsterdam.*

précieux par la clarté, la solidité, & l'importance des choses qu'il renferme. J'ai retranché ici ces trois Chapitres, parce qu'on y trouvera ce Traité de Métaphysique dont ils ont été tirés.

Le second Livre qui roule sur la Logique, est distingué en trois parties. Dans la première, l'Auteur traite des Idées & des Jugemens. Les dix premiers Chapitres, où il est question des Idées & des Propositions, ne renferment que ce qu'on trouve dans les autres Logiques; mais les dix suivants qui traitent du Vrai & du Faux, de l'Evidence, tant mathématique, que morale, de la Probabilité simple & composée, & du Jugement composé ou Raisonnement, sont remplis de choses nouvelles, & très intéressantes: tout y est marqué au coin d'un génie véritablement philosophique.

La seconde partie développe les causes de nos erreurs; on y trouve à chaque page des réflexions, qui prouvent que leur Auteur connoissoit bien l'esprit & le cœur humain.

Enfin, la troisième partie traite de la Méthode. Les règles qu'il faut suivre, tant dans l'Analyse que dans la Synthèse, y sont exposées avec beaucoup de justesse: mais, ce qui rend cette partie surtout recommandable, ce sont deux Chapitres, dans le premier desquels l'Auteur explique l'usage qu'on doit faire des Hypothèses, & dans le second il applique avec beaucoup de sagacité les règles, qu'il a données dans le précédent, à l'art de déchiffrer. Quiconque lira attentivement tout cet Ouvrage, ne pourra que souscrire à ce qu'en ont dit les Auteurs du Journal des Sçavans, qui terminent l'extrait qu'ils en ont donné par cette phrase, *Nous ne connoissons point de meilleure Introduction à la Philosophie.*

A la fin du Livre, Mr. 's Gravesande a ajouté un *Appendix* de l'Art d'argumenter, où il explique en peu de mots, mais très clairement, toutes les règles des Syllogismes. Il n'a pas voulu parler dans le corps de sa Logique, de cet Art Syllogistique, quoiqu'il le regardât comme une invention très ingénieuse, où tout ce qui a rapport aux règles du raisonnement, est démontré suivant la méthode des Mathématiciens: mais il ne le jugeoit pas nécessaire pour la découverte de la vérité: il croyoit qu'on pouvoit s'en passer. Cependant, comme il est en usage dans les disputes académiques, il ne pouvoit pas se dispenser de l'expliquer. C'est ce qui l'a engagé à ajouter ce Traité à sa Logique. Il semble que cette raison l'auroit dû mettre à l'abri de toute critique; mais cela n'arriva pas.

Un Ecrivain, dont la plume s'exerçoit sur toutes sortes de sujets, s'avisa de le tourner en ridicule à l'occasion de ce Traité. Voici ce qu'il en dit (*): „ Mr. „ 's Gravesande dans son Introduction à „ la Logique, a placé un Traité sur „ l'Argumentation, ou l'Art de raisonner „ par Syllogisme. Il s'efforce d'apprendre aux hommes à parler & à penser „ d'une manière juste & précise, par un „ certain arrangement des lettres de l'alphabet. Un critique moderne s'est moqué de cette méthode si extraordinaire. *Je pense*, dit-il, *que ces Préceptes figureroient fort bien dans le* „ Bourgeois Gentil-homme; *il me semble ouïr Mr. Jourdain AEE, AOO,* „ *OAO, EIO, EAE, EAO. Que cela est beau! Que cela est sçavant!* „ *La façon d'apprendre aux hommes à raisonner, est bien sublime, & bien* „ *élevée! EAO, EAE, &c.*" Après avoir donné une si juste idée de l'Art d'argumenter, l'Auteur est assez équitable pour dire, que Mr. 's Gravesande n'en est pas l'inventeur, mais qu'Aristote s'en étoit servi plus de deux-mille ans auparavant: „ Ainsi" ajoute-t-il agréablement „ il peut-être appellé, renouvellé des Grecs, . . . comme le jeu „ de l'Oye." On comprend aisément quelle fut la réponse de Mr. 's Gravesande à une critique aussi sensée que celle-là;

(*) Voyez la Philosophie du Bon-Sens, ou Réflexions Philosophiques sur l'Incertitude des Connoissances humaines à l'usage des Cavaliers & du Beau-Sexe, par Mr. le Marquis D'Argens, *à la Haye, chez* P. Paupie, 1740., *Tom.* I. *pag.* 263. & suivantes.

là; ce fut le silence. Je me rappelle que je lui montrai le premier ce beau passage, que le hazard m'avoit fait découvrir en feuilletant le Livre où il étoit. Quand il l'eut lu, il me dit en riant : *cet homme veut me tourner en ridicule: il faut lui en laisser le plaisir tout entier.*

(Z) *Son Introduction à la Philosophie l'a exposé à des accusations bien odieuses.*] On ne l'a pas accusé de moins que de Spinosisme, & d'avoir des principes, qui anéantissoient toute distinction entre la vertu & le vice ; & cela à cause de son sentiment sur la Liberté. Tous les partisans de la Liberté d'indifférence furent étonnés de voir un Philosophe penser autrement qu'eux sur cette importante matière: ils sont en possession, je ne sai par quelle raison, de croire, que pour cela il faut renoncer au bon-sens. Ils murmurérent donc en voiant l'*Introduction à la Philosophie*; mais leurs murmurent furent cependant renfermés dans les bornes de la décence, & ils n'éclatérent dans aucun de leurs Ouvrages imprimés.

Un seul Négociant Anglois, homme d'esprit, & amateur des sciences, autant qu'on peut l'être sans avoir beaucoup de tems à y donner, s'avisa de mettre la main à la plume, pour réfuter Mr. 's Gravesande : peu au fait des discussions métaphysiques, il prit un ton imposant, pour suppléer à ce qui lui manquoit de ce côté-là. Il fit imprimer une Brochure sous ce titre : *Lettre à Mr. G. J. 's Gravesande, Professeur en Philosophie à Leyde, sur son Introduction à la Philosophie, & particuliérement sur la Nature de la Liberté, à Amsterdam, chez J. F. Bernard*, 1736. *in* 8°. Il n'y est question que de la Liberté, quoique le titre semble promettre quelque chose de plus. Dans cette Lettre l'Auteur suppose un peu gratuitement qu'on pourroit le soupçonner d'écrire contre Mr. 's Gravesande par une jalousie de métier; pour se disculper il remarque (*) poliment qu'*il ne s'en suit pas que* celui-ci *soit Maître parfait en Métaphysique, parce qu'il entend parfaitement la Philosophie Newtonienne.* Sa profession étoit apparemment bien plus propre à le rendre Métaphysicien, que le genre d'étude auquel s'étoit appliqué celui contre qui il écrivoit! Après un tel début, on ne sera pas surpris de le voir représenter le sentiment de Mr. 's Gravesande, avec les plus noires couleurs: la nécessité que celui-ci admettoit dans les actions qui dependoient de la Liberté, ouvre suivant lui la porte au vice : écoutons le parler (†). „ La „ doctrine de la *Nécessité*, dans le sens „ que *Spinoza* & *Hobbes* l'entendent, ne „ peut que conduire les hommes au vi- „ ce, & c'est aussi, comme je le crains, „ à quoi tendent vos notions, pour ne „ pas dire qu'elles sont les mêmes que „ les leurs." Dans un autre endroit il dit (**): „ C'est dommage qu'une In- „ troduction à la Philosophie, & des In- „ stitutions pour la jeunesse donnent oc- „ casion à la propagation de certaines „ idées dangéreuses dans le monde, sur- „ tout d'une morale relachée, & je crains „ bien que de tels principes n'y condui- „ sent." Il est humiliant pour l'humanité de voir un homme, tel que Mr. 's Gravesande, en butte à de pareils traits, pour avoir soutenu le sentiment reçu dans le pays, où l'on ôsoit écrire contre lui avec cet acharnement : car, quelle étoit la cause de pareilles imputations? Il avoit dit que l'homme est libre, quand il a le pouvoir physique de faire ce qu'il veut, quelle que soit la détermination de sa volonté ; que quand il est empèché d'agir contre sa volonté, il est contraint, & par là même sans liberté ; que quand il veut, c'est parce qu'il est déterminé par ses idées, & que ce qu'il choisit, lui paroit préferable au parti qu'il rejette, sans quoi sa détermination seroit un effet sans cause ; & qu'enfin, comme il n'est pas en son pouvoir de ne point juger préferable ce qui lui paroit tel, il y a toujours dans ses déterminations une nécessité morale,

(*) Lettre à Mr. 's Gravesande, *pag.* 5.
(†) *Là même*, *pag.* 7.
(**) *Là même*, *pag.* 69.

rale, c'est à dire, qu'il est contradictoire qu'il ne choisisse pas le parti, qu'il juge devoir être choisi (*). Est-ce là penser comme Spinoza, qui n'admettoit aucun principe intérieur de nos actions; qui prétendoit que l'homme est tellement poussé à agir par des causes extérieures & méchaniques, qu'il lui est impossible d'éviter le mal qu'il prévoit, & que sa persuasion ne contribue en rien à sa détermination? Ceux qui confondent des sentimens si opposés, sur-tout après ce que Mr. 's Gravesande avoit dit dans le Chapitre XI., de sa Métaphysique, uniquement destiné à faire voir l'absurdité du Fatalisme, méritent-ils quelque réponse? Aussi celui-ci ne crut-il pas devoir en faire aucune à l'Auteut de la lettre; il se contenta d'insérer dans un Journal (†), un Extrait de son Introduction, où il ne fit qu'exposer de suite ses idées, dans les mêmes termes, dont il s'étoit servi dans son Ouvrage, persuadé que cela suffisoit pour réfuter son Adversaire, sans qu'il fut nécessaire qu'il entrât dans aucune controverse. Pour se justifier de l'imputation odieuse d'enseigner une doctrine qui tendoit au renversement des mœurs, & anéantissoit toute distinction entre la vertu & le vice, il inséra dans la seconde édition de son Livre trois paragraphes, ce sont les 170, 171, & 172., où il examine quelles sont les conditions requises, pour qu'une action soit vertueuse, & il démontre que ce n'est que dans son systême qu'elles se trouvent, & que c'est celui de la Liberté d'indifférence qui exclut tout ce qui peut porter avec soi le caractère de vertu.

Ce ne furent pas seulement les Partisans du Franc-Arbitre, qui s'élevèrent contre Mr. 's Gravesande; il y eut quelques Théologiens Reformés, qui oubliant leurs propres principes, furent révoltés de cette nécessité qu'il introduisoit dans les actions qui dépendent de la Liberté, & le taxèrent aussi sourdement de Spinosisme. Je dis qu'ils oublioient leurs propres principes, parce que Mr. 's Gravesande n'avoit rien avancé que ce qui avoit été approuvé par le Synode de Dordrecht, qui avoit bien expressément reconnu dans l'homme une sorte de nécessité, très compatible avec la Liberté. Pour prouver la chose, je citerai ici deux passages, où l'on verra que l'idée que le Synode a donnée de la Liberté est précisément celle que Mr. 's Gravesande s'en formoit. *Liberum arbitrium secundum naturam & essentiam suam consideratum, est Animæ rationalis facultas seu potentia, deliberata electione, absque omni coactione proprio & spontaneo motu, volendi aut nolendi, quodcunque Intellectus eligendum aut respuendum judicaverit. Hoc modo sumtum Liberum Arbitrium, Homini in quovis statu competit, nec vel in statu corruptionis servitute &* NECESSITATE *peccandi evertitur, nec in altera cœlesti futura vita bene agendi* NECESSITATE *& immutabilitate evertetur* (**). Dans ces paroles le Synode reconnoit que la Liberté est la faculté de vouloir: mais quoi? ce que l'entendement, qui juge toujours nécessairement en conséquence de ses idées, prononce devoir être choisi. De-là nait cette nécessité qui ne détruit point la Liberté dans l'homme corrompu, non plus que dans celui qui est sanctifié. Ailleurs le Synode s'exprime plus clairement sur la définition de la Liberté. Les Remonstrants en avoient donné celle-ci:

Libertas voluntatis humanæ nihil est aliud quam indeterminatio & indifferentia ad actus oppositos, quæ non potest consistere cum necessitate ad unum determinante, neque cum necessitate illa quæ dicitur pendere a decreto Dei. Le Synode leur opposa celle-ci: *Voluntas Hominis . . . semper manet libera, etiam quando ad unum determinatur. Neque hanc*

(*) *Voiez l'*Introduction à la Philosophie, *Chapitres X., XI., & XII. de la première partie.*

(†) *Voiez la* Bibliothèque Françoise: *imprimée à Amsterdam, chez du Sauzet, Tom. XXV. pag. 76.*

(**) Acta Synodi Nationalis Dordrechti habitæ, *Hanoviæ* 1620. *pag.* 694.

mort nous a privé d'un Cours de Morale, qu'il avoit dessein de publier (*AA*). Il

hanc Libertatem tollit necessitas ista, quæ pendet a decreto Dei: ensuite expliquant plus amplement sa pensée, voici comment il s'exprima: *Sic Libertas est comparata, ut non pugnet cum omni necessitate & determinatione. Pugnat equidem cum determinatione violenta, sive cum necessitate coactionis, sed optime convenit cum necessitate immutabilitatis, infallibilitatis, & dependentiæ. Nam Deus necessario odit peccata . . . . & eadem odit libere, id est, non coacte. Sic beati Spiritus in cœlis majori Libertate sunt prædití, quam nos in hac vita. Illi autem necessario tantum justa & recta volunt . . . . & hæc est maxima voluntatis perfectio, ferri duntaxat in bonum* (*). Que l'on compare ces expressions avec celles qu'a emploié Mr. 's Gravesande, & l'on verra qu'elles renferment précisément la même chose; & celui-ci a déclaré positivement qu'il n'y donnoit pas un autre sens (†). Aussi se consoloit-il de l'odieux reproche de Spinosisme, qu'on lui faisoit si mal-à-propos, en réfléchissant que la doctrine qu'il défendoit avoit exposé les Eglises Reformées aux mêmes imputations, comme le Synode s'en est plaint, dans un passage qui suit le premier que nous avons rapporté ci-dessus. *Execramur itaque*, y est-il dit, *Manichæorum & Stoïcorum fatalem necessitatem, qua finxere ipsam etiam Hominis voluntatem, ad actus suos elicitos, qui sunt velle & nolle, necessitate quasi constringi & cogi. A quo errore Ecclesias Reformatas Orthodoxas alienas esse, certo nobis persuasum est, ita ut magnam iis injuriam fieri putemus dum Manichæismi & Stoïcismi a Fratribus Remonstrantibus insimulantur* (**). Qui ne voit que l'accusation de Stoïcisme, dont il est fait-là mention, auroit été changée en celle de Spinosisme, si Spinoza avoit écrit avant l'assemblée du Synode!

(*AA*) *Il avoit dessein de publier un Cours de Morale.*] Appellé à donner des leçons de Morale, Mr. 's Gravesande fut embarassé sur le choix de l'Auteur, qu'il expliqueroit à ses Auditeurs. Il n'en trouvoit aucun qui fut assez méthodique. Plusieurs de ceux qui ont traité cette Science, expliquent bien la nature de nos devoirs, mais il ne lui paroissoit pas qu'ils fissent voir assez clairement leur liaison, avec les principes d'où ils dérivent: il étoit déterminé à suppléer à ce défaut, & à mettre entre les mains de ses Etudians un Abrégé de Morale, dans lequel il déduiroit tous nos devoirs d'un seul principe, dont personne ne pourroit contester la vérité; le voici. Tout Etre intelligent aime son bonheur, & travaille à l'avancer: c'est là l'unique mobile de toutes ses actions: ôtez lui ce motif, vous n'aurez plus rien qui puisse le déterminer à agir. En vain dira-t-on, qu'il y a certaines choses qu'il doit faire parce qu'elles sont convenables à sa nature, & propres à le perfectionner; car, s'il ne sent pas son bonheur augmenté en les faisant, pourquoi cherchera-t-il à faire ce qui est conforme au penchant naturel, qui est en lui, ou à se perfectionner? Mais, ce n'est pas un bonheur passager qu'il est porté à rechercher, c'est son bonheur total; c'est à dire qu'en faisant attention à la totalité de son existence, il recherchera ce qui peut contribuer à l'augmentation de la somme de bonheur dont il est susceptible. Tout ce qui conduit à cette augmentation de bonheur, est pour lui un devoir. Ainsi pour traiter la Morale de façon, qu'il ne soit pas possible qu'un homme se fasse illusion sur ce qu'elle prescrit, il faut examiner en quoi consiste la félicité totale de l'homme, &

(*) *Là même, pag.* 706.
(†) Bibliothèque Françoise, *Tom. XXV. pag.* 77.
(**) Acta Synodi Dordracenæ, *pag.* 695.

& quels sont les moyens propres à l'avancer. Là-dessus, Mr. 's Gravesande observoit que pour que nous soions heureux, il faut une certaine disposition du Corps & de l'Ame; de-là nos devoirs envers nous mêmes. Mais inutilement travaillerons-nous à acquérir cette disposition, il nous manquera toujours bien des choses pour parvenir au dégré de bonheur, auquel il nous est permis d'aspirer: il faut que les autres hommes veuillent bien y contribuer: ce que nous devons faire pour les engager à cela, constitue nos devoirs envers notre prochain. Enfin, malgré le secours des autres, nous sentons que nous ne sommes pas encore en état de nous procurer tout ce que nous pouvons desirer; ce qui doit nous porter à rechercher s'il n'y a pas quelqu'autre Etre, qui ait le pouvoir & la volonté de nous accorder ce qui peut perfectionner notre bonheur. Nous trouvons qu'il y a un Dieu, qui est tel qu'il le faut pour cela: ainsi nous devons travailler à nous le rendre favorable; de-là découlent nos devoirs envers la Divinité. L'exécution de ce plan a ses difficultés; il n'est pas aisé de faire voir la liaison qu'il y a entre chacun des devoirs que la Morale nous impose, & l'augmentation de notre bonheur. Mr. 's Gravesande en étoit cependant venu à bout, avec une sagacité & une justesse qui faisoit l'admiration de ses Auditeurs; le Cours de Morale qu'il leur enseignoit étoit tout ce que l'on pouvoit souhaiter de plus lumineux; tout y étoit démontré par l'application de ce seul principe que je viens d'indiquer. Il alloit travailler à le mettre par écrit, lors-qu'il mourut. La perte que le public a faite par là est très grande; j'en connois toute l'étendue, mieux que personne; ayant été très fréquemment le dépositaire de ses méditations morales. On peut en voir un échantillon dans la Lettre sur le Mensonge que j'ai indiquée ci-dessus: & dans deux Dissertations, qui étoient restées manuscrites, parmi les papiers de l'Auteur. L'une est la *Dissertation morale sur le Commerce des actions de la Compagnie du Sud:* l'autre est *l'Examen de la question, si des Personnes de Réligion différente peuvent se marier sans crime.* Je les ai inserées dans le Journal des Sçavans, édition d'Amsterdam: la première dans le mois de Janvier de 1770. pag. 178.; la seconde dans le mois de May, de 1769., pag. 542. Elles reparoissent ici l'une & l'autre, pag. 272. & suiv. de la seconde partie. Les sujets qu'annoncent leurs titres, y sont discutés d'une manière bien différente de celle qu'on emploie ordinairement dans la plupart des Traités de Morale.

Mr. 's Gravesande avoit aussi travaillé à éclaircir plusieurs autres questions épineuses, qui avoient exercé la plume des plus sçavants Casuistes; mais malheureusement ce qu'il en a écrit est resté imparfait, de même que plusieurs autres Dissertations qu'il vouloit publier sur différents sujets de Physique, sur les Probabilités de vie à l'occasion des rentes viagères, sur les déchiffremens, sur l'Astronomie, & sur la Gnomonique. Les seuls Manuscrits qu'il a laissés complets sont ceux que j'ai indiqués dans la Préface, & dont j'ai enrichi cette édition; & même encore je dois remarquer qu'à ses *Essais de Métaphysique*, il manque un article très intéressant, qu'il se proposoit d'y ajouter. Pour y démontrer les vérités les plus importantes, qui sont le fondement de la Morale & de la Théologie Naturelle, il n'emploie que deux principes, dont l'un est un axiome admis généralement, c'est que rien ne se fait sans cause; & l'autre est tiré de la Nature de l'Etre intelligent, en tant qu'elle nous est connue par la réflexion que nous faisons sur nous mêmes. Ces deux principes si simples, & si incontestables le conduisent à des conséquences qui ne semblent pas au premier coup d'œil convenir avec les idées de Réligion que nous nous formons en lisant l'Ecriture Sainte. Il vouloit lever le scrupule qui auroit pu resulter de là, en faisant voir que sa doctrine s'accordoit parfaitement avec celle qui est enseignée dans nos Livres sacrés; dans ce but, il en avoit rassemblé tous les passages, qui sembloient lui être contraires ou la favoriser; je les ai trouvés cités dans ses pa-

Il a auſſi prêté ſes ſoins à l'impreſſion de quelques Ouvrages qui n'étoient pas de lui (*BB*).

papiers ; mais malheureuſement la mort l'a prévenu, avant qu'il en ait pu faire uſage. Ils auroient fait le ſujet d'un neuvième Eſſai, dont on ne ſauroit aſſez regretter la perte.

(*BB*) *Il a auſſi prêté ſes ſoins à l'impreſſion de quelques Ouvrages qui n'étoient pas de lui.*] Jamais homme n'eut plus à cœur l'avancement des Sciences; ceux qui y travailloient trouvoient en lui toute la protection & tous les ſecours qu'ils pouvoient en attendre, & quoiqu'extrèmement occupé, on le vit toujours prêt à ſéconder les Libraires qui entreprenoient l'impreſſion de quelqu'Ouvrage utile au public.

Le premier qui parut ſous ſa direction eſt le Recueil des Oeuvres de Huygens, qui fut imprimé ſous ce titre: *Chriſtiani Hugenii Opera Varia, Lugduni Batavorum, apud Janſſonium Van der Aa*, 1724., *en* 2. *Voll. in* 4°. Mr. 's Graveſande rend compte dans la Préface de ce Livre des ſoins qu'il a pris, pour que cette édition fut auſſi correcte & auſſi complette qu'il étoit poſſible: il y a ajouté la Vie de l'Auteur, qu'il n'a conſidéré que ſous la qualité d'un des plus grands Mathématiciens de l'Europe. Quatre ans après, à ces deux Volumes il en ajouta deux autres, intitulés *Chriſtiani Hugenii Opera reliqua, Amſtelodami, apud Janſſonio-Waesbergios*, 1728.

En 1725., il fit imprimer les divers Ouvrages de Keill, ſon ami; cette édition eſt très correcte ; en voici le titre: *Joannis Keill Introductiones ad veram Phyſicam, & veram Aſtronomiam. Quibus accedunt Trigonometria. De Viribus Centralibus. De Legibus Attractionis. Lugduni Batavorum, apud J. & H. Verbeek, in* 4°. Il y en a eu une ſeconde édition, faite chez les mêmes Libraires ; mais Mr. 's Graveſande n'y a eu aucune part.

Il dirigea auſſi l'édition des *Ouvrages adoptés par l'Académie Royale des Sciences, avant ſon Renouvellement en* 1699.; *à la Haye, chez P. Goſſe & J. Neaulme*, 1729., *in* 4°. Il en donna ſix volumes, ornés de planches, parfaitement bien gravées. Ce Livre a été continué enſuite, & porté jusqu'à 11. volumes, par les Libraires Arkſtée & Merkus, à Amſterdam.

Enfin, le dernier Ouvrage qui a paru par les ſoins de Mr. 's Graveſande eſt *Arithmetica Univerſalis : ſive de Compoſitione & Reſolutione Arithmetica Liber. Auctore Iſ. Newton. Lugduni Batavorum, apud J. & H. Verbeek*, 1732. *in* 4°.

Le titre de ces différents Ouvrages, nous fait comprendre pourquoi Mr. 's Graveſande s'eſt prêté à leur publication: ils ſont tous excellents en leur genre ; & il étoit néceſſaire qu'ils paſſaſſent ſous les yeux d'un grand Mathématicien. Auſſi en a-t-il revu les dernières épreuves avec beaucoup de ſoin.

Dans une lettre que je reçus de Paris, il y a quelques années, on me demandoit jusqu'où Mr. 's Graveſande avoit eu part à l'Ouvrage que Mr. de Voltaire a publié ſous le titre d'*Elémens de la Philoſophie de Newton?* Cette queſtion me fit comprendre, qu'il y avoit des gens qui ſoupçonnoient, qu'il y avoit mis la main. Je déſabuſai celui qui me l'avoit faite. Avant que de publier ce Livre, Mr. de Voltaire eut la modeſtie de ſouhaiter qu'il paſſât ſous les yeux de Mr. 's Graveſande; pour cela il ſe rendit à Leide, où il lui en lut quelques Chapitres, & où en même tems il fréquenta ſes Collèges avec beaucoup d'aſſiduité. Mais après un ſéjour très court dans cette Ville, ſes affaires l'ayant appellé ailleurs, il remit ſon Manuſcrit à des Libraires d'Amſterdam, & il partit ſubitement pour retourner en France, ſans avoir eu le tems de tirer de Mr. 's Graveſande le ſecours qu'il en avoit eſpéré. Celui-ci admiroit la facilité avec laquelle Mr. de Voltaire exprimoit des choſes, qui ne ſemblent guéres être ſuſceptibles des ornemens du lan-

De ſon mariage avec Mlle Anne Sacrelaire, contracté le 15. Octobre 1720., il eut deux Fils, qu'il perdit tous deux dans l'eſpace de huit jours

langage, & il eut du regret de voir paroître ſon Ouvrage, défiguré par un grand nombre de fautes, qui obligérent l'Auteur d'en donner une édition plus correcte à Paris. Ainſi tout le fruit que Mr. de Voltaire remporta de ſon voyage à Leide, fut d'avoir fait connoiſſance avec Mr. 's Graveſande, pour lequel il conſerva depuis un attachement qui lui fait honneur. Remarquons auſſi qu'à cette occaſion il eut la mortification de ſe voir expoſé aux traits de la calomnie. Son promt départ fit croire à bien des gens, qu'il étoit brouillé avec Mr. 's Graveſande, pour lui avoir tenu des propos très imprudents ſur la Réligion. Cette brouillerie, & la cauſe qu'on en aſſignoit, étoient également fauſſes; Mr. 's Graveſande en arrêta le bruit dans ces Provinces; mais il ſe répandit jusqu'en France, & pour le faire tomber Mr. de Voltaire fut obligé d'avoir recours à Mr. 's Graveſande: comme la lettre qu'il lui écrivit là-deſſus, avec la réponſe, qu'il en reçut, ſervent à juſtifier l'un, & à caractériſer la manière de penſer de l'autre, je crois devoir les inſerer ici.

„ Vous vous ſouvenez," dit Mr. de Voltaire, „ de l'abſurde calomnie, qu'on „ fit courir dans le monde pendant mon „ ſéjour en Hollande, vous ſavez ſi nos „ prétendues diſputes ſur le Spinoſiſme „ & ſur des matières de Réligion, ont le „ moindre fondement. Vous avez été ſi „ indigné de ce menſonge que vous avez „ daigné le réfuter publiquement. Mais la „ calomnie a pénetré juſqu'à la Cour de „ France & la réfutation n'y eſt pas parve- „ nue. Le mal a des ailes, & le bien va à „ pas de tortue. Vous ne ſauriez croire „ avec quelle noirceur on a écrit & par- „ lé au Cardinal de Fleury. Vous con- „ noiſſez par oui dire ce que peut le „ pouvoir arbitraire. Tout mon bien eſt „ en France, & je ſuis dans la néceſſité „ de détruire une impoſture, que dans „ votre pays, je me contenterois de mé- „ priſer à votre exemple.

„ Soufrez donc mon aimable & reſpec- „ table Philoſophe, que je vous ſupplie „ très inſtamment de m'aider à faire con- „ noitre la vérité. Je n'ai point écrit en- „ core au Cardinal pour me juſtifier. C'eſt „ une poſture trop humiliante, que celle „ d'un homme qui fait ſon apologie; „ mais c'eſt un beau rôle, que celui de „ prendre en main la deffenſe d'un hom- „ me innocent. Ce rôle eſt digne de „ vous, & je vous le propoſe comme à „ un homme, qui a un cœur digne de „ ſon eſprit.

„ Il y a deux partis à prendre, ou ce- „ lui de faire parler Mr. votre Beau-Frè- „ re à Mr. de Fénelon, & d'éxiger de „ Mr. de Fénelon, qu'il écrive en con- „ formité au Cardinal; ou celui d'écrire „ vous même. Je trouverois ce dernier „ parti, plus prompt, plus efficace, & „ convenable à un homme comme vous. „ Deux mots & votre nom ſeroient beau- „ coup, je vous en réponds: il ne s'a- „ giroit que de dire au Cardinal, que „ l'équité ſeule vous force à l'inſtruire, „ que le bruit que mes ennemis ont fait „ courir eſt ſans fondement, & que ma „ conduite en Hollande a confondu leurs „ calomnies. —

„ Soyez ſûr que le Cardinal vous ré- „ pondra, & qu'il en croira un homme „ acoutumé à démontrer la vérité. Je „ vous remercie, & je me ſouviendrai „ toujours de celles que vous m'avez en- „ ſeignées. Je n'ai qu'un regret, c'eſt de „ ne plus en apprendre ſous vous. Je „ vous lis au moins ne pouvant plus „ vous entendre. L'amour de la vérité „ m'avoit conduit à Leide. L'amitié ſeu- „ le m'en a arraché; en quelque lieu „ que je ſois, je conſerverai pour vous „ le plus tendre attachement, & la plus „ parfaite eſtime, &c."

Voici la réponſe de Mr. 's Graveſande.

„ Je voudrois de tout mon cœur, mon „ cher Monſieur, vous être utile dans „ l'affaire que vous m'écrivez; vous ſça- „ vez dans quels termes je me ſuis ex- „ pri-

jours *(CC)*. Environ trois ans après, il tomba dans une maladie de lan-

„ primé sur la calomnie, qu'on a fait „ courir que nous étions brouillés. Je „ suis toujours prêt à déclarer, que notre „ querelle est aussi fausse, que le fondement qu'on a jugé à propos de lui donner: je ne me suis pas opposé que ma déclaration fut mise dans les Gazettes; ce „ qui a été fait dans la Gazette d'Amsterdam, d'une manière si obscure, que „ personne ici n'y a rien compris; on y „ a même ajouté une queue, qu'on met „ sur mon compte, & qui n'est pas de „ moi. Si je puis faire quelque chose „ de plus pour faire cesser ce bruit, que „ je croyois cessé, mais qui ne l'est pas „ tout-à-fait, à ce que je vois par votre lettre, je suis prêt; mais, mon „ cher Monsieur, je trouve des difficultés aux deux partis que vous me proposez.

„ 1. Mr. de Fénelon est à Paris, & „ quand il seroit ici, je ne sai s'il faudroit s'addresser à lui; je ne le crois „ pas, sans quoi je ne ferois point de „ difficulté de lui parler à son retour; „ car on dit que son absence ne sera pas „ longue.

„ 2. Pour ce qui regarde d'écrire au „ premier Ministre en droiture, comme „ vous me le proposez, je ne me crois „ pas un personnage assez considérable „ pour cela. Si son Eminence a jamais „ oui prononcer mon nom, ce sera qu'on „ m'a nommé en parlant de vous; ainsi „ permettez moi de ne me pas donner „ des airs qui ne me conviennent pas. „ Vous savez comment je vis isolé; à „ l'égard des études, sans aucun commerce avec des Gens de Lettres, travaillant à être utile dans le poste où „ je me trouve, & cherchant à passer „ agréablement le peu de tems qui me „ reste; ce que je regarde comme plus „ utile que si je me tuois le corps & „ l'ame pour être plus connu. Quand „ on veut vivre de cette manière, il faut „ que tout y réponde, & ne pas faire „ l'important. Je ne dois pas supposer „ que des gens, qui ne doivent pas avoir „ lû ce que j'ai fait imprimer, sachent „ qu'il y a à Leiden un homme dont „ le nom commence par une apostrophe.

„ Je conclus que si j'écris à Monseigneur le Cardinal, ce doit être sur le „ pied d'un homme tout-à-fait inconnu, & comme lui pourroit écrire mon „ Jardinier; & dans ce sens je ne vois „ pas par où débuter; je ne connois „ point l'air du Bureau; & en écrivant „ je m'exposerois à jouer un personnage „ très ridicule, sans vous être d'aucune „ utilité.

„ Je vous dis naturellement comment „ j'envisage la chose; trouvez quelque „ route praticable, & je ne vous manquerai pas.

„ La plus naturelle, il me semble, seroit que vous fissiez parler directement „ à S. E. par quelqu'un, qui pourroit „ lui faire voir un témoignage que je „ vous aurois envoié; ou bien, que quelqu'un de vos amis en France me demandât par une lettre des éclaircissemens sur ces bruits, & qu'on mit ma „ réponse entre les mains du Cardinal."

(CC) Ses deux Fils moururent dans l'espace de huit jours.] L'ainé s'appelloit Dirk, & le cadet Jacob. Ils étoient tous les deux fort aimables, & avoient beaucoup de génie. Leur Père n'avoit point de plus grand plaisir, que celui de veiller à leur éducation. Lorsqu'ils commençoient leurs études académiques, avec un succès qui faisoit espérer qu'on les verroit marcher à grands pas sur ses traces; le cadet âgé d'environ 13. ans, fut attaqué d'une fièvre ardente, dont il mourut au bout de 4. jours. L'affliction de Mr. 's Gravesande & de son Epouse fut des plus vives; cependant, après avoir donné essor aux premiers mouvemens, qu'on ne sauroit refuser à la nature dans une pareille circonstance, ils se réunirent à bénir la Providence, de leur avoir donné deux fils; dont l'un, qui étoit d'une santé fort robuste, leur restoit encore: mais ce sujet de consolation ne dura pas longtems. Le ca-

langueur, & au bout de quelques mois il mourut (*DD*).

cadet étoit mort le matin; l'après midi du même jour, l'ainé, âgé de 14. ans, parut tout d'un coup attaqué de la même maladie, & lorsque le Père accompagna le convoi funèbre de celui-là, il sortit de la maison, persuadé qu'à son retour il trouveroit celui-ci mort; il ne mourut cependant que quelques heures après. Il est aisé de juger combien ce coup fut rude pour Mr. 's Gravesande. Je ne saurois me rappeller l'affliction dans laquelle je le vis plongé, sans en être ému vivement encore. Quoique je fusse très sensible à la perte qu'il venoit de faire, je conservai cependant assez de tranquillité, pour l'observer dans un moment aussi critique; & j'eus la satisfaction de voir combien les principes d'une saine Philosophie sont propres à nous donner de la fermeté au milieu des plus accablantes épreuves, lorsqu'ils sont aussi profondément imprimés dans le cœur que dans l'esprit.

Je l'ai déjà dit, Mr. 's Gravesande étoit persuadé que de tous les mondes possibles, celui qui a été créé est le meilleur; & il étoit convaincu que tout ce qui s'y passe est dirigé par l'Être souverainement bon au plus grand bien des Créatures intelligentes, qu'il a jugé à propos d'y placer, quoique souvent nous ne comprenions pas de quelle façon. Cette vérité dont il étoit pénétré, fut pour lui un motif de consolation bien efficace, *Dieu*, me dit-il au milieu de sa douleur, *m'avoit donné deux Enfans qui méritoient toute ma tendresse; il vient de me les ôter; je suis assuré que c'est pour leur bonheur & pour le mien: il y auroit donc de l'ingratitude chez moi de ne pas me soumettre avec résignation, à ce qu'il lui a plû d'ordonner.* Cette réflexion eut tant de force pour lui, que trois jours après il fut en état de reprendre ses fonctions académiques, qu'il avoit interrompues. Peut-être même prit-il trop sur soi: sensible comme il étoit, il fit trop d'éfort pour modérer son affliction, dont les suites auroient moins fait d'impression sur lui, s'il lui avoit donné plus d'essor. Il ne pouvoit pas s'empêcher de tems en tems de faire des réflexions qui lui retraçoient vivement la perte qu'il avoit faite. „ Je suis persuadé," écrivoit-il un jour à Mr. de Superville, en lui parlant de la mort de ses Enfans, „ que Dieu nous „ mène au bonheur par la voye la plus „ courte. Mais que les sentiers qui y „ conduisent sont quelquefois raboteux!"

(*DD*) *Au bout de quelques mois il mourut.*] Soit par l'effet qu'avoit produit sur lui la mort de ses Enfans, soit qu'il fût épuisé par la grande application qu'il avoit donnée aux Sciences les plus difficiles, ses forces diminuérent au point que pendant près de trois mois, il ne put pas sortir de sa chambre, & rarement de son lit. Cependant il n'avoit rien perdu de sa vivacité & de sa présence d'esprit: j'en ai de fortes preuves dans les conversations que j'ai eues presque tous les jours avec lui durant ce tems-là sur des matières philosophiques: conversations qui se présentent souvent à ma mémoire. On n'avoit point encore d'idée du danger où il étoit; il sembloit même reprendre des forces, lorsque tout-d'un-coup, il fut saisi de mouvemens convulsifs, accompagnés de délire, qui ne finirent que trois jours après par sa mort, arrivée le 28. Février 1742. J'étois seul au côté de son lit, quand il rendit l'esprit, & je ne l'ai presque pas quitté pendant tout le cours de sa maladie; ainsi personne n'est plus en état que moi, de refuter l'odieuse calomnie par laquelle on a cherché à ternir sa mémoire; c'est qu'il étoit mort dans les sentimens de ceux qu'on nomme assez improprement Esprits forts; calomnie à laquelle j'apprends qu'encore aujourd'hui bien des gens ajoutent foi. Rien n'a jamais été plus faux: durant sa maladie il a tenu le langage qu'il a tenu pendant toute sa vie; c'est à dire celui d'un homme bien persuadé de la vérité & de la divinité de l'Evangile. Tous ceux qui l'ont connu particuliérement, en rendront le même témoignage. Jamais il n'a laissé paroitre là-dessus le moindre doute, & toujours, soit dans ses collèges, soit dans ses conversations, il a dit ouvertement ce qu'il en pensoit. En voici une preuve. Il avoit fait l'Extrait du Livre de Ditton,

ton, ſur la Réſurrection de J. C. que l'on trouve dans le Journal Littéraire, Tom. I. pag. 391. Quand il le lut à la Société des Journaliſtes, Mr. de St. Hyacinthe, qui étoit un franc Déïſte, trouva que l'Auteur parloit en Chrétien, & prétendit qu'un Journaliſte, comme un Hiſtorien, devoit laiſſer ignorer de quel parti il eſt. Mr. 's Graveſande ne gouta pas cet indifférentiſme, & crut que comme Chrétien, il ne devoit pas rougir de ſa profeſſion, & de déclarer ſes ſentimens; ſon avis fut ſuivi. Je tiens ce fait de Mr. de Superville, qui l'avoit entendu raconter à Mr. 's Graveſande lui-même.

A un ſincère attachement à la vraie Réligion, il joignoit toutes les qualités qui rendent un homme aimable & reſpectable dans la Société. Il étoit d'une converſation enjouée, & jamais perſonne n'a mieux ſû que lui s'accommoder au caractère & à la portée de ceux avec qui il parloit. Senſible à tout ce qui arrivoit aux autres, il étoit toujours auſſi prompt à leur tendre une main ſécourable dans le beſoin, qu'à ſe réjouir de leur proſpérité. Facile quand il s'agiſſoit de choſes indifférentes, on le trouvoit d'une fermeté inébranlable là où il étoit queſtion de ſon devoir.

Si l'on conſidère Mr. 's Graveſande comme Citoyen, on trouvera que peu de Gens de Lettres ont rendu à leur Patrie plus de ſervice que lui. A peine avoit il quitté l'Académie, que connu déjà par ſon ſavoir, & par ſa ſagacité dans le calcul, on le conſultoit ſur les négociations d'argent, que l'Etat étoit obligé de faire dans les circonſtances critiques où l'on étoit. Mr. Hop, Thréſorier Général en 1711., qui ſe diſtinguoit par cette ſupériorité de génie héréditaire dans ſa Famille, & qui formoit le plan de ces négociations, ne manquoit guères de prendre ſes avis ſur les points difficiles; par les queſtions qu'il lui propoſoit, on voit combien cet habile homme penſoit profondément ſur ce à quoi il travailloit, & la bonne opinion qu'il avoit de celui à qui il les addreſſoit.

Mr. 's Graveſande fut encore fort utile à l'Etat par ſa pénétration dans l'art de déchiffrer: durant la guerre de ſucceſſion on lui envoioit ſouvent des chiffres interceptés aux ennemis, lorsque ceux qui étoient ordinairement employés à les déchiffrer, n'en pouvoient pas venir à bout. Le Prince Eugène connoiſſoit par expérience ſon habileté dans cet art.

L'on ſait à combien de dangers les Rivières expoſent la Hollande & les Provinces voiſines: il faut fréquemment travailler à prévenir les maux dont elles menacent, ou à réparer ceux qu'elles ont cauſés: rarement on y travailloit, ſans qu'on conſultât Mr. 's Graveſande, & les Mémoires qu'il a fournis ſur cela à l'Etat, forment une Collection nombreuſe, qui prouve combien il eſt avantageux à un pays d'avoir de pareils Citoyens, qui tournent leurs études du côté qui peut les rendre utiles à la Société.

Pour être plus utile à cet égard, quelques années avant ſa mort, il fit faire une ſorte de Moulin, deſtiné à élever les eaux. Les Moulins qu'on emploie à cet uſage dans ces Provinces, ne portent l'eau guères plus haut qu'à 4 pieds; ainſi quand il eſt queſtion de l'élever à la hauteur de 14 ou 15 pieds, qui eſt ordinairement celle où il faut l'avoir, quand on veut deſſécher un terrain, l'on eſt obligé de conſtruire à grands fraix une ſuite de 4 Moulins, placés les uns au-deſſus des autres, & dont l'un élève l'eau, qui a déjà été élevée par celui qui eſt plus bas. Qui pourroit élever tout-d'un-coup, à la hauteur requiſe, la même quantité d'eau, rendroit au pays un ſervice eſſentiel. L'ingénieux Artiſte Fahrenheit l'avoit entrepris: il avoit imaginé des tuiaux, rangés, à l'aide de quelques cercles, dans la circonférence d'un cône tronqué, dont la baze étoit en deſſus; quand ces tuiaux, plongés par leur extrémité inférieure dans l'eau, étoient mis en mouvement, l'eau y montoit par l'effet de la force centrifuge. Fahrenheit qui avoit demandé un privilège pour l'exécution de cette Machine, mourut avant d'en avoir pû faire uſage. Sentant ſa fin approcher, il pria Mr. 's Graveſande de vouloir bien la perfectionner, au profit de ſes héritiers. Celui-ci ſe chargea volontiers de ce ſoin, & au lieu des tuiaux, qui étoient ſujets à bien des inconvéniens,

il

il fit faire une espèce d'entonnoir conique, haut de 18 pieds, & qui avoit 24 pieds d'ouverture par en haut, & 6 par en bas. Cet entonnoir, traversé par un arbre perpendiculaire, qui lui servoit d'axe, étoit mu par les ailes d'un Moulin à vent: & alors l'eau, dans laquelle sa partie inférieure étoit plongée, montoit par la même force centrifuge, & se dégorgeoit dans un réservoir circulaire, placé autour du bord supérieur de l'entonnoir.

A la première expérience qu'on fit avec cette Machine, elle donna d'abord une très grande quantité d'eau; mais son poids excessif joint à celui de l'eau, qui étoit élevée, causoit un tel frottement, qu'il fallut à deux ou trois reprises l'arrêter, pour y réparer ce qui s'y étoit dérangé. Cela dégouta ceux pour qui elle avoit été entreprise, & les Constructeurs des Moulins ordinaires s'étant joints à eux, pour décréditer cette nouvelle invention; Mr. 's Gravesande n'y pensa plus; c'est dommage; je crois qu'on pourroit encore la réduire en pratique bien utilement.

Lorsque le grand Empereur des Russes, le Czar Pierre I., fonda son Académie à Petersbourg, on tâcha d'y attirer Mr. 's Gravesande, en lui offrant une place d'Académicien. Mr. Blumentwil lui écrivit là-dessus, le 16. Février 1724., & l'assura qu'il n'avoit qu'à faire des propositions, pour qu'elles fussent acceptées. Mais il étoit trop attaché à sa Patrie pour penser à la quitter. Il remercia de l'honneur qu'on lui faisoit.

En 1740., Mr. Jordan lui écrivit par ordre du Roi de Prusse, pour l'inviter à venir occuper à Berlin une place dans l'Academie Royale, qui y a été établie par Mr. Leibnitz, & qui venoit de recevoir un nouveau lustre, par la protection distinguée que ce grand Prince accorde aux Sciences, qu'il cultive lui-même avec tant de succès: protection qui fera jusqu'à la postérité la plus reculée autant d'honneur à sa mémoire, que les glorieuses victoires qu'il a remportées, & qui le mettent si fort au-dessus de tous les Capitaines de son siècle. Mr. 's Gravesande, pour qui la perte de ses Enfans étoit encore récente, & qui ne pensoit plus qu'à finir tranquillement le reste de ses jours, ne put se résoudre à accepter les offres avantageuses qu'on lui faisoit. Il répondit à Mr. Jordan; & pénétré de reconnoissance pour la bonté de S. M. Prussienne à son égard, il lui témoigna que c'étoit avec regret qu'il ne pouvoit pas en profiter.

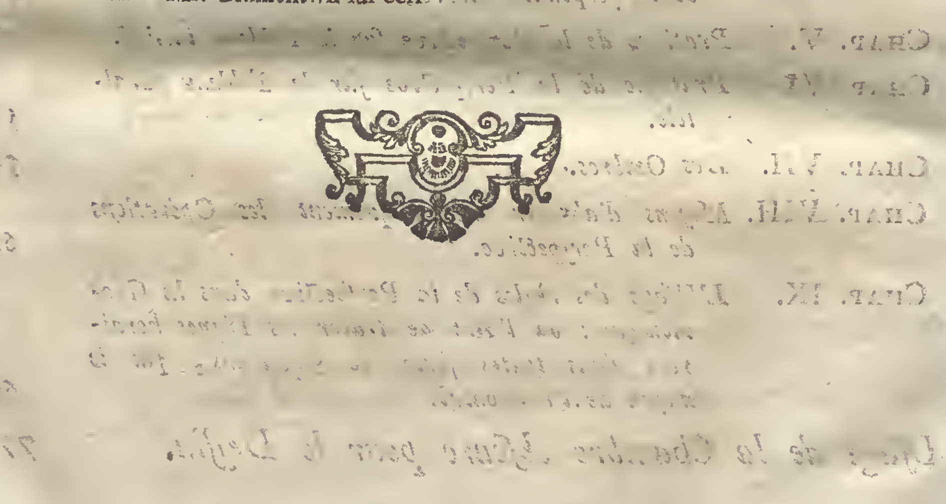




TABLE DES TRAITÉS CONTENUS,

dans cette première Partie.

Ma-

Matheseos Universalis Elementa.

Specimen Commentarii in Arithmeticam Universalem NEWTONI.

AVIS

au Relieur.

Les 21. Planches de la Perſpective doivent être placées de ſuite, vis-à-vis le revers de la page 71.

Les 3. Planches de la Chambre obſcure à la page 88.

Les 4. Planches, marquées *Math. Univers.* doivent regarder la page 214.

La Planche ſur la Force & le Choc doit être placée à la page 284.



ESSAI

ESSAI

DE

PERSPECTIVE.

A

MONSIEUR

B. VANDER DUSSEN,

BOURGUEMAISTRE, CONSEILLER, ET PENSIONNAIRE DE LA VILLE DE GOUDA. HOOG-HEEMRAAT DE SCHIELAND, ET DYCK-GRAVE DU KRIMPENDER-WAART. DÉPUTÉ DE LA PART DES ETATS GÉNÉRAUX, AUX DERNIERES CONFÉRENCES SUR LA PAIX, ETC. ETC. (*)

MONSIEUR,

Si j'étois du ſentiment des Ecrivains, qui, à l'abri d'un Nom Illuſtre, eſpérent ſe garantir des hazards auxquels ils s'expoſent, j'abandonnerois ce petit Traité au jugement du public avec toute la confiance que peut donner un ſuccès aſſuré: j'aurois tout lieu de m'attendre à la réüſſite d'un Livre, au devant duquel Vous m'avez bien voulu permettre, MONSIEUR,

(*) Cette Dédicace a été écrite en 1711.

de placer Votre Nom Illuſtre ; ce Nom qui tant de fois a paru avec éclat dans des Négociations importantes, dont le maniment demandoit un Eſprit ſupérieur, une Prudence conſommée dans les affaires, & une ſage Activité toujours ménagée par la Raiſon.

Mais cette vaine eſpérance, MONSIEUR, *n'eſt pas le motif qui me porte à Vous offrir ce petit Eſſai ; l'honneur que j'ai de Vous apartenir, & le deſir de faire connoitre le reſpect & l'attachement que j'ai pour Vous, ſont pour moi des raiſons bien plus fortes & plus légitimes. Je ſuis avec un profond reſpect,*

MONSIEUR,

Vôtre très-humble & très-
obéïſſant Serviteur,

G. J. 's GRAVESANDE.



PREFACE.

On s'étonnera peut-être de me voir entrer dans une route qui ſemble n'avoir été que trop fréquentée, & on regardera comme inutile l'Eſſai d'un nouveau Traité ſur une ſcience, qui, ſi on en juge par le grand nombre des Ecrivains qu'elle a produits, devroit être épuiſée depuis long-tems. Il ſemble que le nom de Perſpective ſoit devenu rebutant pour le public ennemi des répétitions, & qu'il y ait de la témérité à oſer traiter encore le même ſujet. J'oſe eſpérer néanmoins quelque indulgence de ceux qui voudront bien s'inſtruire des raiſons qui m'ont porté à rendre public ce petit Ouvrage.

Il y a quelques années que m'occupant à tracer des figures par les régles ordinaires, je découvris certains moyens d'abréger, qui ſe preſentent aſſez naturellement quand on travaille avec quelque attention, & ſans s'aſſervir entiérement à l'induſtrie des autres. Ces premiers ſuccès m'en firent eſpérer de plus conſidérables. Je crus qu'un examen plus exact de la Théorie de la Perſpective, me fourniroit des régles plus générales auſſi, pour en rendre la pratique aiſée. Je rencontrai véritablement quelques abrégés ; mais

me défiant de la facilité apparente, que le plaiſir de l'invention nous fait toujours trouver dans nos découvertes, j'en éprouvai la bonté en les appliquant avec exactitude à différents ſujets: j'en examinai ſcrupuleuſement tous les cas, & je fis tous mes efforts pour n'être pas ébloui par certaines opérations, qui ſont tout autrement mal-aiſées dans l'éxécution, qu'elles ne ſemblent d'abord le promettre à l'eſprit. A ma propre méditation je joignis la lecture d'une bonne partie des Ecrivains de ce genre, qui ſe ſont multipliés à l'infini ſans beaucoup de néceſſité. Quelques uns d'entr'eux, qui ſe ſont diſtingués avantageuſement parmi la foule, m'ont été très utiles: mais j'oſe aſſurer que le nombre n'eſt pas grand de ceux, qui, dans ce qui regarde la pratique, ont traité cette matiére avec quelque air de nouveauté.

Les uns ſe ſont bornés à expliquer la ſimple Théorie, & ont laiſſé à leurs Lecteurs le ſoin d'en faire l'application; ou s'ils ont donné les pratiques communes, ils n'ont pas été au delà, & ils ſe ſont répandus en réfléxions générales ſur la Peinture, curieuſes à la vérité, mais peu utiles à mon deſſein; car je me propoſe, non de former un Peintre, mais de lui rendre facile l'exercice & l'uſage de la Perſpective. Les autres Auteurs, qu'on diroit, à la groſſeur de leurs Ouvrages, avoir traité la pratique avec plus de ſoin, en donnent d'abord quelques régles générales, qui leur ſont communes à tous, & qui pour avoir paſſé par tant de mains n'en ſont pas devenues plus aiſées; auſſi n'ont

ils pas travaillé à les rendre telles. Ils ont cru que tous les objets pouvant se mettre en Perspective par ces moyens là, il seroit inutile d'en chercher d'autres; & ils ont jugé plus nécessaire de donner aux Peintres l'application de ces méthodes à un nombre infini d'exemples particuliers; quoique cette application ne leur puisse servir, tout au plus, qu'à rappeller dans ces circonstances l'usage des régles déja prescrites. Mais quel profit peuvent retirer les Peintres de ces modelles, s'ils n'ont une connoissance exacte des pratiques générales? Et s'ils ont cette connoissance, quelle sera pour eux l'utilité de cette variété excessive d'exemples?

J'ai donc cru pouvoir m'y prendre d'une autre façon; & bien que je me reconnoisse beaucoup inférieur à plusieurs de ceux qui ont écrit sur cette matiére, je me suis flatté, que, si la Perspective perdoit quelque chose entre mes mains par le manque d'habileté, elle pourroit le regagner, peut-être avec usure, par une grande application de ma part. J'ai consideré encore que les détails ennuyeux, inséparables du genre d'écrire que j'ai choisi, ne permettroient jamais aux génies capables de plus grandes choses d'entrer dans une carriére peu digne de leurs efforts, & inaccessible aux grandes découvertes. Ainsi, espérant d'une part donner un nouveau jour & plus de facilité à la pratique; & persuadé d'ailleurs que des personnes plus intelligentes ne voudroient pas se charger d'un tel soin, j'ose hazarder ce petit Ouvrage, & l'exposer au gout du public éclairé, de qui je n'attends point

d'autre Eloge, que celui qu'on ne peut raiſonnablement refuſer à un travail aſſidu.

Trois choſes pourront ici faciliter l'uſage de la Perſpective. 1. Pour reſoudre les Problèmes les plus généraux qui fondent toute la pratique, on donne pluſieurs méthodes nouvelles & plus faciles que celles dont on uſe communément. On en donne pluſieurs, parce que l'application d'une même régle n'eſt pas également commode dans tous les cas, & qu'ainſi il eſt utile d'en avoir à choiſir. 2. Les méthodes générales dont on s'eſt ſervi juſqu'ici étant impraticables dans quelques occaſions particuliéres, pour rémedier à ce défaut on en a ajouté d'autres, plus mal-aiſées à la vérité, mais que certains cas rendent abſolument néceſſaires. 3. Enfin, quand par le moyen des Problèmes généraux, il eſt fort difficile de réſoudre un Problème particulier, on a cru devoir en donner une ſolution à part.

Par là on rend à la vérité l'étude de la Perſpective plus mal-aiſée : mais ce déſavantage eſt bien récompenſé par la facilité de la pratique qu'on a eu uniquement en vue. Il eſt vrai que peu de régles générales ne chargent pas tant la mémoire; mais d'en avoir pluſieurs, d'en avoir de particuliéres, c'eſt ce qui abrége; & telle méthode, pour avoir arrêté d'abord quelques momens de plus, épargne dans la ſuite des heures entiéres d'une occupation qui paroit toujours aſſez pénible. Peu de tems ſuffira à un Peintre pour bien entendre cet Ouvrage, & pour s'en rendre les pré-

ceptes

ceptes familiers; & cette étude de peu de jours, répétée de tems en tems, lui vaudra toujours une extrême diminution de travail & de fatigue.

Mais afin que chacun puiſſe voir par lui-même ce qu'il peut ſe promettre de cet Eſſai, j'en donnerai l'abregé en peu de mots. Il eſt partagé en neuf Chapitres. Le premier, qui tient lieu d'introduction aux autres, ſert à prouver l'utilité de la Perſpective, & on y donne les définitions des termes néceſſaires pour l'intelligence de ce Livre.

Toute la Théorie eſt contenue dans le Chapitre ſecond. Ce qui a été découvert de plus utile ſur cette matiére s'y trouve réduit à trois Théorèmes généraux, ſçavoir le premier, le ſecond & le quatriéme; tout le reſte s'en déduit par voye de Corollaire. A ces Théorèmes déja connus, on en a ajouté de nouveaux pour ſervir à la Démonſtration de quelques propoſitions néceſſaires. Peut-être auroit-on ſouhaité que j'euſſe toujours employé pour preuve la route qui m'a mené aux vérités que je découvre: je l'ai fait quelquefois, mais ſouvent cela auroit été très long & très embarraſſant. En Géométrie, ce n'eſt pas toujours le chemin le plus facile, & le plus court qui conduit aux découvertes.

Dans le Chapitre ſuivant, on explique la pratique de la Perſpective ſur le Tableau perpendiculaire. Entre les différentes méthodes qu'on y indique pour réſoudre les Problèmes généraux, on en trouvera dans leſquelles on n'employe

que la ſimple régle; de ſorte qu'après quelques préparations, on peut, ſans le ſecours du Compas, tracer toutes ſortes d'objets, & cela avec plus de facilité que dans la pratique vulgaire. Celui qui cherche l'apparence d'un point qui eſt en l'air, le conſidére comme l'extrémité d'une Perpendiculaire, dont il faut trouver la repréſentation pour trouver celle du point. On évite ce détour, & on enſeigne a déterminer la Perſpective du point donné, ſans être obligé de chercher la Perſpective de ſon aſſiéte. Touchant l'apparence d'un Cone & d'un Cilindre, on détermine ſur leur baze la portion qui en eſt viſible, & on ſe délivre par là des opérations inutiles aux quelles eſt ſujette la méthode ordinaire. Il eſt très difficile, pour ne pas dire impoſſible, de mettre en Perſpective une Sphére par le moyen des Problèmes généraux; dans la repréſentation du Tore d'une Colomne, il ſe trouve encore plus de difficulté: par là on s'eſt trouvé engagé à donner des méthodes particuliéres pour réſoudre ces deux Problèmes. Le reſte du troiſiéme Chapitre regarde les lignes inclinées, & le moyen d'en trouver l'apparence par le point accidental.

Le quatriéme Chapitre enſeigne à travailler ſur un Tableau qui doit être vu de fort loin, ou fort de côté, ou qui doit être placé dans un lieu élevé. Ces diverſes ſituations demandent de nouvelles régles: car pour y pouvoir appliquer la méthode ordinaire, il faudroit travailler ſur un Plan d'une grandeur exceſſive & impraticable.

On s'étend fort peu dans les deux Chapitres ſuivants. On y parle du Tableau incliné, & du Tableau parallèle ; & on y découvre des méthodes générales, qui, jointes à celles des Chapitres précédents, ſuffiront, je crois, pour mettre en Perſpective toutes ſortes d'objets avec aſſez de facilité.

Le Chapitre ſeptiéme, qui traite des Ombres, n'a rien de particulier, & qu'on n'ait vu autre part ; mais le peu qu'on en dit ſuffit pour donner une idée de cette matière, que la lecture de ce qui précéde rendra facile.

On enſeigne dans le Chapitre ſuivant quelques moyens méchaniques pour faciliter l'uſage de la Perſpective. On n'employe pour cela que des régles & des fils, dont tout le monde pourra aiſément ſe pourvoir, que chacun pourra mettre en pratique, & qui, avec cet avantage, ſont encore d'un uſage plus facile qu'aucun des inſtrumens inventés à ce ſujet.

Le dernier Chapitre de ce Traité fait voir qu'elle eſt l'utilité que la Perſpective peut apporter à la Gnomonique.

Tel eſt le plan de ce petit Ouvrage, dans lequel je me ſuis moins efforcé d'avancer des choſes curieuſes, que d'en dire d'utiles ; eſtimant que ſans faire parade d'un ſavoir mal placé, je rendrois mon livre aſſez bon, ſi par ſon uſage je le rendois néceſſaire. Par cette raiſon, j'ai tâché de mettre tout à la portée de ceux qui auroient lu ſimplement les élemens d'Euclide : & ſi je me ſuis éloigné de cette régle

en quelque peu d'endroits, je les ai fait imprimer en caractères Italiques, afin qu'on pût les passer sans aucun scrupule.

J'avertirai, ici qu'en retouchant cet Essai, j'ai eu le bonheur de rencontrer un habile Peintre, qui a fait une étude sérieuse de toutes les connoissances nécessaires à sa profession, parmi lesquelles la Perspective n'a pas été négligée. Il l'a portée plus loin qu'on ne pouvoit l'attendre raisonnablement d'un homme destitué du secours des Mathématiques; & je lui suis redevable de plusieurs observations, auxquelles sans lui je n'aurois peut-être jamais pensé. Au reste, j'espére, quant au langage, quelque indulgence pour un étranger, à qui les fautes seront d'autant plus pardonnables en cette matiére, que les Mathématiques exigent moins l'élegance du stile que la clarté des expressions.

ESSAI DE PERSPECTIVE.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions de la Perſpective.

LA Perſpective nous enſeigne à deſſiner par les régles des Mathématiques ; c'eſt-à-dire, qu'elle nous apprend à tracer géométriquement ſur un plan, la repréſentation des objets, ſelon leurs dimenſions, & leurs ſituations differentes : en ſorte que ces repréſentations faſſent ſur nos yeux le même effet, qu'auroient pu faire les objets mêmes dont elles ne ſont que les images. 1.

Pour bien comprendre comment on a pu appliquer les Mathématiques au Deſſin, ſuppoſons un homme A, qui conſidére un objet B, & feignons qu'entre cet homme & l'objet qu'il regarde, il y ait un plan tranſparent C. Suppoſons de plus que ſur ce plan on trace des lignes comme en D, qui couvrent à l'égard du Spectateur A les contours de l'objet B, & de chaque partie qu'il en apperçoit. A preſent puis qu'on ne voit un objet, que par des rayons qui partent de tous ſes points, & qui aboutiſſent à l'œil ; & puis qu'ici tous les rayons qui viennent de l'objet B, paſſent auſſi par tous les points de la repréſentation D ; il eſt clair que cette repréſentation fera ſur l'œil du Spectateur, le même effet qu'y faiſoit auparavant l'objet même. Or c'eſt par des régles priſes de la Géométrie, que dans le plan C, mis dans une ſituation donnée, on peut trouver les points de la figure D, par où paſſent les rayons, qui de l'objet B ſe rendent à l'œil du Spectateur A ; leſquels points ſont les interſections des rayons & du plan. Ainſi, comme d'autres l'ont fort bien remarqué, on doit regarder un Tableau dans la Peinture, comme une fenêtre ſur laquelle on voudroit repréſenter les objets qui paroiſſent à travers. *PL. I. Fig. 1.*

Sans le ſecours des Mathématiques on ne peut trouver cette repréſentation qu'à la ſimple vue; c'eſt-à-dire, à tâtons; & alors un Deſſin n'eſt exact, qu'à meſure qu'on a rencontré la véritable Apparence qu'auroit pu donner la Géométrie. Cette ſeule remarque ſuffit pour établir la néceſſité de la Perſpective, quoi qu'en diſent certains Peintres, qui, ſelon la maxime ordinaire, prétendent que ce qu'ils ignorent, ne vaut pas la peine d'être ſçu.

Juſqu'ici j'ai tâché de donner une idée de la Perſpective conſidérée en général: mais on donne encore à ce mot une ſignification particuliére, qu'il eſt néceſſaire d'expliquer, auſſi bien que les autres termes de l'Art; ce que je vais faire dans les Définitions ſuivantes, qu'il faut ſe rendre bien familiéres, avant de paſſer à la lecture du reſte.

DEFINITION I.

2. *La Perſpective* donc, la Repréſentation, ou l'Apparence d'un objet (car ces trois mots ſont ſynonimes) *eſt la Figure que forment, en traverſant le Plan tranſparent, les Rayons par leſquels on voit cet objet: & la Perſpective d'un point, eſt l'interſection du Rayon qui part de ce point, avec le Plan tranſparent*; laquelle interſection eſt un point. Ainſi la Figure D, dans le Plan tranſparent C, eſt la Perſpective de l'objet B, & le point *e* dans le même Plan, eſt la Perſpective du point E dans l'objet.

PL. I. Fig. 1.

DEFINITION II.

Le Plan parallèle à l'horiſon ſur lequel le Spectateur eſt placé, avec les objets qu'il conſidére, eſt appellé Plan géométral; comme ABCD.

PL. I. Fig. 2.

DEFINITION III.

Le Tableau eſt un Plan poſé entre le Spectateur & les objets, ſur lequel les objets ſe doivent tracer; comme FGRT. Il eſt pour l'ordinaire perpendiculaire au Plan géométral, & par conſéquent à l'horiſon, parce que le plus ſouvent on donne cette ſituation aux Peintures. Il peut être néanmoins quelquefois incliné, & même parallèle au Plan géométral, ſelon la maniére dont on veut diſpoſer le Deſſin, ou la Peinture à laquelle on travaille. C'eſt la raiſon pourquoi dans le Chapitre ſuivant, on énoncera les Théorêmes & leurs Corollaires, d'une maniére générale, qui convienne à toutes ces diverſes ſituations du Tableau; ce qu'il faut bien remarquer.

DEFINITION IV.

L'Interſection du Tableau avec le Plan géométral, s'appelle Ligne de terre; comme FG.

La diverſe ſituation de l'œil, change dans le Tableau la Repréſentation des objets; car les Rayons allant ſe joindre dans un autre point, rencontrent auſſi le Tableau dans des endroits différents.

DEFINITION V.

Pour déterminer cette ſituation de l'œil, à l'égard du Tableau, on ſuppoſe *un Plan parallèle à l'horiſon, qui paſſe par l'œil, & s'étend de tous côtés; on le nomme Plan horiſontal*; comme OMVNL.

DEFINITION VI.

L'Interſection de ce Plan avec le Tableau, eſt la Ligne horiſontale; comme MVN.

DEFINITION VII.

La Perpendiculaire qu'on méne de l'œil à la Ligne horiſontale, eſt le Rayon principal; comme OV.

DEFINITION VIII.

Le Point V *où cette Perpendiculaire rencontre la Ligne horiſontale, eſt le Point de vue ou le Point principal.*

On abaiſſe de l'œil ſur le Plan géométral une Perpendiculaire qui meſure la hauteur de l'œil.

DEFINITION IX.

Le Point S *où cette Perpendiculaire rencontre le Plan géométral, eſt le Point de Station.*

DEFINITION X.

Le Plan qui paſſe par cette Perpendiculaire, & par le Rayon principal, eſt appellé Plan vertical; comme SOLI.

DEFINITION XI.

L'Interſection VH *de ce Plan avec le Tableau, eſt la Ligne verticale.*

DEFINITION XII.

Son Interſection SHI *avec le Plan géométral, eſt la Ligne de Station.*

DEFINITION XIII.

Les Points de diſtance ſont deux Points dans la Ligne horiſontale, éloignés de part & d'autre du Point de vue, de la quantité du Rayon principal; comme M & N.

DEFINITION XIV.

J'appelle Ligne géométrale, une Ligne qui paſſe par le point de Station, & qui eſt parallèle à la Ligne de terre; comme AB.

DEFINITION XV.

L'Aſſiéte d'un objet eſt l'appui perpendiculaire, que chacune de ſes parties a ſur le Plan géométral.

DEFINITION XVI.

La Direction d'une Ligne inclinée au Plan géométral, eſt l'interſection de ce Plan, avec un autre Plan qui lui eſt perpendiculaire, & qui paſſe par la Ligne inclinée.

CHAPITRE SECOND.

Théorie de la Perſpective.

LEMME.

LA Perſpective d'une ligne droite comme AB, qui étant continuée ne paſſe pas par l'œil O, eſt auſſi une ligne droite : car les Rayons par leſquels on voit la ligne AB forment un Plan OAB, qui coupe le Tableau ; & la commune ſection de deux Plans eſt une ligne droite, comme *ab*. 3. *PL. I. Fig. 3.*

THEOREME I.

La Repréſentation d'une ligne parallèle au Tableau, eſt parallèle à la ligne dont elle eſt la repréſentation. 4.

Soit AB une ligne parallèle au Tableau, il faut démontrer que *ab* ſa repréſentation, lui eſt parallèle. *PL. I. Fig. 3.*

Ces deux lignes AB & *ab* ne peuvent jamais ſe rencontrer, parce que *ab* eſt dans le Tableau, & que AB a été ſuppoſée parallèle au Tableau. Mais ces deux lignes ſont auſſi dans un même Plan, puiſque *ab* eſt l'interſection du Tableau & du Plan OAB, qui paſſe par l'œil & par la ligne AB ; & par conſéquent elles ſont parallèles entr'elles. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

La Perſpective d'une ligne parallèle à la Ligne de terre, eſt parallèle à la même Ligne de terre. 5.

Car la Ligne de terre & cette Perſpective étant parallèles à une même ligne, elles ſont parallèles entr'elles.

COROLLAIRE II.

La Perſpective d'une ligne parallèle à la Ligne verticale, eſt parallèle à cette même verticale, & par conſéquent perpendiculaire à la Ligne de terre. 6.
Cela ſe démontre comme dans le Corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

7\. *Les Apparences des lignes parallèles au Tableau, & également inclinées du même côté sur le Plan géométral, font avec la Ligne de terre, des angles égaux aux angles que font les lignes, dont elles sont les Apparences, avec les parallèles à la Ligne de terre, qui les coupent, & par conséquent ces Apparences sont parallèles entr'elles.*

Cela est évident, puis que les Apparences des lignes parallèles à la Ligne de terre sont parallèles à cette même Ligne, & que les Apparences des lignes inclinées, dont nous parlons, sont parallèles à ces lignes.

THEOREME II.

8\. *La Perspective d'une Figure parallèle au Tableau, est semblable à cette Fi-*
9\. *gure; & les côtés de cette Figure sont à leurs Représentations, comme la distance de l'œil avec le Plan de la Figure est à la distance de l'œil avec le Tableau.*

PL. I. La Figure donnée est ABCD. Il faut démontrer premiérement que sa
Fig. 4. Perspective *abcd* lui est semblable; c'est-à-dire, que les angles correspondants de ces deux Figures ABCD & *abcd*, sont égaux, & que leurs côtés sont proportionnels.

* 4 1. Quant aux angles, ils sont égaux, puisque * les lignes qui composent ces deux Figures sont parallèles entr'elles.

2\. Dans les Triangles semblables ADO & *adO*, on a

$$AD, ad :: OD, Od,$$

Et dans les Triangles semblables ODC & *Odc*, on a

$$DC, dc :: OD, Od$$

donc

$$AD, ad :: DC, dc.$$

altern.

$$AD, DC :: ad, dc.$$

Par conséquent les côtés AD & DC de la Figure ABCD sont proportionnels aux côtés *ad* & *dc* de la Figure *abcd*. On démontrera la même chose des autres côtés, & ainsi ces Figures sont semblables.

Pour l'autre partie du Théorème, si l'on suppose qu'on abaisse de l'œil une Perpendiculaire sur le Plan de la Figure, continué s'il est nécessaire, il est évident que OD sera à *Od* comme cette Perpendiculaire, qui mesure la distance de l'œil au Plan de la Figure, est à la distance de l'œil au Tableau, laquelle est mesurée par la partie de la Perpendiculaire comprise entre l'œil & le Tableau. Or nous avons déjà vu que

$$OD, Od :: AD, ad.$$

Donc il y a même rapport entre AD un des côtés de la Figure & *ad* sa Perspective, qu'entre les distances qu'on vient de marquer. La démonstration est la même pour les autres côtés de la Figure. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si d'un point du Plan géométral, partent trois lignes droites égales entr'elles & parallèles au Tableau, dont la premiére soit dans le Plan géométral, la seconde élevée en l'air perpendiculairement à la premiére, & la troisiéme inclinée; les Apparences de ces trois lignes sont égales. 10.

Cela paroit clairement, de ce qu'on peut considérer ces lignes comme une Figure parallèle au Tableau, & que par conséquent elles auront le même rapport avec leur Perspective.

Remarquez que la premiére de ces trois lignes est toujours parallèle à la Ligne de terre, & que la seconde, quand le Tableau est perpendiculaire, est aussi perpendiculaire au Plan géométral, & que la troisiéme alors a la premiére pour direction.

COROLLAIRE II.

Si deux lignes droites, égales entr'elles & parallèles au Tableau, sont également éloignées du Tableau, leurs Apparences seront égales. 11.

Car étant dans un Plan parallèle au Tableau, ces lignes auront un même rapport avec leurs Représentations.

THEOREME III.

Si une ligne parallèle au Tableau est regardée par deux yeux qui soient dans un Plan parallèle au Tableau, les Apparences de cette ligne seront égales. 12.

Si l'on suppose que par la ligne proposée, il passe un Plan parallèle au Tableau, on aura * cette proportion; la distance des yeux à ce Plan, est à leur distance au Tableau, comme la ligne donnée est à la Représentation de cette ligne. Mais les trois premiers termes de cette proportion sont les mêmes pour chacun de ces yeux qui sont dans un même Plan parallèle au Tableau. Par conséquent le quatriéme terme de cette proportion est aussi le même dans les deux cas. Ce qu'il falloit démontrer. * 9

THEOREME IV.

13. *Si une ligne droite étant continuée, rencontre le Tableau en un point, son Apparence sera une partie de la ligne menée de ce point dans le Tableau à un autre point, où aboutit une ligne droite qui part de l'œil parallèle à la ligne proposée.*

PL. I. Fig. 5. La ligne CD étant continuée, rencontre le Tableau dans le point E. Il faut démontrer que son Apparence est une partie de la ligne EH, qui est menée du point E au point H, où aboutit dans le Tableau, la ligne OH, qui part de l'œil parallèle à la ligne donnée CD.

L'intersection du Tableau avec le Plan ODC est la Représentation de la ligne donnée. Or ce Plan ODC est une partie du Plan qui passe par les parallèles OH & EC.

Donc cette Représentation est une partie de l'intersection de ce dernier Plan avec le Tableau; laquelle intersection est EH.

COROLLAIRE I.

14. *Toutes les lignes parallèles entr'elles, qui étant prolongées rencontrent le Tableau, ont des Représentations, qui étant prolongées, se rencontrent toutes dans un point.*

Cela est évident, puis qu'on ne peut tirer de l'œil O au Tableau, qu'une seule ligne OH, qui leur soit parallèle, & qu'ainsi toutes leurs Représentations sont des parties de lignes qui se rencontreront au point H.

DEFINITION XVII.

Ce Point est nommé le Point accidental de ces lignes parallèles.

COROLLAIRE II.

15. *Deux ou plusieurs lignes parallèles entr'elles & parallèles au Plan géométral, si elles ne le sont pas au Tableau, ont leur Point accidental dans la Ligne horisontale.*

Car le Plan horisontal est parallèle au Plan géométral.

COROLLAIRE III.

16. *Les Représentations de toutes les lignes parallèles à la Ligne de station, se rencontrent au point de vue.*

Cela suit de ce que le Rayon principal est parallèle à ces lignes.

Co-

COROLLAIRE IV.

Deux ou plusieurs lignes égales, étant perpendiculaires ou également inclinées de même part sur une même ligne parallèle à la Ligne de station, leurs Perspectives sont bornées par deux lignes qui aboutissent au point principal. 17.

Toutes ces lignes étant parallèles & égales, la ligne qui passe par leurs sommets est parallèle à celle qui passe par leurs bazes, & celle-ci étant parallèle à la Ligne de station, il s'ensuit * que les Apparences de toutes deux aboutissent au point principal. * 16

THEOREME V.

La Perspective d'une ligne indéfinie ne change point quand l'œil se meut dans une ligne parallèle à la ligne proposée. 18.

La Perspective de cette ligne est l'intersection du Tableau avec un Plan qui passe par l'œil & par cette même ligne. Or l'œil demeure dans ce même Plan quand il se meut dans une ligne parallèle à la ligne proposée; & par conséquent la Perspective de cette derniére ne change point par ce mouvement.

REMARQUE.

Cette Démonstration ne se rapporte point à chaque partie de la ligne donnée, mais à la ligne en général.

THEOREME VI.

Soit AC une ligne inclinée au Plan géométral, & OD une autre ligne tirée de l'œil au Tableau, & parallèle à la premiére AC. Maintenant qu'on méne dans le Plan géométral BA parallèle à la Ligne de terre, & DE dans le Tableau parallèle à la même Ligne; & qu'on les méne en sorte que BA soit à AC, comme ED à DO. Je dis que la Perspective de la ligne BC, qui passe par le point B, & par l'extrémité de la ligne AC, étant continuée, rencontre le point E. 19. PL. I. Fig. 6.

Il est évident * que pour démontrer cette vérité, il suffit de prouver que OE est parallèle à BC: ce qui se fait de la maniére suivante. * 13.

AB est parallèle à ED, & AC l'est à OD, par conséquent l'angle EDO du Triangle OED, est égal à l'angle BAC du Triangle ACB; & ainsi ces deux Triangles sont semblables, puis qu'ils ont d'ailleurs deux côtés proportionnels. Mais puis que ces deux Triangles semblables, ont

deux de leurs côtés parallèles, le troisiéme BC est aussi parallèle à OE. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

20. Si l'on fait AB égale à AC & ED égale à OD, la Perspective de BC passera par le point E.

CHAPITRE TROISIEME.

Pratique de la Perspective sur le Tableau perpendiculaire.

POUR donner une idée claire de la Théorie, j'ai considéré jusqu'ici le Plan géométral, comme un fond sur lequel seroient les objets & le Spectateur; & le Tableau comme une fenêtre entre le Spectateur & les objets, dans laquelle on voudroit représenter ce qui paroîtroit au dehors: mais pour la pratique, il faut concevoir la chose d'une toute autre maniére; ce que je vais expliquer le plus clairement qu'il me sera possible.

Supposons qu'un Peintre veuille dans un Tableau, dont il détermine la grandeur à son choix, dessiner une Campagne où il y ait des Arbres, des Maisons, des Riviéres, &c. Par ce que nous avons dit, cette Campagne sera son Plan géométral, & il devra considérer son Tableau comme une fenêtre, sur laquelle il doit trouver les points par où passent les rayons qui viennent de tous les points des objets vers son œil. Mais ces intersections des rayons & de la fenêtre, ne peuvent être déterminées que par des lignes menées dans le Plan géométral à la Ligne de terre. Or il seroit impossible aux Peintres, de mener de pareilles lignes dans une Campagne; ainsi il faut qu'ils prennent un autre Plan géométral plus commode.

Pour cet effet ils placent au bas de leurs Tableaux, un Plan, dans lequel ils tracent en petit les bazes des Maisons, & des Arbres qui sont dans la Campagne, & l'appui des points, qui, dans ces objets, sont élevés au dessus de la Campagne, en conservant dans ce nouveau Plan géométral, aux objets & à leurs diverses parties, la même disposition qu'elles ont véritablement entr'elles dans la Campagne.

A présent pour déterminer dans ce Plan la grandeur de l'espace que doivent occuper ces Figures, un Peintre, après avoir choisi la disposition qu'il veut donner à son œil par rapport au Tableau, doit tirer du Point

de ſtation, par les extrémités du Tableau, deux lignes qui borneront l'endroit où ces Figures doivent être placées, puiſque les rayons qui, des Figures qui ſeroient au delà de ces lignes, partiroient vers l'œil, ne paſſeroient plus par le Tableau.

Ces Figures étant ainſi tracées dans le Plan géométral, il ne s'agit plus que d'en trouver la Perſpective dans le Tableau: mais ces Figures ne conſiſtent que dans des lignes droites ou courbes. Pour trouver la repréſentation d'une ligne droite, il faut chercher ſeulement celle de ſes extrémités; & pour avoir l'Apparence d'une ligne courbe, il ne faut que trouver la Perſpective de pluſieurs de ſes points. Or comme tout ceci convient également aux Figures qui ſont dans le Plan géométral, & à celles qui ſont au-deſſus, il s'enſuit que toute la pratique de la Perſpective ſe réduit à ſavoir trouver la repréſentation d'un point. 21.

Pour trouver cette repréſentation, nous n'employons dans les Problèmes ſuivants que certaines lignes tirées dans le Plan géométral & dans le Plan horizontal, leſquelles par leur interſection avec la Ligne de terre & avec la Ligne horizontale, donnent le moyen de tracer dans le Tableau de nouvelles lignes, qui déterminent les Perſpectives propoſées. Or il eſt viſible que pour trouver ces interſections, il n'eſt pas néceſſaire de placer ſon Tableau perpendiculaire au Plan géométral & au Plan horizontal, ce qui rendroit le travail très pénible. On peut donc conſidérer le Tableau & le Plan horizontal, comme couchés ſur le Plan géométral, & ne faiſant qu'un même Plan avec lui.

Le Tableau peut être couché de deux maniéres, ou ſur la face qui regarde les objets, ou ſur celle qui eſt du côté de l'œil. Comme dans cette ſeconde ſituation on trace ſes repréſentations ſur la face qui eſt vers les objets, le Tableau étant couché ſur ſon autre face, ce qui doit être à droit dans ces repréſentations eſt à gauche, & ce qui doit être à gauche eſt à droit; cela faiſant le même effet que ſi après avoir fait un Deſſin, on le regardoit par derrière.

Malgré ce défaut nous préférons cette ſeconde manière de coucher le Tableau à la première: en voici les raiſons. 1. Quand on couche le Tableau de l'autre façon, on le couche ſur l'endroit du Plan géométral où il y a déja des Figures tracées, ce qui avec les nouvelles lignes qu'on eſt obligé de tirer, cauſe une confuſion très incommode, & oblige toujours à faire une copie de ſon ouvrage. Inconvénient auquel par la ſeconde méthode on eſt rarement expoſé. 2. Par la manière que nous avons choiſie, on travaille avec beaucoup plus de facilité. Enfin on peut remédier en pluſieurs manières au défaut que nous avons marqué: car en traçant ſon Plan géométral, on n'a qu'à mettre à droit ce qu'on veut repréſenter

à gauche : ou ſi le Plan géométral eſt tracé ſur du papier, on peut en le frottant d'huile ou de vernis le rendre tranſparent, & mettre enſuite en Perſpective le revers du papier. Et ſi tout cela n'accommode pas, après avoir achevé ſon ouvrage, on peut en le copiant y corriger ce défaut ; ce que l'on peut faire aiſément par la Géométrie, & ſi l'on veut plus facilement encore, en appliquant à la vitre le côté ſur lequel on a tracé la Perſpective.

Je couche donc mon Tableau ſur le Plan géométral, en ſorte qu'il eſt entre le Plan horizontal, & les Figures qu'il faut mettre en Perſpective.

PROBLEME I.

22. *Trouver la Perſpective d'un point qui eſt dans le Plan géométral.*

Pl. I. Fig. 7. Soit Z le Plan géométral, X le Tableau, IE la Ligne de terre, DV la Ligne horizontale, V le Point de vue, D un des Points de diſtance, & A le point donné.

PRATIQUE.

Du point A, abaiſſez la perpendiculaire AB ſur la Ligne de terre, & du point de rencontre B, menez la ligne BV au Point de vue ; prenez ſur la Ligne de terre, BE égale à BA, & du point E tirez la ligne ED au Point de diſtance D : le point *a*, interſection de BV & de ED, eſt la Perſpective cherchée.

DEMONSTRATION.

23. La Perſpective de la ligne AB eſt * une partie de la ligne BV. Si
* 16 on ſuppoſe que de l'œil il parte une ligne vers le point D, & une autre du point A vers le point E, ces deux lignes ſeront parallèles, étant dans des plans parallèles, & faiſant chacune avec le Tableau un angle demi-
* 13 droit ; & par conſéquent la Perſpective de la ligne AE eſt * une partie de la ligne ED. Or puiſque le point A, eſt dans les deux lignes AB & AE, la Perſpective de ce point ſera auſſi dans les Perſpectives de ces deux lignes, & par conſéquent en *a*, commune ſection de BV, & de ED.

REMARQUE.

24. Si la diſtance de l'œil étoit trop grande pour qu'on put marquer un des

Points de diſtance ſur la Ligne horizontale, on pourroit ſe ſervir d'un autre point F, qui ne ſeroit éloigné du Point de vue que du tiers ou du quart de la diſtance de l'œil, pourvu qu'on prît alors auſſi une partie correſpondante de la perpendiculaire AB, pour la porter ſur la Ligne de terre de B en G.

C'eſt ainſi qu'on peut trouver la Perſpective d'un point fort éloigné, 25.
pourvu que l'on connoiſſe ſa diſtance au Tableau, & l'endroit où une perpendiculaire tirée de ce point rencontreroit la Ligne de terre. Car après avoir mené une ligne comme BV, de cette rencontre au Point de vue, il faut prendre ſur la Ligne de terre BE égale, par exemple, à la dixiéme partie de la diſtance du point dont on cherche la Perſpective, & VH ſur la Ligne horizontale, égale de même à la dixiéme partie de la diſtance de l'œil. Alors C interſection de BV, & de EH, ſera la Perſpective demandée. On doit employer cette méthode pour trouver les lointains dans les Tableaux.

On peut encore trouver la Perſpective du point A ſans tirer la ligne BV, en prenant BI auſſi égale à BA, & en tirant de ce point I une ligne à l'autre Point de diſtance, laquelle donnera la Perſpective du point A par ſon interſection avec ED.

SECONDE METHODE.

Le Plan horizontal eſt Y, X le Tableau, Z le Plan géométral, O 26. *PL. II. Fig. 1.*
l'œil, DC la Ligne horizontale, BE la Ligne de terre, & A le point donné.

PRATIQUE.

Du point A tirez à l'œil O une ligne qui coupe la Ligne de terre au point B, & la Ligne horizontale au point C; prenez ſur la Ligne de terre BE égale à BA, & ſur la Ligne horizontale CD égale à CO, joignez les points E & D par une ligne, qui coupera la ligne AO dans le point *a*, qui ſera la Perſpective cherchée.

DEMONSTRATION.

Le Triangle ODC dans le Plan horizontal, eſt ſemblable au Triangle 27.
ABE dans le Plan géométral; par conſéquent AB eſt paralléle à OC, & AE à OD. Donc la Perſpective de A doit être * dans les lignes BC * 13
& ED, & par conſéquent en *a*, leur interſection.

REMARQUE.

28. Si l'on ne connoiſſoit point l'endroit où doit être placé l'œil dans le Plan horizontal, mais que l'on eut le Point de vue; alors pour trouver l'endroit de l'œil, il faudroit élever dans le Point de vue à la Ligne horizontale une perpendiculaire, égale à la longueur du Rayon principal; l'extrémité de cette Perpendiculaire ſeroit le point cherché.

Quand rien n'eſt déterminé, on peut prendre à diſcrétion dans le Plan horizontal, l'endroit où l'on veut placer l'œil.

TROISIEME METHODE.

29. *PL. II. Fig. 2.* Les mêmes choſes étant données que dans la méthode précédente, de l'œil O comme centre, décrivez la portion de cercle IH, qui raſe la Ligne horizontale.

PRATIQUE.

Du point donné A comme centre, décrivez la portion de cercle LC, raſant la Ligne de terre. Puis menez les deux lignes CH & LI, dont chacune raſe les deux cercles LC & HI. Le point *a*, interſection de ces deux lignes, eſt la Perſpective cherchée.

DEMONSTRATION.

30. Pour le démontrer, tirez la ligne AB, perpendiculaire à la Ligne de terre; OV perpendiculaire à la Ligne horizontale; AC & OH perpendiculaires à la Tangente HC. Toutes ces perpendiculaires rencontrent les lignes, auxquelles elles ſont perpendiculaires, dans les points où ces dernières touchent le cercle LBC, ou HVI. Tirez auſſi du point donné A, la ligne AE au point E, où la ligne HC coupe la Ligne de terre; enfin tirez OD de l'œil O au point D, où la même ligne HC coupe la Ligne horizontale.

Il eſt évident * que pour démontrer que la Perſpective de A eſt dans la
* 27 ligne CH, il ſuffit de prouver que OD eſt parallele à AE. Je le prouve ainſi.

A cauſe des Triangles ſemblables OGV & ABF.

AF, AB : : OG, OV.

altern.

AF, OG : : AB, OV.

Divid. & altern. la première proportion.

AF-AB=CF, OG-OV=HG : : AB, OV.

Mais à cause des Triangles semblables ECF & HGD.

CF, HG : : EF, GD.

Donc si l'on a égard aux deux dernières proportions des autres Triangles,

EF, GD : : AF, OG,

& l'angle AFE étant égal à l'angle OGD, les Triangles AEF & ODG sont semblables ; & par conséquent, AE est parallèle à OD. Ce qu'il falloit démontrer. On démontrera de même que la Perspective du point A est dans la ligne LI, & par conséquent en *a*, intersection de cette ligne avec HC.

R E M A R Q U E.

Bien que cette méthode paroisse plus difficile que les précédentes, à la considérer géométriquement, elle ne laisse pas d'être plus aisée dans la pratique pour les points qui ne sont pas trop éloignés de la Ligne de terre : car on peut fort bien tirer à la vue, des cercles qui rasent des lignes, & des lignes qui rasent des cercles.

QUATRIÈME MÉTHODE.

Par l'œil O tirez à la Ligne de terre la parallèle FOG ; prenez sur cette ligne FO égale à la hauteur de l'œil, & OG égale à la longueur du Rayon principal. A est le point donné. 31. *PL. III. Fig.* 1.

P R A T I Q U E.

Sans employer le compas.

Menez du point donné A, aux points O & F, les lignes AO & AF, & du point E, où AF coupe la Ligne de terre, tirez au point G la ligne EG ; le point *a*, intersection de AO & EG, est la Perspective cherchée.

D E M O N S T R A T I O N.

Du point G abaissez sur la Ligne de terre la perpendiculaire GM, & menez par l'œil O la ligne OD au point D, intersection de la Ligne horizontale avec GE. 32.

A cause des Triangles semblables GDL & GEM.

GD, GE : : GL, GM.

Mais GO a été faite égale à GL, & OF à LM

donc

GD, GE : : GO, GF

& par conféquent les Triangles GOD & GFE font femblables, & les
* 13 lignes OD & AEF paralléles entr'elles, & ainfi * la Perfpective de
* 27 AE eft une partie de la ligne EDG. On a démontré d'ailleurs * que la Perfpective du point A eft dans la ligne AO; par conféquent elle eft en *a*, interfection de cette dernière ligne avec EDG. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

33. On voit par cette Démonftration qu'il n'eft pas néceffaire de prendre juftement GO égale à la diftance de l'œil, & OF égale à fa hauteur, mais qu'il fuffit que ces deux lignes ayent entr'elles la même proportion qui eft entre cette diftance & cette hauteur. Il n'eft pas même néceffaire de prendre les points G & F dans une ligne paralléle à la Ligne de terre, mais on peut fe fervir de quelqu'autre ligne que ce foit, qui paffe par l'œil O. Soit par exemple *g*O*f* une ligne menée au hazard par l'œil O; prenez à difcrétion fur cette ligne le point *g*, par lequel menez auffi à difcrétion la ligne *g* NI, coupant la Ligne horizontale en N, & la Ligne de terre en I; menez la ligne ON, & par le point I menez lui une paralléle I*f*, coupant la ligne *g*O*f* en *f*.

On pourra fe fervir alors des points *g* & *f* au lieu de G & F; car il eft évident que dans toutes les lignes qu'on pourra mener, comme *g*NI, *g*N fera toujours à *g*I : : *g*O, *gf*, ce qui fuffit pour la Démonftration.

Si on avoit premiérement déterminé le point *f*, on auroit trouvé le point *g*, par une opération contraire à celle que nous venons de décrire.

34. Quand rien n'eft déterminé on peut, après avoir tiré une ligne qui doit fervir de Ligne de terre, prendre à difcrétion, fur une autre menée au hazard, les trois points *g*O*f*; de forte que dans ce cas on n'a en aucune maniére befoin du compas pour mettre en Perfpective quelque Figure que ce foit, qui eft dans le Plan géométral. Mais fi après avoir travaillé de la forte, on vouloit connoître le Point de vue, la diftance & la hauteur de l'œil, il faudroit par les points *f* & O abaiffer fur la Ligne de terre, les perpendiculaires *f*P & OH, & mener la ligne P*g*; le point V où elle coupe la perpendiculaire OH eft le Point de vue cherché, & les parties OV & VH déterminent la diftance & la hauteur de l'œil.

CINQUIEME METHODE.

Quand on a la Perfpective d'un point connu.

35.

Pl. IV. Fig. 1. Soit A un point dans le Plan géométral, *a* fa Repréfentation dans le Tableau, il faut trouver celle de B.

PRA-

P R A T I Q U E.

Sans employer le Compas.

Menez du point B une ligne à l'œil O, & une autre au point A ; du point E, où cette derniére étant continuée rencontre la Ligne de terre ; tirez la ligne E*a*, qui par son intersection avec BO donne le point cherché *b*.

D E M O N S T R A T I O N.

Le point E est sa propre Représentation: & puisque le point *a* est la 36.
Représentation de A, la ligne E *a* est celle de EA. Or puisque le point B est dans la ligne EA, la Perspective de ce point sera aussi dans E*a*, de même que dans BO * & par conséquent en *b*, intersection de ces deux * 27
lignes.

R E M A R Q U E.

Si le point A étoit dans la ligne BO, ou que la ligne BA fût parallèle 37.
ou fort peu inclinée à la Ligne de terre, on ne pourroit se servir de cette méthode, qu'en trouvant par le moyen du point A la Perspective d'un autre point pris à discrétion dans le Plan geométral, laquelle serviroit dans la suite pour trouver celle du point B ; mais le plus court dans ces cas là, est d'employer quelqu'une des méthodes précédentes.

C O R O L L A I R E.

On voit par cette méthode que quand on a la Perspective de deux 38.
points que l'on connoit, on peut trouver celle de quelqu'autre que ce soit, sans avoir égard à la situation de l'œil, puisque dans ce cas on peut mener deux lignes telles que E*a*, qui par leur intersection donnent le point cherché.

SIXIEME METHODE.

Les mêmes choses étant données que dans la méthode seconde, soit 39.
FC la Ligne géométrale. *PL. IV. Fig. 2.*

P R A T I Q U E.

Du point donné A menez à discrétion deux lignes AF & AC, qui

coupent la Ligne de terre dans les points E & B, & rencontrent la Ligne géométrale dans les points F & C. De ces deux derniers points menez à l'œil les lignes FO & CO, puis par le point E menez E*a* parallèle à FO, & par le point B, B*a* parallèle à CO. Le point *a* intersection de ces deux lignes sera le point cherché.

On peut aussi commencer par tirer au hazard les lignes OF & OC, & mener par leur rencontre avec la Ligne géométrale, les lignes AC & AF; ce qui revient à la même chose.

DEMONSTRATION.

Pour la Démonstration, ayant continué la ligne E*a* jusques à ce qu'elle rencontre la Ligne horizontale en D, menez une ligne de D à l'œil, & menez par l'œil une parallèle à la Ligne de terre.

Les parallèles OM & FC sont autant éloignées l'une de l'autre que LD l'est de EB; d'où il s'ensuit que FO est égale à ED, & partant
* 13 OD parallèle à FA. Donc * la Perspective de EA est une partie de ED. On démontrera de même que la Perspective de BA est une partie de B*a*.

REMARQUE.

40. Quand on n'a rien de tracé, & que l'on veut employer cette méthode, on peut se passer de la Ligne horizontale; & alors après avoir tracé la Ligne géométrale, dont la distance à la Ligne de terre est égale à la longueur du rayon principal, on prend la distance de l'œil à la Ligne géométrale égale à la hauteur de l'œil.

41. Quoique cette méthode paroisse inutile, étant plus difficile que les précédentes, nous montrerons dans le Chapitre huitiéme l'usage qu'on en peut tirer.

COROLLAIRE.

42. Il suit de cette Démonstration que les Perspectives des lignes qui passent par le Point de station, sont toutes perpendiculaires à la Ligne de terre. Car si de l'œil O on abaisse sur la Ligne géométrale la perpendiculaire OS, les Perspectives de toutes les lignes qui passent par S seront perpendiculaires à la Ligne de terre; mais ce point S est le Point de station. Donc &c.

PROBLEME II.

43. *Mettre en Perspective une ligne qui est dans le Plan géométral.*

* 21 J'ai dit * que pour avoir la Perspective d'une ligne droite, il suffisoit de

trouver celle des extrémités de cette ligne ; & quoi qu'il ne ſoit pas malaiſé de trouver * la Perſpective de deux points, j'ajouterai néanmoins ici * 22
la maniére de trouver plus facilement en certains cas la Perſpective d'une ligne.

1. Soit AB une ligne parallèle à la Ligne de terre. Pour en avoir la PL. IV. Fig. 3.
Perſpective, après avoir trouvé le point *a* Perſpective de A, une des extrémités de cette ligne; menez par cette Perſpective une parallèle à la Ligne de terre; bornez cette parallèle par la ligne BO menée de B à l'œil: alors *ba* ſera la Perſpective cherchée.

2. Soit CG une ligne, qui étant continuée rencontre la Ligne de terre en E. Pour en trouver la Perſpective, menez à cette ligne, par l'œil 44.
O, une parallèle qui rencontre la Ligne horizontale en D; joignez les points E & D par une ligne ED; coupez cette ligne aux points *c* & *g*, par des lignes qui des points C & G aboutiſſent à l'œil; la partie *cg* de la ligne ED eſt la Perſpective cherchée.

REMARQUE.

Si les lignes GO & CO rencontroient trop obliquement ED, pour qu'on put déterminer exactement leurs interſections, on ne pourroit pas ſe ſervir de cette méthode.

PROBLEME III.

Trouver la Perſpective des diviſions d'une ligne qui eſt dans le Plan géométral. 45.

Soit AB une ligne dont la Perſpective eſt *ab*. Pour trouver la Repré- PL. V. Fig. 1.
ſentation des diviſions de cette ligne, il faut mener de ces diviſions à l'œil, des lignes qui par leurs interſections avec *ab*, donneront les points que l'on cherche.

Quand ces lignes rencontrent trop obliquement *ab*, on doit ſe ſervir de la méthode ſuivante.

SECONDE METHODE.

Pour trouver la Perſpective des diviſions de la ligne GC, prenez à 46.
diſcretion, hors de cette ligne, le point D, dont il faut trouver * la Per- * 22.
ſpective *d*; puis par les diviſions propoſées, menez des lignes à ce point D, & des points où ces lignes prolongées rencontrent la Ligne de terre; menez par la Perſpective *d*, d'autres lignes, qui par leur rencontre avec *cg*, Repréſentation de CG, donneront les diviſions cherchées.

PROBLEME IV.

47. *Mettre en Perspective un Poligone, ou quelque autre Figure, qui est dans le Plan géométral.*

* 21 On peut * trouver la Perspective de toutes sortes de figures, par chacune
* 22 des méthodes du Problème 1. * La quatriéme * généralement est la plus fa-
* 31 cile; on peut s'en servir d'abord pour trouver la Perspective de quelques points, ou quelquefois seulement d'un seul; après quoi la méthode cin-
* 35 quiéme * sert à trouver le reste. Quelquefois encore on abrége par les deux Problèmes précédents, comme on le verra dans les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

Mettre en Perspective un Pentagone, qui a un de ses côtés parallèle à la Ligne de terre.

PL. V. Soit ABCDE le Pentagone proposé, dans lequel tirez la ligne BD,
Fig. 2. qui sera parallèle à AE, parce que le Pentagone est régulier.
* 44 Trouvez * la Perspective de ces deux lignes AE & BD, & vous aurez celle de quatre coins du Pentagone; pour déterminer le cinquiéme,
* 43 cherchez * la Perspective d'une ligne qui aille de C en E, & qui dans l'exemple présent est parallèle à la Ligne de terre, AB ayant été fait parallèle à la même Ligne.

EXEMPLE II.

Mettre en Perspective un Parallélograme, partagé en plusieurs autres Parallélogrames.

PL. VI. Soit ABCD un Parallélograme, partagé en plusieurs autres.
Fig. 1. Menez par l'œil O à la ligne AD, la parallèle OG, qui rencontre la Ligne horizontale en G; menez aussi à AB la parallèle OF, rencontrant la même Ligne horizontale en F. Prolongez les côtés du Parallélograme & les lignes qui le divisent, jusques à la Ligne de terre; & des points où aboutissent AD, CB, & les lignes qui leur sont parallèles, menez des lignes au point G. De même des points où aboutissent AB & DC avec leurs parallèles, il faut tirer au point F des lignes, qui par leur intersection avec celles qui vont au point G, donneront la Perspective que l'on cherche.

REMARQUE.

Quand on ne peut pas uſer de la méthode que nous venons de donner, il faut trouver * la Perſpective des diviſions qui partagent les côtés du Pa- * 45
rallélograme. Souvent même on doit avoir recours à cet expédient pour quelques-uns des côtés, quoi qu'on ait les points accidentaux G & F. Cela arrive quand le Parallélograme eſt ſi éloigné du Tableau, que ſes côtés étant prolongés ne peuvent pas rencontrer la Ligne de terre.

Remarquez encore que cet exemple ſeul peut ſuffire pour mettre en 48.
Perſpective toutes ſortes de figures, quand elles ſont dans le Plan géométral: pour cet effet on circonſcrit à ces figures un Parallélograme quelconque, & on le diviſe en pluſieurs autres: on met en Perſpective ce Parallélograme ainſi diviſé, & on y tranſporte la figure donnée, en lui donnant par rapport aux petits Parallélogrames dans le Tableau, la même ſituation qu'elle avoit à l'égard des petits Parallélogrames dans le Plan géométral.

EXEMPLE III.

Mettre en Perſpective un Cercle. 49.

Il faut * trouver la Repréſentation de pluſieurs points d'un Cercle, ou PL. V. *Fig.* 2.
de quelqu'autre ligne courbe que l'on veut mettre en Perſpective. On le * 21
fait commodément en menant dans cette Courbe pluſieurs cordes parallèles entr'elles, dont on trouve * les Perſpectives, par les extrémités deſ- * 44
quelles on méne une ligne courbe, qui eſt la Perſpective cherchée. On pourroit trouver la même choſe en faiſant paſſer ces cordes par un point dont on auroit la Perſpective.

REMARQUE.

Soit G I *la Ligne géométrale. Par le centre* P *du Cercle, dont on cher-* 50.
che la Perſpective, abaiſſez à cette ligne la perpendiculaire PF, *que vous diviſerez en deux également en* R. *De* R *comme centre, & pour rayon* RP, *décrivez la portion de Cercle* MPN, *coupant le Cercle donné en* M *& en* N. *Si alors on trouve la Perſpective de* LH *& de* NM, *on aura deux diamétres conjugués d'une Ellipſe qui eſt la Perſpective cherchée, & qu'on peut décrire par quelqu'une des méthodes que donnent les Auteurs, qui ont traité des Sections coniques.*

Je ne m'arrêterai pas ici à démontrer cette vérité. Voyez la prop. 10.

livr. 2. du grand Ouvrage Latin ſur les Sections coniques, composé par Mr. de la Hire, dont la démonſtration peut s'appliquer ici. Si l'on conſidére 1. Que c'eſt dans les points M *&* N *que les Tangentes menées au Cercle du point* F, *touchent le Cercle. 2. Que les rayons viſuels, qui partent de l'œil vers tous les points de la circonférence du Cercle, forment un cone. 3. Que la Perſpective du Cercle, eſt la ſection de ce cone par le Tableau. Enfin on doit conſidérer la ligne* GI, *comme ſi c'étoit l'interſection du Plan géométral avec un Plan, qui paſſeroit par l'œil, parallèle au Tableau.*

PROBLEME V.

51. *Trouver la Perſpective d'un point en l'air au deſſus du Plan géométral.*

PL. VI. Fig. 2. Soit GS la Ligne géométrale, S le Point de ſtation. Prenez SF, ſur la Ligne géométrale, égale à la hauteur de l'œil. A eſt l'aſſiéte du point donné.

PRATIQUE.

Portez ſur la Ligne géométrale FC, égale à la hauteur du point donné au-deſſus du Plan géométral; puis menez du point A des lignes aux points S & C; & dans le point B, interſection de la ligne AS avec la Ligne de terre, élevez à la Ligne de terre la perpendiculaire BI, égale à EB plus FC, & le point I ſera la Perſpective cherchée.

DEMONSTRATION.

52. Suppoſons que par l'œil & par le point propoſé il paſſe un Plan perpendiculaire au Plan géométral. Il eſt évident que l'interſection de ces deux Plans eſt la ligne ABS, & que l'interſection du Plan que nous venons de ſuppoſer avec le Tableau, eſt BI. Soit maintenant X ce Plan, *abs* les points marqués des mêmes lettres dans la figure précédente, *bi* eſt l'interſection de ce Plan avec le Tableau, O eſt l'œil & D le point propoſé; il faut démontrer que ſi on méne OD, la ligne BI de la figure précédente ſera égale à *bi* dans cette figure; pour cet effet menez par le point D la ligne DLM, parallèle à *abs*. Dans les Triangles ſemblables DMO & DL*i*, on a

PL. VI. Fig. 3.

$$DM = as,\ DL = ab :: MO,\ Li.$$

Dans la figure précédente on a les Triangles ſemblables ASC & ABE, par conſéquent

$$AS,\ AB :: CS,\ EB.$$

les trois premiers termes de ces deux progressions sont les mêmes; car CS est égal à MO, puis qu'ils sont tous deux la différence de la hauteur du point donné avec la hauteur de l'œil; par conséquent EB est égal à L*i*; mais BI a été fait égal à BE, plus FC la hauteur du point donné au-dessus du Plan géométral, & *bi* est égale à L*i*, plus *b*L, qui étant égale à *a*D, est aussi la hauteur du point donné au-dessus du Plan géométral; donc ces deux lignes BI & *bi* sont égales entr'elles. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Quand la hauteur du point donné est plus grande que la hauteur de l'œil, il faut retrancher de cette première hauteur EB, pour avoir la grandeur de BI.

PROBLEME VI.

Mettre en Perspective une Piramide ou un Cone. 53.

Pour la Piramide, trouvez * la Perspective de la baze de la Piramide, & * celle de son sommet; puis de la Perspective du sommet menez des lignes à la Perspective des angles de la baze, visibles à l'œil pour lequel on travaille, & on aura la Perspective demandée. *PL. VII. Fig. 1.* * 47 * 51

Pour le Cone, après avoir trouvé * la Perspective de sa baze & * celle de son sommet, il faut mener par la Perspective du sommet des lignes qui rasent la représentation de la baze, & on aura la Perspective du Cone. Mais comme de cette maniére on est obligé de chercher la Perspective de toute la baze, quoi qu'il y en ait une partie qui ne peut pas être vue, on pourra par la méthode suivante déterminer sur la baze la partie qui en est visible, dont il suffira de trouver la Perspective; alors pour achever celle du Cone, des extrémités de la partie visible de la baze, on ménera des lignes à la Perspective du sommet. *PL. VII. Fig. 2.* * 47 * 51

Déterminer la partie visible de la baze d'un Cone. 54.

Soit le cercle LIF la baze du Cone dans le Plan géométral, A le centre de ce cercle. *PL. VII. Fig. 3.*

PRATIQUE.

Prenez, en quelque endroit de la Ligne de terre, PQ égale au demi-diamétre du cercle LF; élevez au point P à la Ligne de terre la perpendiculaire PDG, rencontrant la Ligne horizontale en G; prenez sur

cette perpendiculaire PD égale à la hauteur du Cone, & menez la ligne QDH, qui rencontre la Ligne horizontale en H. De A comme centre, prenant pour rayon GH, tracez le cercle BCE, & du même point A, menez une ligne au Point de ſtation S; diviſez AS en deux parties égales en R; & de R, comme centre, par le rayon RA, decrivez l'arc de cercle BAC, coupant le cercle BEC dans les points B & C; menez les lignes BAF & CAL, & vous déterminerez la portion viſible LIF du cercle de la baze du Cone.

DEMONSTRATION.

Pour la Démonſtration, tirez les lignes BC *&* LF, *qui coupent la ligne* AS *en* N *&* en M; *prenez* G*n égale à* AN, *& menez la ligne n*D*m. Il eſt clair que ſi l'on continuë le Cone au-deſſus de ſon ſommet, c'eſt-à-dire, qu'on forme le Cone oppoſé, ce Cone coupera le Plan horizontal dans un cercle égal à* BEC, *& dont* BEC *ſera l'aſſiéte: de ſorte que le point* S *eſt à l'égard de* BEC, *dans la même ſituation qu'auroit l'œil, par rapport au cercle formé dans le Plan horizontal par la continuation du Cone; d'où il s'enſuit que* BC *eſt l'aſſiéte de la portion viſible de ce cercle; car par la conſtruction,* B *&* C *ſont les points d'attouchement des Tangentes au cercle* BEC, *qui paſſeroient par le point* S, *puiſque l'angle* ABS, *étant dans un demi-cercle, ſeroit droit.*

Maintenant ſi on ſuppoſe un plan qui paſſe dans le Plan horizontal par les points dont B *&* C *ſont l'aſſiéte, & qui coupe les deux Cones oppoſés en paſſant par leur ſommet, il eſt évident que ce plan continué coupera le Plan géométral dans une ligne qui ſera parallèle à* BNC, *& que cette ligne déterminera ſur ce plan la portion viſible de la baze du Cone. Ainſi, puiſque* G*n a été faite égale à* AN, *il ſuffit de démontrer que* P*m eſt égale à* AM. *Car il s'enſuivra de là que* LMF *eſt la commune ſection du Plan géométral avec le plan que nous avons imaginé deſcendre du Plan horizontal.*

Dans les Triangles ſemblables DQP *&* GHD,

DG, DP : : GH, PQ.

A cauſe des Triangles ſemblables DP*m* *&* DG*n*,

DG, DP : : G*n*, P*m*,

donc

GH, PQ : : G*n*, P*m*.

Les Triangles ſemblables BAN *&* LAM *donnent*

BA, AL : : AN, AM.

Mais les trois prémiers termes de ces deux derniéres proportions ſont égaux entr'eux; donc P*m eſt auſſi égal à* AM. *Ce qu'il falloit démontrer.*

RE-

Remarque.

Quand la hauteur du cone est plus grande que celle de l'œil, les points G & H se trouvent au dessous du point D. Dans ce cas-là on prolonge les lignes AB & AC, en sorte qu'elles coupent le cercle dans les points *l* & *f* opposés à L & F: & la partie *lIf* est la partie visible. 55.

Quand le cone est incliné, de sorte que T, par exemple, soit l'assiéte de son sommet, il faut mener AT, & après avoir pris PD égale à la hauteur perpendiculaire du cone, & P*t* égale à AT, il faut mener la ligne *t*D*x*, & prendre sur AT, la partie TX égale à G*x*; puis, après avoir mené XS, menez lui la parallèle A*s* qui lui soit égale; après quoi il faut appliquer entiérement ici l'opération que j'ai décrite pour le cone perpendiculaire, avec cette seule différence, qu'il faut se servir du point *s*, au lieu de se servir du Point de station S. Quand la hauteur du cone est plus grande que celle de l'œil, il faut prendre le point X sur la ligne TA, entre les points T & A.

La raison de toute cette opération est évidente, après la démonstration du cone perpendiculaire; car il est clair que x est l'assiéte du centre du cercle, que forme dans le Plan horizontal le cone continué; par conséquent le point s, est à l'égard du cercle BED, *dans la même situation que le seroit l'œil à l'égard de l'intersection du cone continué & du Plan horizontal.*

Remarquez encore que par la méthode ordinaire la Perspective du cone ne peut presque jamais être aussi exacte qu'elle le sera par celle-ci.

PROBLEME VII.

Trouver la Perspective d'une ligne, perpendiculaire au Plan géométral. 56.

Il faut trouver l'apparence d'une ligne égale à BC, & perpendiculaire au Plan géométral dans le point A. *PL. VII. Fig. 4.*

Pratique.

Prenez en quelque endroit que ce soit de la Ligne de terre, ED égale à BC; des points D & E tirez DF & EF au point F, pris à discrétion dans la Ligne horizontale. Ensuite ayant trouvé * *a*, Représentation du point A, menez *a*H parallèle à la Ligne de terre, & *a*I perpendiculaire à cette même ligne, & vous aurez la Perspective cherchée en faisant *a*I égale à GH. * 22

DEMONSTRATION.

57. Cette Perſpective doit être perpendiculaire à la Ligne de terre *, &
* 6 égale * à la Perſpective de la ligne AL, qu'on tirera du point A paral-
* 10 lèle à la Ligne de terre, & qu'on fera de la même grandeur que BC. Si des extrémités de la ligne AL, on abaiſſe à la Ligne de terre des perpendiculaires qui la rencontrent dans les points P & M, & que de ces
* 5. 16 points on méne des lignes au point de vue V, alors *a*N ſera * la Perſpective de AL; & puiſque PM eſt égale à DE, *a*N le ſera auſſi à GH, & par conſéquent *a*N ſera égale à *a*I, qui eſt égale à GH.

SECONDE METHODE.

58. PL. VIII. Fig. 1. Les mêmes choſes étant données que dans la méthode précédente.

PRATIQUE.

De A comme centre & pour rayon BC, décrivez l'arc de cercle LM, & tirez par l'œil la ligne OL qui le raze; puis du centre *a*, Repréſentation de A, décrivez l'arc de cercle GI, razant la même ligne LO, & coupant dans le point I une autre ligne qui paſſe par *a*, & qui eſt perpendiculaire à la Ligne de terre; ce point ſera l'extrémité de la Perſpective cherchée.

DEMONSTRATION.

Pour la Démonſtration, abaiſſez ſur la ligne OL les perpendiculaires AL & *a*G, qui la rencontrent dans ſes points d'atouchement aux cercles ML & GI.

Prenez auſſi ſur la Ligne de terre DE, égale à BC ou AL, & tirez la ligne DF; puis menez par *a*, *a*H parallèle à la Ligne de terre.

PL. VIII. Fig. 2. Conſidérez à préſent la figure **X** qui repréſente un plan qui paſſe par l'œil & par le point A de la figure précédente; *of*, y repréſente OF; *fe*, y repréſente FE; & enfin *e*A, y repréſente EA de la même figure précédente.

* 27 *of* eſt * parallèle à *eA*, & par conſéquent le Triangle *ofa* eſt ſemblable au Triangle *aeA*, & ainſi l'on a cette proportion.

$$of,\ fa\ ::\ Ae,\ ea$$

comp.

$$of + fa,\ fa\ ::\ Ae + ea,\ ea$$

altern.

$$of + fa,\ Ae + ea\ ::\ fa,\ ea$$

comp. & perm.

$$of + fa + Ae + ea,\ of + fa\ ::\ fa + ea,\ fa$$

Cette derniére proportion étant réduite à la figure précédente, elle donne celle-ci,

OA, O*a* : : FE, F*a*.

A cauſe des Triangles ſemblables OAL & O*a*G.

OA, O*a* : : AL, *a*G,

& par les Triangles ſemblables FED & F*a*H

FE, F*a* : : DE, H*a*,

& par conſéquent ſi l'on conſidére ces trois proportions, on aura

AL, *a*G : : DE, H*a*

Mais DE a été faite égale à AL ; donc *a*G ou *a*I l'eſt auſſi à *a*H, qui * eſt égale à la Perſpective que l'on cherche. Ce qu'il falloit démontrer. * 57

TROISIEME METHODE.

Vers un des côtés du Tableau, élevez à la Ligne de terre la perpendiculaire CB, égale à la hauteur de l'œil ; & prenez ſur cette perpendiculaire BL, égale au double de la perpendiculaire dont on demande la Perſpective. S eſt le Point de ſtation ; A celui où la perpendiculaire rencontre le Plan géométral. 59. *PL. VIII. Fig.* 3.

PRATIQUE.

Sans employer le Compas.

Après avoir trouvé * *a* Perſpective de A, menez la ligne AS coupant la Ligne de terre en E, par lequel point E menez la ligne E*a* ; du point B, menez au point *a* une ligne B*a*, coupant la Ligne horizontale en F ; par le point F, menez au point L une ligne, qui coupe E*a* en I ; alors *a*I eſt la Perſpective cherchée. * 31

DEMONSTRATION.

Pour la Démonſtration, ſoit GN une perpendiculaire à la Ligne de terre, au point G, interſection de cette Ligne avec la Ligne BF ; ſoit auſſi GD égale à la perpendiculaire dont on a cherché la Perſpective, & *a*H parallèle à la Ligne de terre.

Il eſt clair que la Perſpective de EA eſt E*a* : mais EA paſſe par le Point de ſtation ; par conſéquent * ſa Perſpective eſt perpendiculaire à la Ligne de terre ; ainſi * il ſuffit de faire voir que *a*I eſt égale à *a*H. * 42 * 57

Dans les Triangles ſemblables BGC & BFM.

BC, BM : : BG, BF.

Mais BM par la conſtruction eſt double de BC; donc BF eſt auſſi double de BG, qui, par conſéquent, eſt égale à GF.

A cauſe des Triangles ſemblables FGN & FBL.

FG, FB : : GN, BL.

Or on vient de démontrer que FG eſt la moitié de FB; donc GN eſt auſſi la moitié de BL, & par conſéquent égale à la hauteur de la perpendiculaire propoſée.

Les Triangles FGN & F*a*I étant ſemblables

FG, F*a* : : GN, *a*I.

Mais FG, F*a* : : GD, *a*H, à cauſe des Triangles ſemblables FGD & F*a*H.

donc

GN, *a*I : : GD, *a*H.

Or GN vient d'être démontrée égale à la perpendiculaire dont on a cherché la Perſpective, & DG eſt ſuppoſée égale à cette perpendiculaire; donc ces deux lignes ſont égales entr'elles, & par conſéquent *a*I & *a*H le ſont auſſi. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

On auroit pû prendre CP égale à la perpendiculaire, & ſe ſervir du point C au lieu de B, & du point P au lieu de L. La raiſon pourquoi j'aime mieux employer les points B & L, c'eſt qu'il faudroit preſque toujours continuer la Ligne horizontale pour la couper par une ligne qui paſſeroit par C & *a*; quelquefois même cette interſection ne ſe feroit qu'à une diſtance infinie, au lieu qu'en employant le point B, FM ne peut jamais être plus du double de la largeur du Deſſin que l'on veut faire.

COROLLAIRE.

On peut reſoudre le prob. 6. par celui-ci; car un point en l'air peut être conſideré comme l'extrémité d'une perpendiculaire au Plan géométral.

PROBLEME VIII.

60. *Mettre en Perſpective un Priſme ou un Cilindre perpendiculaire au Plan géométral.*

PL. IX. Fig. 1. La baze du Priſme dans le Plan géométral eſt GHILMN; la Per-

ſpective de la partie viſible de cette baze, dans le Tableau, eſt *nghi*; pour achever la repréſentation du Priſme, menez par les points *ngh* & *i*, des perpendiculaires à la Ligne de terre; déterminez * la longueur de ces perpendiculaires, en ſorte quelles repréſentent des perpendiculaires au Plan géométral, égales à la hauteur du Priſme, & trouvez * la Perſpective des autres angles de la face ſupérieure du Priſme en les conſidérant comme des points en l'air: joignez par des lignes les Perſpectives de tous ces angles, & vous aurez la Perſpective entiére du Priſme. * 56 * 51

61. Pour le Cilindre, ayant trouvé la Perſpective de ſa baze & celle de ſa face ſupérieure, en trouvant * la Perſpective de pluſieurs points en l'air, de la hauteur du Cilindre au deſſus du cercle de la baze, élevez deux perpendiculaires à la Ligne de terre, dont chacune raze les Perſpectives des deux faces du Cilindre, & qui ſoient terminées par les points où elles touchent les courbes, & vous aurez la Perſpective cherchée. Mais pour ne ſe point engager dans des opérations inutiles, on pourra déterminer la portion viſible de la baze du Cilindre, en tirant du centre A la ligne AS au Point de ſtation S; après quoi il faut diviſer cette ligne en deux parties égales en R; & de ce point comme centre & pour rayon RA, il faut décrire l'arc de cercle BAC qui coupe la baze en B & en C, qui ſont les deux derniers points de cette baze qui peuvent être vus. * 51

SECONDE METHODE.

62. Pour trouver d'une autre maniére la face ſupérieure du Cilindre ou du Priſme; les mêmes choſes étant données que dans la méthode précédente, on tire dans le Tableau à la Ligne de terre la parallèle PQ, dont la diſtance à cette même Ligne de terre eſt égale à la hauteur du Priſme ou du Cilindre, dont on cherche la Perſpective. Puis on change ſon Plan géométral, en ſorte que la Ligne de terre convienne avec la ligne PQ, & que dans cette tranſpoſition une perpendiculaire à la Ligne de terre convienne avec cette même perpendiculaire continuée vers PQ. Enfin en employant PQ pour Ligne de terre, on cherche * la Perſpective de la baze du Priſme ou du Cilindre, ainſi changée de ſituation; & cette Perſpective eſt la repréſentation de leur face ſupérieure. *PL. IX. Fig. 1.* * 47

DEMONSTRATION.

Suppoſons que le plan de la face ſupérieure du Priſme ou du Cilindre, ſoit continué, il rencontrera le Tableau en PQ; & dans ce plan continué

la face ſupérieure ſera à l'gard de PQ, dans la même ſituation que l'eſt dans le Plan géométral la baze à l'égard de la Ligne de terre. Si donc on ſuppoſe que ce plan continué ſoit couché ſur le Tableau, les faces ſupérieures du Priſme ou du Cilindre conviendront avec les bazes changées comme nous avons dit; & par conſéquent la Perſpective de ces bazes changées, ſera celle des faces ſupérieures. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

La tranſpoſition des figures ſe fait facilement en pliant le papier. Quand la hauteur du Priſme eſt plus grande que celle de l'œil, le plus court eſt de ſe ſervir de la méthode précédente.

PROBLEME IX.

63. *Mettre en Perſpective un corps creux.*

Pl. IX. Fig. 2. Après avoir trouvé la Perſpective du corps même, on trouve celle de ſa cavité, en conſidérant cette cavité comme ſi c'étoit un nouveau corps.

PROBLEME X.

64. *Mettre en Perſpective une Sphére.*

*Pl. IX. Fig. 3. * 51* Soit A l'aſſiéte du centre de la Sphére; il faut * trouver le point I, Perſpective de ce centre, & mener la ligne IV au point de vue V. Elevez à cette ligne la perpendiculaire VF égale à la diſtance de l'œil au Tableau, & prenez ſur cette perpendiculaire continuée VP, égale à la diſtance du centre de la Sphére au Tableau. Par le point P menez à VI la parallèle PQ, coupant en Q une ligne menée de F par I. De Q comme centre, & pour rayon le demi diamétre de la Sphére, tracez le cercle CB, auquel par le point F vous menerez les tangentes FC & FB, qui couperont la ligne IV en G & en E. Tracez ſur GE le demi cercle EDTG, dans lequel vous menerez la ligne GD perpendiculaire à FI. Diviſez GD en deux parties égales en H; & de H comme centre, & pour rayon HD, décrivez la portion de cercle LDR, coupant la ligne FI en L & en R. Prenez dans le demi cercle EDTG la corde GT égale à RL, & tracez ſur GT le demi cercle T*m*G; tirez dans ce demi cercle pluſieurs lignes comme *mn* perpendiculaires à GT, & coupant la ligne GE dans les points *p*, dans leſquels vous éleverez à GE les per-

pendiculaires *pq*, que vous ferez chacune de part & d'autre de la ligne GE, égales à la partie *mn* de la ligne *mp* qui leur répond. Tous les points *q* ſont des points de la Perſpective demandée, & par leſquels par conſéquent il faut mener une ligne courbe qui ſera la repréſentation cherchée.

DEMONSTRATION.

Les rayons par leſquels on voit une Sphére, forment un cone droit, dont la ſection par le Tableau eſt la Perſpective demandée, & dont l'axe paſſe par le centre de la Sphére; d'où il s'enſuit que le point I eſt le point du Tableau par où traverſe cet axe. Mais quand un cone droit eſt coupé par un plan, en ſorte que la ſection eſt une Ellipſe, comme cela arrive ici, le grand axe de cette Ellipſe paſſe par le point de rencontre de ce plan avec l'axe du cone, & par le point où aboutit une perpendiculaire du ſommet du cone au même plan. Cela paroit évidemment pour peu qu'on ſoit accoutumé à conſidérer les Sections coniques dans le ſolide. Donc le grand axe de l'Ellipſe, qui eſt la Perſpective de la Sphére, eſt une partie de IV*; car l'œil eſt le ſommet du cone que forment les rayons viſuels de la Sphére.*

Suppoſons maintenant qu'il paſſe un plan par l'œil & par la ligne IV; ce plan paſſera par le centre de la Sphére: & ſi de ce centre on abaiſſe une perpendiculaire ſur le rayon principal continué; la portion de ce rayon compriſe entre le point de vue & la rencontre de cette perpendiculaire, qui eſt toujours parallèle au Tableau, ſera égale à la diſtance du centre de la Sphére au Tableau, & par conſéquent à VP. *Si donc le plan dont nous venons de parler tournoit ſur la ligne VI, comme ſur ſon axe, juſques à ce qu'il convint avec le Tableau, le centre de la Sphére rencontreroit le Tableau en* Q, *& l'œil le rencontreroit en* F; *d'où il s'enſuit que la partie* UE *de la ligne* IV *eſt le grand axe de l'Ellipſe démandée.*

Dans la fig. 4. GDE *& dans la* fig. 5. gef *répréſentent les points marqués des mêmes lettres dans la figure précédente. Si on ſuppoſe achevé le cone, dont les lignes* fg *&* fe *marquent le profil, & qu'on le ſuppoſe coupé par un plan qui paſſe par la ligne* ge *& qui eſt perpendiculaire au plan de la figure, on aura une Ellipſe* g 4. e 3. *ſemblable à celle que doit donner la Perſpective de la Sphére. Si on ſuppoſe encore le même cone coupé par un plan* l 4. m 3. *parallèle à ſa baze, & qui diviſe* ge *en deux parties égales en* n, *il eſt évident que* 3. 4. *commune ſection du cercle* l 4. m 3. *& de l'Ellipſe* g 4. e 3. *eſt le petit axe de l'Ellipſe; & par conſéquent ce petit axe eſt égal à la ligne* 4. 3. *perpendiculaire dans le point* n *au diamétre* lm, *du cer-* *PL. IX. Fig. 4. 5.*

cle l 4. m 3. *Tirez à present dans la figure* 4. *les lignes* EO *&* GY *parallèles à* LM. *Dans les Triangles semblables* EGY *&* ENM.

EG, EN : : GY, NM,

Mais EG *est double de* EN; *donc* GY *l'est aussi de* NM, *& par conséquent* NM *est égal à* GZ. *On démontre de même que* LN *est égal à* XE, *d'où il s'ensuit que* GD *est égal à* LM *& est coupé en* Z, *de même que* LM *l'est en* N; *& ainsi* RL *ou* GT *de* la figure 3. *est égal à* 3. 4. *de* la figure 5. *& par conséquent égal au petit axe de l'Ellipse que l'on doit tracer. D'un autre côté il est clair par la construction, que celle des perpendiculaires* mn, fig. 3. *qui passe par le centre du demi cercle* GmT, *coupe l'axe* GE *en deux parties égales : car si on tire une ligne de* T *en* E, *elle sera perpendiculaire à* GT, *& par conséquent parallèle à* mn: *d'où il s'ensuit que le petit axe de la courbe* GqE *est égal au petit axe de l'Ellipse qu'on doit tracer; & par conséquent il faut seulement démontrer que la courbe qui passe par les points* q, *est une Ellipse.*

Les parties Gn *de la ligne* GT *sont proportionnelles aux parties* Gp *de la ligne* GE; *donc les rectangles* Gp *par* pE *sont proportionnels aux rectangles* Gn *par* nT; *mais ces derniers rectangles sont égaux aux quarrés des ordonnées* nm, *lesquels quarrés sont égaux aux quarrés des ordonnées* pq: *donc ces derniers quarrés sont proportionnels aux rectangles* Gp *par* pE, *ce qui est une proprieté de l'Ellipse.*

DEFINITION.

PL. X. Fig. 2. On nomme Tore d'une colomne, la partie marquée *hm:* elle est arrondie en demi-cercle, & fait le tour de la colomne comme un anneau.

PROBLEME XI.

65. *Mettre en Perspective le Tore d'une colomne.*

PL. X. Fig. 1. Soit BNC la baze de la colomne dans le Plan géométral. Du centre A tirez une ligne au Point de station S, & divisez cette ligne en deux parties égales en R; décrivez la portion de cercle BAC, qui a pour centre le point R, & pour rayon RA.

PL. X. Fig. 2. Soit X le profil de la colomne; tirez dans ce profil la ligne *z* 3. 6. parallèle à la baze de la colomne, & passant par le centre du demi cercle *hm*; prenez sur la ligne *sa*, qui passe par le centre de la colomne parallèle à ses côtés, 2 *s* égale à la hauteur de l'œil, depuis le point 2. qui est

eſt dans la baze de la colomne, en montant vers le haut; & prenez ſur la même ligne, *sa* égale à S A de la figure précédente; & élevez à cette ligne dans le point *a* la perpendiculaire indéfinie *a*Y. Après ces préparations générales, prenez ſur la ligne *sa* les petites parties 6. 1. & 6. 9. à diſcrétion, égales entr'elles; tirez les lignes 1. *h* & 9. *m* parallèles à 6. 3. *z*; & du point *h* menez la ligne *h*. 3. 4. par le centre 3. du demi cercle *hm*; prenez *a* 5. ſur *a*Y égale à 1. 4, & menez la ligne 5. *s*. coupant 1. *h* en *g*, & 9. *m* en *q*. Décrivez dans la fig. 1, de A comme centre & pour rayon 1. *h* ou 9. *m*, qui ſont égales entr'elles, le cercle FLMH coupant l'arc BAC en D & en E; menez la ligne DE, coupant la ligne AS en I; prenez IG égale à 1. *g*, & IQ égale à 9. *q*; par les points Q & G, tirez à la ligne ED les parallèles FH & LM, coupant le cercle DMEF dans les points L.M.F. & H. Trouvez * à preſent la Perſpective de quatre points en l'air au deſſus des quatre que nous venons de marquer; la hauteur de ceux qui ont L & M pour aſſiéte eſt 2. 9.; & celle des deux points dont l'aſſiéte eſt F & H, ſe trouve déterminée par 2. 1. La Perſpective de ces quatre points donne autant de points de la Perſpective demandée. On en trouvera quatre autres, en tirant deux autres lignes, telles que 1. *h* & 9. *m*. & en opérant de la même maniére. * 51

REMARQUE.

Comme une partie du Tore eſt cachée par la colomne, pour ne ſe point engager dans des opérations inutiles, il faut de A comme centre & pour rayon 3. 6. décrire un cercle qui coupe l'arc BAC en T & en O, & mener les lignes STY & SOZ: alors tous les points tels que F & H qui ſe rencontrent entre les lignes TY & OZ ſont inutiles, & il faut ſeulement ſe ſervir de L & de M, auxquels cette remarque ne peut pas s'appliquer. *PL. X. Fig. 1. 2.*

Il ſeroit inutile de déterminer géométriquement, comme on pourroit le faire ſur le demi-cercle *hzm*, le point juſques où les parallèles telles que 9. *m* peuvent ſervir: car quand ces parallèles ſont inutiles, le point *q* tombe au delà du point *m*. Mais alors la Perſpective du Tore eſt déja entiérement tracée, ſi l'on a commencé à mener ces parallèles proche de 6. 3. *z*, & les autres en s'en éloignant toujours.

Pour la démonſtration de ce Problème on a beſoin du Lemme ſuivant.

L E M M E.

66. PL. X. Fig. 3. Les deux Cercles CDHE & DFEL s'entrecoupent ; la ligne CL passe par les centres A & B de ces deux cercles, & DE joint les points d'intersection. Maintenant si on nomme le rayon AC ou AH, *a*, & BF ou BL, *b*, & la distance AB qui est entre les deux centres, *c*. je dis que AG est égale à $\frac{bb-aa}{2c} - \frac{1}{2}c$.

DEMONSTRATION.

Nommons AG, x, *&* GD *ou* GE, y : *par la propriété du cercle il est évident que si on considére* y *comme une ordonnée du cercle* CDH, $yy = aa - xx$: *& si on la considére comme une ordonnée du cercle* FDL, $yy = bb - cc - 2cx - xx$: *donc* $aa - xx = bb - cc - 2cx - xx$; *ce qui donne* $2cx = bb - aa - cc$; *divisant le tout par* 2c, on a $x = \frac{bb-aa}{2c} - \frac{1}{2}c$. *Ce qu'il falloit prouver.*

DEMONSTRATION DU PROBLEME.

67. *Il faut considérer le Tore de la colomne composé d'une infinité de plans circulaires posés les uns sur les autres. Il est évident que ce qui empêche chacun de ces cercles d'être vu tout entier, c'est que celui qui est immédiatement au dessus en cache une partie ; d'où il s'ensuit, que si on continue de tous côtés le plan d'un de ces cercles, & qu'on y trouve la Perspective du cercle qui est immédiatement au dessous, laquelle Perspective est * aussi un cercle,* * 8 *les deux points d'intersection de cette Perspective & du cercle qui étoit dans le plan, détermineront la partie de cette Perspective qui peut être vue ; par conséquent, si on trouve dans le Tableau la répresentation de ces deux points d'intersection, on aura deux points de la Perspective du Tore de la colomne proposée. C'est là ce que j'ai fait dans la solution du Probléme, comme je le vais démontrer en donnant le calcul analitique, dont j'ai tiré la construction dont je me sers.*

PL. X. Fig. 4. *Soit* O *un œil,* AM *un morceau du Tore de la colomne ;* AP *passe par le centre de la colomne perpendiculairement à la baze, &* AB, *qui est parallèle à cette même baze, passe par le centre* B *du demi-cercle de l'arrondissement du Tore.* MP *représente le demi-diamétre d'un des cercles dont j'ai parlé au commencement. Si on tire la ligne* mp, *qui lui soit parallèle & infiniment proche, & qu'on méne les lignes* mO *&* pO *coupant* MP *en* D

& en T, *il est évident que* DT, *dans le plan du cercle qui passe par* MP, *sera le demi-diamétre de la Perspective du cercle qui est immédiatement au-dessous.*

A présent abaissez de l'œil à la ligne AB *la perpendiculaire* OS, *& continuez les lignes* MP *&* mp, *jusques à ce qu'elles rencontrent cette perpendiculaire en* Q *& en* q : *continuez encore la ligne* MP *jusques au point* R, *où elle est coupée par la ligne* mR *perpendiculaire à* mp. *Prenons* AS$=$e, OQ$=$x, & MP$=$y. *Dans les Triangles semblables* Oqm *&* mRD *on a,*

$$Oq\ (x),\ qm\ (e+y)\ ::\ mR\ (dx),\ RD\ \left(\frac{edx+ydx}{x}\right).$$

Les Triangles semblables Opq *&* pTP *donnent*

$$Oq\ (x),\ qp\ (e)\ ::\ pP\ (dx),\ PT\ \left(\frac{edx}{x}\right).$$

PR *est égal à* y$+$dy *si on y ajoute* PT $\left(\frac{edx}{x}\right)$, *& qu'on en retranche* RD $\left(\frac{edx+ydx}{x}\right)$ *on aura*

$$TD=y+dy-\frac{ydx}{x}.$$

Pour trouver maintenant les points d'intersection de deux cercles, dont l'un auroit pour rayon TD, *& l'autre* PM, *& dont les centres seroient éloignés l'un de l'autre de* PT, *il faut * diviser le quarré de* TD, *moins le quarré de* PM, *par le double de* PT, *& en retrancher la moitié de* PT, *qu'on peut négliger ici, parce qu'elle est infiniment petite par raport au reste; & on aura* $\frac{xydx}{edx}-\frac{yy}{e}$ *pour la partie de la ligne* PM, *comprise entre* P *& le point où elle seroit coupée par une ligne qui joindroit les deux points d'intersection des deux cercles.* * 66

Mais avant d'appliquer au Problème ce que je viens de dire, il faut remarquer que si du point M *on méne une ligne par le centre* B *de l'arrondissement du Tore, on aura le Triangle* MPC *semblable au Triangle* mRM; *car l'angle* mMP *est un angle extérieur du Triangle* mRM, *& l'angle* mMC *est droit. Par conséquent*

$$mR\ (dx),\ RM\ (dy)\ ::\ MP\ (y),\ PC\ \left(\frac{ydy}{dx}\right).$$

Si on considére à présent que SA, (fig. 1.) *& son égale* sa (fig. 2.) *a été marquée par* e *dans le calcul : que* s1 *est* x *&* 1h, y; *il est clair que* 1.4 *& son égale* a5, *si on l'exprime algébraïquement, est* $\frac{ydy}{dx}$. *Pl. X. Fig. 1. & 2.*

Dans les Triangles semblables sa5 & s1g

$$sa\ (e),\ a5\ \left(\frac{ydy}{dx}\right) :: s1\ (x),\ 1g\ \left(\frac{xydy}{edx}\right)$$

Par la construction (fig. 1.)

$$AS\ (e),\ AP = 1h\ (y) :: AP\ (y)\ AI\ \left(\frac{yy}{e}\right);$$

d'où il s'ensuit, puisque IG *a été fait égal à* 1g, *que* AG=IG—AI *est égal à* $\frac{xydy}{edx} - \frac{yy}{e}$, *& par conséquent* H *&* F *sont l'assiété de deux points dont il faut trouver la Perspective, & ces points sont dans un plan parallèle au Plan géométral, & élevé au-dessus de ce Plan de la hauteur de* 2. 1.

Si on applique le calcul précédent à la partie inférieure du Tore, l'expression $\frac{xydy}{edx} - \frac{yy}{e}$ *se change en celle-ci* $-\frac{xydy}{edx} - \frac{yy}{e}$, *ce qui marque qu'il faut prendre ces deux quantités du même côté de* A *vers* S. *Dans la ligne* 9m, 9q *est égal à* $\frac{xydy}{edx}$; *car* 9. 8. $\left(\frac{ydy}{dx}\right)$ *est égal à* 1. 4. *ce qui fait voir que* M *&* L *sont encore l'assiéte de deux points dont il faut trouver la Perspective, & ces points sont dans un plan parallèle au Plan géométral, & élevé de la hauteur de* 2. 9.

REMARQUE.

68. On peut encore résoudre ce Problème, en considérant le Tore de la colomne comme composé des bazes d'une infinité de cones, dont la hauteur est déterminée par les rencontres des Tangentes au demi-cercle de l'arrondissement, avec l'axe de la colomne, & en déterminant * les portions visibles de ces bazes. Si je m'étois servi de cette méthode, la démonstration auroit pu se faire sans Algébre; mais la pratique auroit été plus longue.

* 54

PROBLEME XII.

69. *Trouver le Point accidental de plusieurs lignes parallèles entr'elles, & inclinées au Plan géométral.*

PL. XI. Fig. 1. Soit AB la direction d'une des lignes dont on cherche le Point accidental, & ECP l'angle que font ces lignes avec le Plan géométral.

PRATIQUE.

Menez par l'œil O, une ligne OD, parallèle à AB; & par le point D,

dans lequel elle coupe la Ligne horizontale, & qui eſt le Point accidental des directions des lignes données, menez DF perpendiculaire à cette même horizontale, ſur laquelle auſſi il faut prendre DG égale à DO. Enfin par le point G, menez la ligne GF, qui faſſe avec l'horizontale un angle égal à l'angle ECP; & alors le point F, interſection de cette ligne & de la perpendiculaire DF, eſt le Point accidental cherché.

Quand les lignes ſont inclinées vers le Tableau, il faut mener DF & GF au-deſſous de la Ligne horizontale; & il les faut mener au-deſſus de la même horizontale comme on l'a fait ici, quand les lignes données ſont inclinées du côté oppoſé au Tableau.

DEMONSTRATION.

Suppoſons qu'il paſſe par l'œil un plan perpendiculaire au Plan géométral, & parallèle aux lignes données; il eſt évident qu'il coupera le Plan horizontal dans la ligne OD, & le Tableau en DF: il eſt clair encore qu'une ligne qui paſſe par l'œil, parallèle aux lignes données, eſt dans ce plan, & fait avec la ligne OD, un angle égal à l'angle ECP, au-deſſous du Plan horizontal, ſi les lignes ſont inclinées vers le Tableau, & au-deſſus ſi elles le ſont du côté oppoſé; il s'enſuit de là que cette derniére ligne fait avec OD, & DF, un Triangle rectangle qui a l'angle au point O, égal à l'angle CEP. Or le Triangle DGF, eſt auſſi rectangle, ayant par la conſtruction l'angle au point G, égal à l'angle ECP; donc ces deux Triangles ſont ſemblables; & le côté DG, étant égal au côté DO, ils ſont auſſi égaux; par conſéquent la ligne DF, étant commune à ces deux Triangles, le point F, eſt le point où la ligne qui paſſe par l'œil parallèle aux lignes données, rencontre le Tableau; & ce point eſt * le Point accidental cherché. * 13, 14

REMARQUE.

Cette Démonſtration ſe rapporte auſſi-bien aux lignes inclinées, entiérement ſéparées du Plan géométral, qu'à celles qui le rencontrent par une de leurs extrémités.

PROBLEME XIII.

Trouver la Perſpective d'une ou de pluſieurs lignes inclinées au Plan géométral. 70.

Soit donné dans le Plan géométral le point A, dans lequel ce Plan eſt *PL. XI. Fig. 1.*

rencontré par une ligne inclinée dont on connoit la longueur, la direction, & l'angle de l'inclinaiſon.

PRATIQUE.

En quelque endroit à part, tirez deux lignes CE, & CP, qui faſſent enſemble un angle égal à l'angle de l'inclinaiſon de la ligne donnée; prenez ſur une de ces lignes CE, égale à la ligne donnée; & du point E, abaiſſez ſur l'autre la perpendiculaire EP. Puis prenez ſur la direction de la ligne propoſée AB, égale à CP; & après avoir trouvé *a* Perſpective de
* 51 A, & le point T *, Perſpective d'un point élevé en l'air au-deſſus de B, de la hauteur de PE, joignez par une ligne les points *a* & T, & vous aurez la Perſpective cherchée.

DEMONSTRATION.

Si de l'extrémité de la ligne inclinée, on fait tomber une perpendiculaire ſur le Plan géométral, elle rencontrera ce Plan dans le point B, & ſera égale à PE, comme il eſt évident par la conſtruction de la figure CPE. Or le point T eſt la repréſentation de l'extrémité de cette perpendiculaire; & par conſéquent il l'eſt auſſi de l'extrémité de la ligne inclinée. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Il y a quelques cas dans leſquels on peut abréger cette propoſition. 1. Quand il y a pluſieurs de ces lignes qui ſont parallèles entr'elles, &
* 69 dont on peut trouver * le Point accidental. 2. Quand une ligne inclinée eſt parallèle au Tableau. On verra dans les méthodes ſuivantes la maniére de faire ces abregés.

SECONDE METHODE.

71. *Par le Point accidental des lignes inclinées.*

PL. XI. Fig. 1. Par F, Point accidental des lignes inclinées parallèlement, menez FH, parallèle à la Ligne de terre, & égale à FG. Soit A le point dans lequel une des lignes inclinées rencontre le Plan géométral.

PRATIQUE.

Prenez ſur la Ligne de terre RQ, égale à la ligne inclinée, & tirez des points R & Q, des lignes au point Z, pris à volonté dans la Ligne horizontale.

Par *a* Perſpective de A, menez *a*N, parallèle à la Ligne de terre: prenez ſur cette parallèle *a*L, égale à MN, & tirez du point *a* une ligne au point F, & du point L tirez-en une autre au point H. Alors *a*T ſera la Perſpective cherchée.

DEMONSTRATION.

Par * la notion du Point accidental, la Perſpective cherchée eſt une partie de la ligne *a*F; & par conſéquent il faut ſeulement démontrer que l'extrémité de cette Perſpective eſt dans la ligne LH. Ce qui ſe prouve ainſi. * 14

Suppoſons que par le point A, il paſſe une ligne AI parallèle à la Ligne de terre, & égale à la ligne inclinée. Il eſt évident * que L, eſt la Perſpective de I. Par conſéquent LH * eſt la Perſpective d'une ligne qui paſſe par I, & par l'extrémité de la ligne propoſée; & ainſi la Perſpective de cette extrémité eſt dans cette ligne LH. Ce qu'il falloit démontrer. * 57 * 20

REMARQUE.

Il eſt clair * que l'on auroit pu prendre FH, la moitié ou le tiers &c. de ce qu'elle eſt ici; mais alors il auroit fallu prendre auſſi RQ, égale à la moitié ou au tiers &c. de CE. * 19

TROISIEME METHODE.

Pour les lignes inclinées qui ne rencontrent point le Plan géométral. 72.

Soient A & B, les points d'aſſiéte des extrémités de la ligne donnée. Que X repréſente un Plan qui paſſe par la ligne donnée, & qui ſoit perpendiculaire au Plan géométral. MN repréſente dans ce Plan, la ligne dont on cherche la Perſpective; CN & PM repréſentent des perpendiculaires au Plan géométral: d'où il s'en ſuit que PC repréſente AB, & par conſéquent lui eſt égale. *PL. XI. Fig. 2.*

PRATIQUE.

* 51 Trouvez le point I *, Perſpective d'un point en l'air au deſſus du point A, de la hauteur de CN: & menez du point B, au Point de ſtation S, la ligne BS, coupant la Ligne de terre en E; du point I, menez une ligne au Point accidental F; entre-coupez cette ligne par une perpendiculaire à la Ligne de terre au point E; & vous aurez IT, la Perſpective cherchée.

QUATRIEME METHODE.

73. *Pour les lignes inclinées parallèles au Tableau.*

* 56 Il faut ſe ſervir ici de la pratique *du prob. 7.* * avec cette différence,
PL. VII. Fig. 4. *voyez la figure de ce prob.* qu'au lieu que *a*I, dans ce prob., eſt perpendiculaire à la Ligne de terre, ici elle doit faire avec cette Ligne un angle égal à l'angle de l'inclinaiſon des lignes données.

Pour la démonſtration. *Voyez n. 7. & 10.*

PROBLEME XIV.

74. *Mettre en Perſpective un Corps qui a tous, ou quelques-uns de ſes côtés inclinés au Plan géométral.*

Il faut chercher la Perſpective des lignes qui forment les angles du corps
* 70 propoſé: ce qui ſe fait aiſément par le prob. 13. * qui ſatisfait à tous les cas. C'eſt ainſi que l'on trouve la Perſpective d'une Piramide ſoit droite, ſoit renverſée, d'un Priſme incliné &c. Il arrive pourtant quelquefois que l'on peut abréger les pratiques du problème précédent; comme quand l'extrémité de pluſieurs lignes ſe trouvent dans une même ligne, ou quand des lignes inclinées, qui ont des Points accidentaux différents, s'entre-coupent & ſe déterminent ainſi mutuellement. Ceci paroîtra plus clairement par des exemples.

EXEMPLE I.

Mettre en Perſpective pluſieurs poutres parallèles entr'elles, qui ſoutiennent un pan de muraille.

PL. XII. Fig. 1. Je ſuppoſe que les bazes des poutres, c'eſt-à-dire, les endroits où elles ren-

rencontrent la terre, soient dans une ligne parallèle à la muraille; & voici comment on trouvera alors la Perspective de ces poutres. Après avoir trouvé * leur Point accidental F, trouvez la représentation de leurs bazes: ensuite marquez sur la Perspective de la muraille, les apparences des lignes dans lesquelles les poutres rencontrent la muraille; ces apparences sont ici les lignes *pt*, *rs*, qui représentent des lignes parallèles au Plan géométral, par la supposition que les poutres sont parallèles entr'elles, & leurs bazes également éloignées de la muraille. Enfin, des angles des représentations 1. 2. 3. 4., tirez au point F des lignes qui seront terminées par leurs intersections avec *pt* & *rs*, & donneront les Perspectives cherchées, comme on le voit dans la figure.

* 69.

EXEMPLE II.

Mettre en Perspective les toits d'une Maison qui en a plusieurs parallèles entr'eux.

PL. XII. Fig. 2.

Ayant trouvé les Points accidentaux G & Q de ces toits, marquez sur la Perspective de la muraille qui les soutient, les points *abcd* où ces toits la rencontrent: du point G, menez des lignes par les points *abc*; & du point Q, menez en d'autres aux points *bcd*; ces lignes se détermineront par leur intersection mutuelle, & donneront la représentation cherchée.

CONCLUSION.

75. Après tout ce que nous venons de dire, il ne sera pas difficile de mettre en Perspective toutes sortes d'objets. Mais comme il seroit très mal-aisé, pour ne pas dire impossible pour les Peintres, de faire un dessin entier suivant les régles que nous avons prescrites, le nombre des points qu'il leur faudroit trouver étant presque infini, ils pourront se borner à chercher la Perspective des figures tracées dans leur Plan géométral, & celle des principaux points des objets qui sont hors de ce Plan. Cela, une fois trouvé, leur servira de régle pour achever tout le reste à l'œil, sans courir le risque de faire quelque faute considérable, & dont on puisse s'appercevoir.

CHAPITRE QUATRIEME.

Suite de la pratique de la Perſpective ſur le Tableau perpendiculaire.

Il arrive ſouvent aux Peintres de choquer toutes les régles de la vraiſemblance, quand ils peignent des Tableaux pour être placés dans un lieu élevé, ou pour être vus de côté, ou d'une aſſez grande diſtance. Accoutumés à faire leurs peintures de ſorte qu'elles doivent être vues de la même maniére qu'ils les regardoient eux-mêmes en les travaillant, leur routine leur devient inutile dans les cas dont nous venons de parler; & alors s'ils ne veulent pas commettre de lourdes fautes, ils ſont obligés néceſſairement de recourir aux régles de la Perſpective. Celles que nous avons données dans le Chapitre précédent ne ſuffiſent pas pour ces cas particuliers, & il ſera néceſſaire d'ajouter ici quelques nouveaux Problèmes, qui, avec les premiers, puiſſent ſatisfaire à tout.

PROBLEME I.

76. *Mettre en Perſpective les figures qui ſont dans le Plan géométral, la diſtance de l'œil étant trop grande pour pouvoir marquer l'œil dans le Plan horizontal, ou l'un des points de diſtance dans la Ligne horizontale.*

Il faut trouver * la Perſpective de deux points de ces figures, & ces deux points ſerviront * à trouver la repréſentation des autres.

* 24
* 38

EXEMPLE.

PL. XII. Fig. 3. Soit ABCDE, un Pentagone dont on cherche la Perſpective; V eſt le point de vue; & VF la ſixiéme partie de la diſtance de l'œil au Tableau. Trouvez * *b* & *e* Perſpectives de B & E; & par le moyen de ces apparences vous aurez * celle du point A. Vous trouverez la repréſentation de D, en employant A & E; & celle de C, en y faiſant ſervir B & A.

* 24
* 38

R E M A R Q U E.

La Perſpective des lignes perpendiculaires au Plan géométral *, & celle des lignes inclinées *, ſe trouve par des méthodes du Chapitre précédent. 77. * 56 * 70

P R O B L E M E II.

Mettre en Perſpective les figures qui ſont dans le Plan géométral, l'œil étant ſi fort de côté qu'on ne le peut pas marquer dans le Plan horizontal, non plus que le point de vue dans la Ligne horizontale. 78.

On doit ſe ſervir ici, comme dans le Problème précédent, du *n.* 38., après avoir trouvé de la maniére ſuivante la Perſpective de quelques points des figures données.

Au point C, pris à diſcrétion dans la Ligne de terre, élevez une perpendiculaire CD à cette ligne; & du même point C, tirez la ligne CE, de telle ſorte, que ſi elle pouvoit être continuée elle iroit rencontrer la Ligne horizontale dans le point de vue. *PL. XIII. Fig. 1.*

Ceci ſe fait en prenant CH, égale au tiers ou au quart &c. de la diſtance du point C, au pied de la ligne verticale; & en élevant dans le point H, la perpendiculaire HE, égale auſſi au tiers ou au quart &c. de la hauteur de l'œil. A eſt un point donné dont on cherche la Perſpective.

P R A T I Q U E.

Par le point A, menez à la Ligne de terre une parallèle AB, qui rencontre la ligne CD, dans le point B: ſuppoſez à diſcrétion un autre œil qui ait la même hauteur & la même diſtance que celui pour lequel on cherche la Perſpective. Trouvez * pour ce ſecond œil, FG perſpective de AB. Continuez cette perſpective juſques à ce qu'elle rencontre la ligne CE en *b*; Prenez ſur cette continuation, *ba* égale à FG; & alors *a* ſera la Perſpective cherchée. * 42

D E M O N S T R A T I O N.

La diſtance & la hauteur du ſecond œil ayant été faites égales à la diſtance & à la hauteur du premier, ces deux yeux ſont dans une ligne parallèle à AB; & par conſéquent * la Perſpective de AB doit être une * 18
partie de FG continuée, & elle doit être * égale à cette même ligne * 12

* 16 FG: & par conséquent, puisque * la Perspective de B, est dans la ligne CE, *ab* est la Perspective de AB, & *a* celle de A. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

79. Quant aux lignes perpendiculaires & inclinées au Plan géométral, voyez
* 77 la remarque * du Problême précédent. Celui-ci ne peut guére être utile que pour les décorations de Théatre.

PROBLEME III.

80. *Trouver la représentation d'une figure qui est dans le Plan géométral, le Tableau étant placé au-dessus de l'œil.*

Quand le Tableau est situé au-dessus de l'œil, on suppose que le Plan géométral passe par le haut du Tableau: on marque dans ce Plan, les figures qu'y forment les objets qui le rencontrent; & ceux qui sont au-dessous s'y raportent par des perpendiculaires qui déterminent l'assiéte de ces objets dans ce Plan. La hauteur de l'œil se mesure ici par une perpendiculaire menée de l'œil à ce Plan géométral; ce qui fait voir qu'un Tableau élevé par rapport à l'œil, est la même chose qu'un œil élevé par rapport au Tableau.

PL. XIII. Fig. 2. Soit IL, la Ligne de terre, H le pied de la Ligne verticale; marquez à discrétion dans la Ligne de terre vers les côtés du Tableau, les points I & L. Prenez IS égale au tiers ou au quart de IH; & élevez à la Ligne de terre, au point S, la perpendiculaire SX, égale à une partie correspondante de la hauteur de l'œil & de sa distance prises ensemble; menez la ligne XIG; vous ménerez de même YLQ en prenant LT égale au tiers ou au quart &c. de LH. Tirez dans le Plan géométral, la ligne GQ parallèle à la Ligne de terre, & distante de cette Ligne du tiers, par exemple, de la hauteur de l'œil; & tracez FP dans le Tableau aussi parallèle à la Ligne de terre, & éloignée de cette même Ligne du quart de la distance de l'œil. Ces deux lignes couperont XI en G & F, & YL en Q & P. Si on avoit pris la distance de GQ à la Ligne de terre, égale au quart de la hauteur de l'œil, il auroit fallu prendre celle de FP, égale à la cinquiéme partie de la distance de l'œil, & ainsi de suite. A, est un point dont on demande la répréfentation.

PRATIQUE.

Du point A, menez aux points F & P, les lignes AF, & AP qui coupent la Ligne de terre en E, & en B; tirez les lignes EG, & BQ: *a*, commune ſection de ces deux lignes continuées, eſt la Perſpective cherchée.

DEMONSTRATION.

Suppoſons que le Tableau ſoit continué, CD eſt la Ligne horizontale; O l'œil marqué dans le Plan horizontal. Par la conſtruction il eſt clair * que la ligne GF, continuée, paſſe par l'œil O: prolongez la ligne GS*a* jusques à ce qu'elle rencontre la Ligne horizontale en D, & menez la ligne OD. Abaiſſez du point G, sur la Ligne horizontale, la perpendiculaire GNR, que vous entre-couperez en R, par la ligne OR, qui paſſe par l'œil parallèle à la Ligne horizontale. Par la conſtruction, GM eſt le tiers de MN: par conſéquent elle eſt le quart de GN; MZ eſt auſſi le quart de NR: donc * 78

GM, MZ : : GN, NR,

Compon. & altern.

GM, GN : : GM + MZ=GZ, GN + NR=GR.

Dans les Triangles ſemblables GMI & GNC,

GM, GN : : GI, GC.

Les Triangles GZF, & GRO, étant auſſi ſemblables

GZ, GR : : GF, GO.

donc

GI, GC : : GF, GO

A cauſe des Triangles ſemblables GIE, & GCD,

GI, GC : : GE, GD,

par conſéquent

GF, GO : : GE, GD.

Et ainſi les Triangles GFE & GOD, ſont ſemblables; & la ligne FEA eſt parallèle à OD: d'où il s'en ſuit * que la Perſpective de EA, eſt une partie de E*a*D. On démontrera de même que B*a* eſt la Perſpective de BA; & ainſi la Perſpective du point A, commune ſection de EA, & BA, eſt *a*, interſection des Perſpectives de ces deux lignes. * 13

PROBLEME IV.

81. *Représenter une ligne perpendiculaire au Plan géométral, le Tableau étant placé au-dessus de l'œil.*

PL. XIII. Fig. 3. Soit BE, la Ligne de terre. Prenez sur cette ligne ED, égale à la longueur de la perpendiculaire proposée, & tirez CL, parallèle à la Ligne de terre, & éloignée de cette Ligne du quart, par exemple, de la hauteur de l'œil; faites FL égale aux trois quarts de DE, & menez les lignes EL, & DF. Si on avoit fait la distance de CL à BE, égale à la cinquiéme partie de la hauteur de l'œil, on auroit dû prendre FL, égale à quatre cinquiémes parties de ED. Soit maintenant *a* la perspective du pied de la perpendiculaire proposée; menez par ce point *a*H, parallèle à la Ligne de terre, & *a*I perpendiculaire à cette même Ligne; faites *a*I égale à GH, & vous aurez la Perspective proposée.

* 57 La démonstration de cette pratique est claire *, si l'on considére que DF & EL, si elles étoient continuées, se rencontreroient dans la Ligne horizontale.

CHAPITRE CINQUIEME.

Pratique de la Perspective sur le Tableau incliné.

PROBLEME I.

82. *Trouver la Perspective d'une figure qui est dans le Plan géométral.*

PL. XIV. Fig. 1. Soit X le Plan vertical; SI la Ligne de station, S le Point de station, & H l'intersection de la Ligne de station & de la Ligne de terre. Menez par ce point H, la Ligne verticale HV, qui fasse avec SI un angle égal à l'angle de l'inclinaison du Tableau; élevez ensuite à SI, dans le Point de station S, la perpendiculaire SO, égale à la hauteur de l'œil; & par l'extrémité de cette perpendiculaire, tirez le Rayon principal OV, parallèle à SI, & coupant HV, dans le point de vue V.

Maintenant il est clair que OV détermine la longueur du Rayon principal, & HV la distance de la Ligne de terre à la Ligne horizontale; & comme les démonstrations des Problèmes, qui dans les chapitres pré-

cédents regardent le Plan géométral, se raportent aussi au Tableau incliné, l'on peut se servir ici de ces Problêmes ; & par conséquent ce Tableau incliné se réduit à un Tableau perpendiculaire, vu par un œil dont la hauteur seroit HV & la distance OV.

PROBLEME II.

Trouver la Perspective d'un point en l'air au-dessus du Plan géométral. 83.

Soit HC la Ligne de terre. Le Point accidental des lignes perpendiculaires au Plan géométral est T. Il se marque * sur la Ligne verticale dans l'endroit où elle est coupée par la prolongation de la ligne qui mesure la hauteur de l'œil; car cette derniére ligne est parallèle à ces perpendiculaires, ainsi ce point est le même que le point T de la fig. 1.: V est le Point de vue, S le Point de station, & O le Point de station du Tableau perpendiculaire, auquel se reduit * le Tableau incliné. A est l'assiéte du point donné. *PL. XIV. Fig. 2.* * 13 * 82

PRATIQUE.

En quelque endroit à part tirez deux lignes MP & PE, qui fassent ensemble un angle droit; prenez sur une de ces lignes, PE égale à la hauteur du point dont on cherche la perspective, & menez la ligne EM, en sorte qu'elle fasse avec MP un angle égal à l'angle de l'inclinaison du Tableau. Du point A abaissez à la Ligne de terre la perpendiculaire AD, sur laquelle vous prendrez AL égale à PM, vers la Ligne de terre, quand le Tableau est incliné du côté des objets, comme nous l'avons supposé ici; mais de l'autre côté de A, quand le Tableau est incliné vers l'œil. Du point A menez au point S une ligne qui coupe la Ligne de terre en B. Joignez les points L & O par une autre ligne qui coupe la Ligne de terre en C. Menez la ligne TBX, que vous entre-couperez au point X par une perpendiculaire à la Ligne de terre dans le point C; le point X est alors la Perspective cherchée.

DEMONSTRATION.

Dans la fig. 1. où V, S, T, & H, représentent les mêmes points que ceux qui sont marqués des mêmes lettres dans notre figure,

TH, HS : : TV, VO,

Compon. & altern.

TH, TV : : TH+HS, TV+VO.

Ce qui, appliqué à la fig. 2., est

TH, TV : : TS, TV+VO.

Si à présent on continuë TX jusques à ce qu'elle coupe la Ligne horizontale en F. On aura

TH, TV : : TB, TF,

par conséquent

TB, TF : : TS, TV+VO.

D'où il s'ensuit, que si une ligne étoit menée de l'œil au point F, elle
* 13 seroit parallèle à SBA : donc * la Perspective de BA est une partie de BX ; & ainsi la Perspective de A est dans cette ligne. La Perspective d'une ligne perpendiculaire au Plan géométral dans le point A, passe par
* 13, 14 la Perspective de A, & par le point T * ; c'est donc aussi une partie de TX : mais le point donné est dans cette perpendiculaire ; par conséquent sa Perspective est dans TX.

* 42 D'un autre côté la Perspective de CL est * une partie de CX, par conséquent la Perspective de L est dans cette ligne. Si une ligne partoit du point L, & passoit par le point proposé, elle seroit parallèle à la Li-
* 6 gne verticale ; & ainsi * sa Perspective est perpendiculaire à la Ligne de terre ; & comme cette Perspective passe par celle du point L, ce sera une partie de CX : mais puisque cette ligne qui part du point L passe par le point proposé, la Perspective de ce point est aussi dans CX, & par conséquent en X, intersection de CX avec TX.

REMARQUE.

84. Si le point T étoit trop éloigné, ou si TBX & CX s'entre-coupoient
* 82 trop obliquement, il faudroit supposer le Tableau réduit * à un Tableau
* 51 perpendiculaire, & chercher * la représentation d'un point en l'air dont l'assiéte fut L & la hauteur ME.

PROBLEME III.

85. *Trouver la Perspective d'une ligne perpendiculaire au Plan géométral.*

PL. XIV. Il faut trouver * la Perspective de l'extrémité de la perpendiculaire,
Fig. 2. en considérant cette extrémité comme si c'étoit un point en l'air, élevé
* 83 au dessus du Plan géométral de la hauteur de la perpendiculaire proposée ; après quoi il faut mener du point D au point de vue, une ligne qui par
* 16 son intersection * avec TX donnera l'apparence *a* du pied de la perpendiculaire proposée.

RE-

R E M A R Q U E.

Quand on eſt obligé de recourir à la remarque * du Problème précédent pour trouver le point X, on trouvera le point *a* en menant AS & DV, & en joignant enſuite les points B & X par une ligne. Lors que BX & DV ſe coupent trop obliquement, il faut pour trouver la Perſpective *a*, avoir recours au Prob. 1. * * 84 * 82

S E C O N D E M E T H O D E.

Soit A le pied de la perpendiculaire; le Triangle EPM eſt tracé comme il a été dit *; T eſt le Point accidental des perpendiculaires au Plan géométral. 86. *PL. XIV. Fig. 3.* * 83

P R A T I Q U E.

Par le point *a* Perſpective de A, menez à la Ligne de terre une perpendiculaire que vous ferez * égale en repréſentation à la ligne ME, en conſidérant cette derniére ligne comme parallèle à la Ligne verticale; de l'extrémité I de cette Perſpective, tirez au point de vue V, une ligne entrecoupant la ligne T*a*, au point X, qui ſera la Perſpective de l'extrémité de la ligne propoſée. * 56

D E M O N S T R A T I O N.

Suppoſons que par le point A il paſſe une ligne égale à ME, & parallèle à la Ligne verticale: ſuppoſons de plus que par l'extrémité de cette ligne & par l'extrémité de la perpendiculaire propoſée il paſſe une autre ligne; cette derniére ligne, par la conſtruction de la figure MEP, ſera parallèle à la Ligne de ſtation, & par conſéquent ſa Perſpective * paſſera par le point de vue, & marquera par ſon interſection avec T*a* l'extrémité de la Perſpective cherchée. Mais *a*I eſt * la Perſpective de la premiére ligne que nous avons ſuppoſée égale à EM, & par conſéquent VI eſt celle de la ſeconde. Ce qu'il falloit démontrer. * 16 * 57

R E M A R Q U E.

Quand VI & T*a* ſe coupent trop obliquement, il faut avoir recours à la remarque de la méthode précédente, ou il faut employer la méthode qui ſuit.

TROISIEME METHODE.

87. PL. XIV. Fig. 4. Soit T le Point accidental des lignes perpendiculaires au Plan géométral : menez par ce Point une parallèle à la Ligne de terre, sur laquelle vous prendrez TR égale à OT de la fig. 1.

PRATIQUE.

Prenez en quelqu'endroit de la Ligne de terre, DN égale à la ligne proposée, & menez les lignes DF & NF au point F, pris à discrétion dans la Ligne horizontale; puis par le point *a* Perspective de A, menez à la Ligne de terre la parallèle *a*H, sur laquelle vous prendrez *a*Q égale à GH. Alors si l'on tire les lignes T*a* & RQ, qui étant continuées s'entrecoupent au point X, *a*X sera la Perspective cherchée.

DEMONSTRATION.

* 57. La partie *a*Q de la ligne *a*H, est * la Perspective d'une ligne qui part du point A dans le Plan géométral, & qui est égale à la ligne pro-
* 20. posée, & parallèle à la Ligne de terre; par conséquent * la ligne RQ passe par la Perspective de l'extrémité de la ligne proposée; & ainsi X, intersection de RQ avec T*a*, est la Perspective de cette extrémité.

REMARQUE.

* 19. Il est clair * qu'on peut prendre TR, la moitié ou le tiers &c. de ce que nous l'avons prise ici, pourvu qu'on prenne aussi alors DN égale à une partie correspondante de la ligne proposée.

PROBLEME IV.

88. *Mettre en Perspective une Sphére.*

* 64 Il faut se servir ici de la méthode donnée * pour le Tableau perpendiculaire; avec cette différence, qu'au lieu d'employer le point de vue, il faut prendre le point où une perpendiculaire de l'œil au Tableau rencontre le Tableau. Et il faut remarquer que c'est cette perpendiculaire qui mesure la distance de l'œil au Tableau.

PROBLEME V.

Trouver le Point accidental de plusieurs lignes inclinées au Plan géométral. 89.

Soit AB la direction d'une des lignes inclinées; O est l'œil dans le Plan horizontal, S est le Point de station. PL. XV. Fig. 1.

PRATIQUE.

Menez par l'œil O, à AB, la parallèle OD, rencontrant la Ligne horizontale en D, qui sera * le Point accidental des directions des lignes données; & par le Point de station S, tirez à la même ligne AB, la parallèle SN, coupant la Ligne de terre en N; après quoi menez la ligne ND. De D comme centre, & pour rayon DO, décrivez l'arc de cercle O*o*: & de N, comme centre, & pour rayon NS, tracez la portion de cercle S*s*. Menez la ligne *so* razant ces deux arcs de cercle, & la ligne D*o* perpendiculaire à *so*. Après quoi tirez *o*F, faisant avec *o*D un angle égal à l'angle de l'inclinaison des lignes, & coupant ND continuée en F: alors F sera le Point accidental cherché, quand les lignes ne sont point inclinées vers le Tableau: car si elles étoient ainsi inclinées, il faudroit mener *o*F au-dessous de *o*D. * 13, 14

DEMONSTRATION.

Supposons que par l'œil il passe un plan parallèle aux lignes inclinées; l'intersection de ce plan avec le Plan horizontal sera OD; & avec le Plan géométral ce sera SN. Il est visible que si au-dessous du Plan horizontal, quand les lignes sont inclinées vers le Tableau, & au-dessus quand elles le sont de l'autre côté; on méne dans ce plan une ligne faisant avec OD un angle égal à celui de l'inclinaison des lignes proposées; il est visible, dis-je, que cette ligne sera parallèle aux lignes proposées, & rencontrera * le Tableau dans le Point accidental cherché. Si à présent on fait tourner sur la ligne ND, comme sur son axe, le plan que nous venons de supposer, l'œil & le Point de station, qui sont dans ce plan, rencontreront le Tableau en *o* & en *s*; car les lignes D*o* & N*s* sont égales à DO & NS, & forment des angles droits avec la ligne *so*, qui joint leurs extrémités. Or ces deux points *s* & *o* répondent à la situation de l'œil & du Point de station l'un à l'égard de l'autre, dans le Plan que nous avons supposé. Donc la ligne *o*F répond aussi à la ligne qui * 13, 14

dans ce plan imaginaire a été ſuppoſée parallèle aux lignes propoſées ; par conſéquent le point F eſt la rencontre de cette parallèle avec le Tableau ; & ainſi c'eſt le Point accidental cherché.

REMARQUE.

Quand on a le Point accidental T des perpendiculaires au Plan géométral, on abrége cette opération, en menant la ligne TD, qui paſſe néceſſairement par le point N. Le point *o* ſe trouve alors par l'interſection de l'arc O*o*, & d'un demi cercle dont le diamètre ſeroit TD.

PROBLEME VI.

90. *Trouver la Perſpective d'une ou de pluſieurs lignes inclinées au Plan géométral.*

PL. XV. Fig. 1. Soit A le pied d'une ligne inclinée au Plan géométral, *a* ſa Perſpective. Déterminez par le moyen du Triangle CPE, de la maniére qu'il
* 70 a été dit * pour le Tableau perpendiculaire, la longueur AB de la di-
* 83 rection de la ligne propoſée. Trouvez * le point X, Perſpective d'un point en l'air au-deſſus du point B, de la hauteur de PE ; alors *a*X ſera la Perſpective cherchée.

SECONDE METHODE.

91. *Par le Point accidental des lignes inclinées & celui de leurs directions.*

PL. XV. Fig. 1. Soit AB la direction d'une ligne inclinée ; D le Point accidental des directions, & F celui des lignes mêmes ; T le Point accidental des perpendiculaires.

PRATIQUE.

Continuez la ligne AB juſques à ce qu'elle rencontre la Ligne de terre en G, & menez la ligne GD, que vous couperez en *a* & en *b*, par des lignes tirées de A & B à l'œil. Tirez les lignes *a*F & T*b*, s'entrecoupant au point X, & alors *a*X ſera la Perſpective cherchée.

DEMONSTRATION.

ab eſt * la Perſpective de AB, par conſéquent la Perſpective de la ligne inclinée eſt une partie de *a*F. Mais l'extrémité de la ligne inclinée eſt dans une perpendiculaire au Plan géométral dans le point B; donc la Perſpective de cette extrémité eſt dans T*b*, & par conſéquent en X, interſection de cette ligne avec *a*F. * 44

TROISIEME METHODE.

92. *PL. XV. Fig. 2.* Par le Point accidental F des lignes inclinées, menez FH parallèle à la Ligne de terre & égale à *o*F, de la fig. 1. *a* eſt la Perſpective du pied de la ligne inclinée, dont on trouvera la Perſpective *a*X par la pratique décrite *n.* 71.

CHAPITRE SIXIEME.

Pratique de la Perſpective ſur le Tableau parallèle.

PROBLEME I.

Trouver la Perſpective d'une figure qui eſt dans le Plan géométral. 93.

Quand le Tableau eſt parallèle à l'horizon, on le conſidére ordinairement comme étant lui-même le Plan géométral; & alors le Problème eſt tout réſolu; mais quand il arrive qu'un autre Plan géométral eſt donné au-deſſus, ou au-deſſous du Tableau, ſur lequel on doit tracer la Perſpective des figures qui ſont dans ce Plan, il faut, par la Géometrie, faire ſur le Tableau des figures ſemblables aux premiéres; en ſorte que les lignes du Tableau ſoient à leurs correſpondantes dans le Plan géométral, comme la diſtance de l'œil au Tableau eſt à ſa diſtance au Plan géométral.

La démonſtration de cette pratique eſt évidente par le *n.* 8. & 9.

PROBLEME II.

94. *Trouver la Perspective d'une ligne perpendiculaire au Plan géométral.*

PL. XV. Fig. 3. Tirez en quelqu'endroit à part, une ligne OS, sur laquelle vous prendrez OR égale à la distance de l'œil au Tableau, & OS, égale à la distance de l'œil au Plan géométral. Elevez sur cette ligne aux points R & S, les perpendiculaires indéfinies RG & SM; & prenant sur SM, le point M à discrétion, élevez sur cette ligne, la perpendiculaire MN égale à la ligne donnée, & tirez les lignes MO, & NO, qui coupent la ligne RG, au points E & G. Ensuite ayant mené à discrétion dans le Tableau une ligne par le point T, qui est le point où une ligne qui tombe de l'œil perpendiculairement sur le Tableau, rencontre ce Plan, prenez sur cette ligne TH, égale à RE, & TI, égale à RG; tirez par le point *a*, Perspective du pied de la perpendiculaire donnée, les lignes T*a*, & H*a*; & par le point I, menez une ligne IX parallèle à H*a*, & qui coupe T*a*, en X; & alors *a*X sera la Perspective cherchée.

PL. XV. Fig. 4.

DEMONSTRATION.

* 13, 14 Il est évident * par ce que je viens de dire, que le point T, est le Point accidental des lignes perpendiculaires au Plan géométral; & par conséquent la Perspective cherchée est une partie de T*a*.

* 4 De plus il est évident * que si par des lignes droites on joint les pieds & les extrémités de deux lignes perpendiculaires au Plan géométral & égales entr'elles, ces lignes de jonction auront des répréſentations parallèles, puis qu'elles sont parallèles entr'elles & parallèles au Tableau. Par conséquent puisque HI, par la construction, est la Perspective d'une ligne perpendiculaire au Plan géométral, & égale à la ligne donnée, & que H*a*, passe par les Perspectives du pied de cette perpendiculaire, & de celui de la perpendiculaire donnée, IX qui est parallèle à H*a*, & qui passe par l'extrémité de la Perspective HI, passera aussi par la Perspective de l'extrémité de la ligne donnée; & par conséquent le point X sera la Perspective de cette extrémité.

REMARQUE.

95. Quand on a la Perspective d'une ligne perpendiculaire au Plan géométral, il est facile, par ce que nous venons de dire, de trouver la Perspective de toutes les autres perpendiculaires de même longueur.

SECONDE METHODE.

Quand le Tableau sert de Plan géométral. 96.

Soit T, (comme dans la figure 4. de la Pl. XV.) le Point accidental des lignes perpendiculaires; HI la portion d'un cercle, qui a, pour centre T, & pour rayon la distance de l'œil au Tableau; *a* est le point où la perpendiculaire, dont on cherche la Perspective, rencontre le Tableau; BC est la longueur de cette perpendiculaire. *PL. XVI. Fig. 1.*

PRATIQUE.

De *a*, comme centre, & pour rayon BC, décrivez le cercle LF, & menez la ligne IL ou HF, qui raze les deux cercles HI, & FL; & alors *a*X ou *ax*, est la Perspective cherchée: *a*X, quand la perpendiculaire est élevée sur la face du Tableau que l'œil regarde; & *ax*, quand la perpendiculaire est du côté opposé.

DEMONSTRATION.

Des centres *a* & T, tirez les rayons *a*F, *a*L, TH, & TI, aux points d'atouchement des lignes HF & IL, aux cercles FL & HI.
A cause des Triangles semblables THX & *a*FX,

$$TH - aF,\ aF :: Ta,\ aX,$$

Dans les Triangles semblables TI*x*, & *ax*L.

$$TI + aL,\ aL :: Ta,\ ax.$$

Maintenant soit PMNR, le Tableau; O l'œil; AQ, la perpendiculaire dont on cherche la Perspective; O*t*, une perpendiculaire de l'œil au Tableau, & par conséquent *t*, le point T de la figure précédente. Si on méne les lignes OQ, il est évident que A*x*, ou AX, est la perspective de AQ, suivant que cette ligne est au-dessus ou au-dessous du Tableau par rapport à l'œil. Or dans les Triangles semblables O*tx* & QA*x*. *PL. XVI. Fig. 2.*

$$Ot - AQ,\ AQ :: tA,\ Ax.$$

Et dans les Triangles semblables O*t*X & XAQ

$$Ot + AQ,\ AQ :: tA,\ AX.$$

Or O*t* est égale à TH, & à TI, de la figure précédente; & AQ est égale à *a*F, & à *a*L, de la même figure; comme aussi *t*A, à T*a*: par conséquent si on compare ces deux derniéres proportions avec les précédentes, on trouvera A*x* = *a*X & AX = *ax*; ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

97. Quand on ne peut pas employer cette méthode, parce que les deux cercles s'entrecoupent, ou ſont l'un dans l'autre, il faut par le point T, mener à diſcrétion une ligne égale à la diſtance de l'œil au Tableau; & par le point *a*, lui tirer vers L ou vers F, ſuivant que la perpendiculaire eſt placée d'un côté ou d'autre du Tableau par rapport à l'œil, une parallèle égale à la perpendiculaire donnée. La ligne qui paſſera par les extrémités de ces parallèles, déterminera la Perſpective cherchée, par ſon interſection avec T*a*, comme il eſt évident par la démonſtration précédente.

TROISIEME METHODE.

98. *Pour les perpendiculaires égales à une autre, dont on a déja la Perſpective.*

PL. XVI. Fig. 3. Soit HI, la Perſpective d'une perpendiculaire au Plan géométral ou au Tableau. Du Point accidental T, comme centre, & pour rayon TH, décrivez l'arc de cercle HG, dont la corde eſt égale à HI; tirez la ligne indéterminée TGC. *a* & *b* repréſentent les pieds des perpendiculaires dont il faut trouver la Perſpective.

PRATIQUE.

Du centre T, décrivez par les points *a* & *b*, les portions de cercle *b*FE, & *a*DC; menez les lignes T*b*, & T*a*, ſur leſquelles prenez *b*L, égale à EF, & *a*X, égale à CD; & vous aurez les Perſpectives cherchées.

DEMONSTRATION.

Si HI, & *a*X, répréſentent des perpendiculaires de même grandeur; par la démonſtration de la méthode précédente, IH, eſt à HT, & *a*X, à *a*T, comme la différence de ces perpendiculaires avec la hauteur de l'œil, eſt à la grandeur de ces perpendiculaires: & ainſi

$$HI, TH :: aX, aT$$

Mais dans la conſtruction de ce Problème, à cauſe des Triangles ſemblables TCD & THG

$$HG = HI, TH :: CD = aX, TD = aT$$

par conſéquent HI, & *a*X, repréſentent des perpendiculaires de même grandeur. Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROBLEME III.

Trouver le Point accidental de plusieurs lignes parallèles entr'elles & inclinées au Plan géométral. 99.

Soit ab, la Perspective de la direction d'une des lignes données. PL. XVI. Fig. 4.

PRATIQUE.

Menez, par le Point accidental T des lignes perpendiculaires au Plan géométral, la ligne FTL, parallèle à ab; & au point T, élevez à cette ligne la perpendiculaire TG, égale à la distance de l'œil au Tableau; & par le point G, menez la ligne GL, ou GF, en sorte que l'angle TLG, ou TFG, soit égal à l'angle de l'inclinaison des lignes données; & alors le point L, sera le Point accidental cherché, quand les lignes données sont inclinées vers b; & ce sera F, quand elles sont inclinées vers a.

DEMONSTRATION.

Il est clair par la construction, que si l'on suppose TG élevé en l'air perpendiculairement au Tableau, GL ou GF, sera parallèle aux lignes données; & par conséquent * L, ou F, sera le Point accidental cherché. * 13, 14

PROBLEME IV.

Trouver la Perspective d'une ou de plusieurs lignes inclinées au Plan géométral. 100.

Soit ab la Perspective de la direction de la ligne donnée: on détermine la longueur de cette direction, par le moyen du Triangle ECP, comme il a été dit * pour le Tableau perpendiculaire. Ensuite tirez par le point b la ligne bX, qui représente une perpendiculaire au Plan géométral, égale à EP; & menez aX, qui sera la Perspective cherchée. PL. XVI. Fig. 5. * 70

SECONDE METHODE.

Par le moyen du Point accidental & de la Perspective des directions. 101.

Les mêmes choses étant données que dans la méthode précédente; soit F, le Point accidental des lignes proposées, & T, celui des perpendiculaires au Plan géométral. PL. XVI. Fig. 5.

PRATIQUE.

Du point F, menez une ligne par le point *a* : entrecoupez la au point X, par une autre ligne que vous menerez du point T, par le point *b*; & alors *a*X sera la Perſpective cherchée.

TROISIEME METHODE.

102. *Par le Point accidental, ſans employer la Perſpective des directions.*

PL. XVI. Fig. 5. Les mêmes choſes étant données que dans la méthode précédente; par le point *a*, tirez *a*I, qui répréſente une ligne perpendiculaire au Plan géométral, & égale à EP. Par le point I, tirez à FT, une parallèle, qui par ſon interſection avec F*a*, détermine *a*X, qui eſt la Perſpective cherchée.

REMARQUE.

Quoique toutes les pratiques de ce Chapitre ſe rapportent au Tableau qui eſt au-deſſous de l'œil, cela n'empêche pas qu'on ne s'en ſerve auſſi quand le Tableau eſt placé au-deſſus de l'œil. Dans ce cas on ſuppoſe
* 80 le Plan géométral au-deſſus des objets, comme on l'a déja fait * dans une autre occaſion.

CHAPITRE SEPTIEME.

Des Ombres.

103. JE remarquerai d'abord ici avec ceux qui ont écrit ſur cette matiére, que quand le corps lumineux eſt égal au corps opaque, l'ombre eſt renfermée entre des parallèles, & que par conſéquent, elle eſt égale ſur tous les plans parallèles entr'eux, que l'on pourroit placer à quelque diſtance que ce fut au-delà du corps opaque. Quand le corps lumineux eſt moindre que le corps opaque, l'ombre croit & s'augmente à l'infini : & quand au contraire le corps opaque eſt plus petit que le corps lumineux, l'ombre va en décroiſſant ſe terminer dans un point.

Quoique le Soleil ſoit infiniment plus grand qu'aucun des corps qu'il illumine, l'extrême éloignement où il eſt par rapport à ces corps, nous fera conſidérer ſes rayons comme s'ils étoient parallèles; & par conſéquent, les corps qu'il éclaire comme renfermés entre des parallèles: & c'eſt la prémiére ſorte d'ombre que j'expliquerai ici: je parlerai enſuite des ombres qui vont toujours en croiſſant. Ce que je dirai, ſuffira pour deſſiner les ombres des corps rectilignes; car quant aux ombres des autres corps, il eſt ſi difficile de les déterminer géométriquement, que le meilleur c'eſt d'examiner celles qu'on voit tous les jours, pour ſe former une routine de les imiter.

Pour ce qui regarde les ombres qui ſe perdent en un point, je n'en dirai rien, leur trop grande variété ne permettant pas qu'on puiſſe donner des régles mathématiques pour les déterminer. D'ailleurs, les Peintres ne ſuppoſent guéres leurs Tableaux illuminés de cette troiſiéme maniére; & quand ils le font, c'eſt pour repréſenter une chambre dans laquelle le jour entre par les fenêtres: mais alors le nombre de ces fenêtres, l'endroit où on les ſuppoſe placées, les différentes réflexions que ſouffre la lumiére dans la chambre, toutes ces choſes produiſent tant de divers changemens, qu'un Peintre aura plutôt fait de prendre garde aux ombres qu'il voit à tous momens, pour ſe mouler là-deſſus dans le beſoin, que de recourir à des régles qui ne peuvent pas comprendre tous les cas. Je paſſerai auſſi ſous ſilence la matiére du *clair-obſcur*; un peu d'attention à ce qu'on peut voir journellement éclaircira mieux cette matiére que ne pourroit faire un long diſcours, d'autant plus qu'il eſt impoſſible, ſur ce ſujet, de fournir des régles générales, & que la multitude infinie des figures ne ſouffre pas qu'on les examine chacune en particulier: outre que pour attraper le *clair-obſcur*, un Peintre doit faire attention non-ſeulement aux figures des objets, mais encore à leur couleur & à leur matiére.

Pour les Ombres ſolaires.

PROBLEME I.

Trouver la Perſpective de l'Ombre d'un point en l'air, dont on connoît l'aſſiéte & la hauteur au-deſſus du Plan géométral. 101.

Soit Z le Plan géométral; A le point d'aſſiéte du point donné; AB la direction d'un rayon du Soleil. *PL. XVII. Fig. 1.*

PRATIQUE.

Tirez en quelqu'endroit à part deux lignes qui faſſent enſemble un angle droit ; & prenez ſur une de ces lignes PE, égale à la hauteur du point donné au-deſſus du Plan géométral : puis tirant par le point E, la ligne EC, qui faſſe avec CP, un angle égal à la hauteur du Soleil, faites AB, égale à CP. Trouvez la Perſpective du point B, & vous aurez le point cherché.

REMARQUE.

Cette Pratique, comme toutes les autres de ce chapitre, ſe rapporte à toutes les ſituations du Tableau, & elle eſt ſi évidente qu'il n'eſt pas beſoin de la démontrer.

PROBLEME II.

105. *Trouver la Perſpective de l'Ombre d'un point en l'air, dont on a la repréſentation auſſi-bien que celle de ſon aſſiéte, ſans ſe ſervir du Plan géométral.*

PL. XVII. Fig. 2. Trouvez * F le Point accidental des rayons du Soleil, & D, celui de leurs directions : puis du point D, tirez une ligne par *a*, Perſpective de l'aſſiéte du point donné ; & du point F, tirez-en une autre par I, Perſpective du point donné ; & alors *b*, interſection de ces deux lignes, ſera le point cherché, comme il eſt évident.

* 69, 89, 99.

REMARQUE.

Quoique pour trouver le Point accidental de pluſieurs lignes inclinées, nous ayons ſuppoſé * une des directions, marquée dans le Plan géométral, il ſuffit pour la pratique, de connoître l'angle que font ces directions avec la Ligne de terre : & ainſi, comme nous venons de le dire, on peut pour ce Problème ſe paſſer entiérement du Plan géométral.

* 69, 89.

106. Quand le Tableau eſt parallèle, les directions des rayons du Soleil n'ont pas de Point accidental ; mais leurs Perſpectives ſont parallèles entr'elles ; & dans ce cas, il faut tirer une de ces parallèles par le point *a* au lieu de la ligne D*a*. De plus quand il s'agit du Tableau perpendiculaire ou incliné, & que les rayons du Soleil ſont parallèles au Tableau, il faut mener

par le point *a*, une ligne parallèle à la Ligne de terre; & par le point I, il faut mener, parallèle aux rayons du Soleil, une autre ligne qui coupera la premiére dans le point cherché.

PROBLEME III.

Trouver la Perſpective de l'Ombre d'un point en l'air, quand il y a quelque corps qui empêche l'Ombre de tomber ſur le Plan géométral. 107.

Il faut alors trouver la Perſpective de la ſection de ce corps, par un plan qui paſſe par le point donné perpendiculaire au Plan géométral, & qui ſoit parallèle aux rayons du Soleil. L'interſection de cette Perſpective, & d'une ligne menée de l'apparence du point donné, à la repréſentation de ſon ombre, trouvée par un des Problèmes précédens, eſt la Perſpective cherchée.

Pour les Ombres d'une petite lumiére.

PROBLEME IV.

Trouver la Perſpective de l'Ombre d'un point dont on connoit l'aſſiéte, & la hauteur au-deſſus du Plan géométral. 108.

Soit Z, le Plan géométral; A, l'aſſiéte du point donné; & C celle de la lumiére: tirez la ligne CAB, indéfinie; & de C, comme centre, & pour rayon la hauteur de la lumiére au-deſſus du Plan géométral, tracez l'arc de cercle F: de même de A, comme centre, & pour rayon la hauteur du point donné, décrivez l'arc de cercle E. Menez la ligne FE, razant ces deux portions de cercles, & coupant la ligne CA en B. Alors ſi on cherche la Perſpective de B, on aura la Perſpective de l'ombre qu'on demandoit. *PL.XVII. Fig.* 3.

PROBLEME V.

Trouver la Perſpective de l'Ombre d'un point en l'air, dont on a la repréſentation avec celle de ſon aſſiéte, ſans ſe ſervir du Plan géométral. 109.

Il faut employer ici la pratique donnée * pour les ombres ſolaires, avec cette différence, qu'au lieu du Point accidental des rayons du Soleil, on ſe ſert ici de la Perſpective de la lumiére; & qu'au lieu du Point * 105

accidental des directions de ces rayons, on prend la Perspective du point d'affiéte de la lumiére.

REMARQUE.

* 106 Ce qui a été remarqué * sur les ombres solaires, ne regarde pas celles dont on parle ici: car à l'égard de ce Problème, il n'y a point de différence entre le Tableau perpendiculaire, incliné, ou parallèle; parce que dans ces diverses situations, les deux points dont on se sert peuvent toujours se trouver.

* 107 Il faut encore remarquer que le Problème 3. * se rapporte aussi bien aux ombres d'une petite lumiére, qu'à celles du Soleil, avec cette différence pourtant, que le Plan, qui dans le Prob. 3. a été supposé parallèle aux rayons du Soleil, dans celui-ci doit être supposé passer par la lumiére pour laquelle on cherche les ombres.

CHAPITRE HUITIEME.

Moyens d'abréger méchaniquement les opérations de la Perspective.

Pour le Tableau perpendiculaire.

PROBLEME I.

110. *Trouver la Perspective des Figures qui sont dans le Plan géométral.*

PL. XVIII. Fig. 1. * 31 Soit O, l'œil; RH, la Ligne de terre; F & G, des points * marqués par les mêmes lettres dans la fig. de la Planche III. Attachez une régle au point G, laquelle puisse tourner sur ce point, en sorte que toutes les lignes qu'on tire le long d'un des côtés de la régle, passent par le point G. Au point F, est attaché un fil qui passe par le trou d'une éguille marquée B; elle doit être d'argent ou de laiton, & pointue des deux côtés, & ayant son trou proche d'une de ses extrémités. Le fil passe ensuite autour d'une pointe fixée en O, & il est toujours tendu par le moyen d'un plomb attaché à l'extrémité du fil, & de sorte qu'il pend librement hors de la table.

PRATIQUE.

Soit A, un des points de la figure qu'on veut mettre en Perſpective: mettez ſur ce point celle des deux pointes de l'éguille qui eſt proche du trou par où paſſe le fil. Faites gliſſer la régle GE, juſques à ce qu'elle coupe le fil AF, au point E, où ce fil coupe la Ligne de terre; alors le point *a*, où la régle coupe le fil AO, eſt le point cherché, lequel on pourra marquer avec l'autre bout de l'éguille, en ſerrant la régle ſur le papier, pour qu'elle aſſujettiſſe le fil, que le plomb ſans cette précaution pourroit faire gliſſer. On continuera de la même maniére pour trouver les autres points.

Quant à la démonſtration, *voyez n.* 32.

Quelquefois il eſt plus commode d'uſer de la méthode ſuivante.

SECONDE METHODE.

Soit O, l'œil; HE, la Ligne de terre; FI, la Ligne géométrale. 111. Ayez une régle MN, à laquelle ſoient attachés deux fils égaux. De O, *PL. XIX. Fig.* 1. comme centre, & pour rayon la diſtance des fils ſur la régle, coupez par un arc de cercle la Ligne géométrale en F; attachez à ce point l'extrémité d'un des fils de la régle, & l'extrémité de l'autre au point O: ayez encore un fil qui paſſe par une éguille, comme il a été dit dans la méthode précédente: attachez ce fil en F, & fixant l'éguille en A, faites le paſſer autour d'une pointe placée en O. La ſeule différence qu'il y a entre cette méthode & la méthode précédente, c'eſt qu'on ſe ſert de la régle MN, en tenant toujours tendus les fils MF, & NO, au lieu d'employer une régle qui tourne autour d'un point.

La démonſtration eſt donnée ci-deſſus *n.* 39.

PROBLEME II.

Trouver la Perſpective d'une ou de pluſieurs lignes perpendiculaires au Plan géométral. 112.

Il faut avoir deux régles LC, & NZ, attachées par deux fils, ou *PL. XVIII. Fig.* 1. plutôt par deux fils d'archal égaux, & arrêtés à des diſtances égales LI & MN, ſur les deux régles. Fixez l'une de ces régles au bord du Tableau, perpendiculairement à la Ligne de terre. Ayez un fil qui paſſe par une éguille, & qui ſoit aſſujetti par un plomb, de la maniére que je

* 110 l'ai déja dit *: attachez ce fil à la couliſſe D, qui peut ſe mouvoir le long de la régle LC; & faites paſſer ce fil autour d'une pointe dreſſée contre la régle CL, en C, de maniére que CH, ſoit égale à la hauteur de l'œil.

PRATIQUE.

Soit T, la Perſpective du pied d'une perpendiculaire. Faites gliſſer la couliſſe D le long de CL, juſques à ce que CD ſoit égale au double de cette perpendiculaire. Tendez le fil en faiſant gliſſer l'éguille le long de la Ligne horizontale, juſques à ce que le bout du fil qui paſſe par C, traverſe le point T: alors l'autre bout rencontrera en P la régle NZ, que l'on aura fait gliſſer juſques à ce qu'elle paſſe par T. Et PT ſera la Perſpective demandée.

La démonſtration de cette pratique eſt évidente, par ce qui a été dit *n. 59*.

SECONDE METHODE.

113. *Pour les perpendiculaires de même longueur.*

PL. XVIII. Fig. 1. Quand il y a un grand nombre de perpendiculaires de même longueur, FG, étant parallèle à la Ligne de terre, & FO, égale à la hauteur de l'œil, on peut prendre F*f*, égale à la longueur de ces perpendiculaires, & attacher en *f*, le fil qui eſt arrêté en F. Elevez à la Ligne de terre la perpendiculaire RS, égale à F*f*, & menez SQ, parallèle à la Ligne de
* 61 terre. Tranſpoſez * les figures du Plan géométral, en ſorte que le point
* 110 R, convienne avec le point S, & RH, avec SQ. Alors ſi on trouve * la Perſpective des pieds des perpendiculaires, en conſiderant SQ, comme la Ligne de terre, on aura celle de leurs extrémités.

TROISIEME METHODE.

114. *Pour les perpendiculaires de même longueur.*

PL. XIX. Fig. 1. Après avoir changé les figures du Plan géométral, comme on vient de
* 113 le dire *, prenez ſur la perpendiculaire RS, continuée, T*t*, égale à RS; & menez à la Ligne de terre la parallèle *fi*. Marquez ſur *fi*, le point *f*,
* 111 de même qu'on a marqué * F, dans FI; & attachez en *f*, les fils qui étoient attachés en F; puis en vous ſervant des fils ainſi attachés, & de
* 111 SQ, pour Ligne de terre, trouvez * la repréſentation des pieds des perpendiculaires, & vous aurez la Perſpective de leurs extrémités.

D E-

DEMONSTRATION.

Des deux derniéres Méthodes.

Si l'on suppose qu'il passe un plan par les extrémités des perpendiculaires égales ; ce plan sera parallèle au Plan géométral, & il rencontrera le Tableau en SQ, puisque RS, a été faite égale à ces perpendiculaires : de plus, les extrémités de ces perpendiculaires formeront dans ce second plan, une figure semblable à celle que forment leurs pieds dans le Plan géométral ; & cette figure sera placée, à l'égard de la ligne QS, comme celle du Plan géométral l'est à l'égard de HR. Par conséquent si on éleve la figure qui est dans le Plan géométral, en sorte qu'elle soit à l'égard de QS, ce qu'elle étoit à l'égard de HR, & si l'on trouve la Perspective des pieds des perpendiculaires proposées, on aura celle de leurs extrémités. Or le changement que nous avons dit qu'il falloit faire à la figure du Plan géométral, lui donne à l'égard de QS, la situation requise, & on a trouvé * la Perspective de la figure considérée dans ce nouveau Plan géométral, puis qu'on s'est servi de SQ, pour Ligne de terre, & que Of, (*Pl. XVIII. fig.* 1.) est égale à la hauteur de l'œil au-dessus de ce Plan, & que fi (*Pl. XIX. fig.* 1.) est la Ligne géométrale dans ce même Plan.

115. *PL. XVIII. Fig.* 1. & *PL. XIX. Fig.* 1.

* 32, 35

Pour le Tableau incliné.

PROBLEME III.

Trouver la Perspective des figures qui sont dans le Plan géométral. 116.

On peut se servir ici des pratiques données * pour le Tableau perpendiculaire, puisque le Tableau incliné se peut changer * dans un Tableau perpendiculaire.

* 110, 111
* 82

PROBLEME IV.

Trouver la Perspective de plusieurs lignes de même longueur, perpendiculaires au Plan géométral. 117.

Elevez en quelque point de la Ligne de terre, une perpendiculaire RC, sur laquelle prenez RL, égale aux lignes données ; & tirez par le point

PL. XIX. Fig. 2.

L, la ligne LP, en ſorte que l'angle LPR, ſoit égal à l'angle de l'inclinaiſon du Tableau; puis ayant pris RS, égale à PL, & SC, égale à PR, menez les lignes SQ, & CD, parallèles à la Ligne de terre: enſuite élevez les figures du Plan géométral, jûſqu'à ce que le point R, convienne avec le point C, & la ligne RH, avec CD; puis faites le reſte
* 113, 114 comme pour le Tableau perpendiculaire *, en vous ſervant de SQ, pour la Ligne de terre.

Pour la démonſtration, *voyez n.* 115.

REMARQUE.

Le point C, doit être pris au-deſſous du point S, quand le Tableau eſt incliné vers l'œil, & au-deſſus, quand il l'eſt de l'autre côté. F*f* de la *Pl. XVIII. fig.* 1. doit être priſe ici égale à RS, & la ligne T*t* de la *Pl. XIX. fig.* 1. doit être ici une partie de la ligne RC continuée, & elle doit être égale à RS.

Pour le Tableau parallèle.

PROBLEME V.

118. *Mettre en Perſpective des figures qui ſont dans le Plan géométral.*

PL. XX. Fig. 1. Ayant tiré au hazard une ligne CF, prenez à diſcrétion ſur cette ligne le point I, & faites IH & IG, égales à la diſtance de l'œil d'avec le Tableau: Faites de plus IC, & IF, égales à la diſtance de l'œil au Plan géométral, ou du moins que IG, & IH, ſoient à IF, & IC, comme la diſtance de l'œil au Tableau eſt à ſa diſtance au Plan géométral. Elevez aux points H & G, des perpendiculaires à la ligne CF; & ayez deux régles à chacune deſquelles ſoient attachés deux fils égaux, en ſorte que les diſtances des points où ces fils ſont attachés dans chacune des régles, ſoient égales entr'elles, comme MN, & PQ: faites enſuite de F, & de C, comme centres, & pour rayon MN ou PQ, deux arcs de cercles qui coupent les perpendiculaires élevées aux points G & H, dans les points E & D; puis attachez les extrémités des deux fils d'une des régles, aux points C & D, & les fils de l'autre, aux points F & E. Tirez la ligne DE.

PRATIQUE.

Soit Z, le Plan géométral, & A, un point des figures données. Faites gliſſer les deux régles en tenant tendus tous les fils, juſques à ce que les deux fils attachés aux points C & F, ſe croiſent au point A; & alors le point *a*, où les deux autres fils ſe croiſent, eſt la perſpective cherchée. On en uſera de même pour trouver les autres points.

DÉMONSTRATION.

Le Triangle D*a*E, eſt ſemblable au Triangle CAF: & puiſque tous les Triangles que l'on forme pour de différents points, ont les mêmes bazes DE, & CF, qui ſont entr'elles comme la diſtance de l'œil au Tableau l'eſt à ſa diſtance au Plan géométral, il s'enſuit que leurs ſommets forment des figures ſemblables, dont les lignes correſpondantes ſont dans la même proportion, & qui par conſéquent ſont * les Perſpectives cherchées. 119. * 8, 9.

REMARQUE.

On pourra pour la commodité prendre les fils PE & MD, d'une autre couleur que les deux autres QF, & CN.

PROBLEME VI.

Trouver la Perſpective de pluſieurs lignes égales entr'elles, & perpendiculaires au Plan géométral. 120.

Soient C, D, E, F, G, I, H, les points marqués des mêmes lettres dans la figure précedente, comme auſſi les régles PQ & MN: ſoit de plus B, le point où une perpendiculaire de l'œil au Plan géométral, rencontre ce Plan; ſoit T, la Perſpective de ce point, trouvée par le Problème précédent. Faites FL, & CR, égales à la longueur des lignes données; & des points R, & L, comme centres, & pour rayon MN, ou PQ, diſtances des fils ſur les régles, faites deux arcs de cercle qui coupent les perpendiculaires HD, & GE, aux points X, & S: puis attachez aux points L, & S, les extrémités des fils qui étoient fixés aux points F & E; & tranſportez de même aux points R & X, les fils placés en C & en D: alors faiſant gliſſer les deux régles juſques à ce que les fils SP, & XM, s'entrecoupent au point T, marquez le point O, PL. XX. Fig. 2.

où les deux autres fils s'entrecoupent. Menez par ce point & par le point B, la ligne indéfinie BOV: ensuite changez les figures du Plan géométral, ensorte que le point B, convienne avec le point O, & la ligne BO, avec OV. Trouvez par le Problème précédent, en vous servant des fils attachés comme nous venons de le dire, les perspectives des pieds des perpendiculaires, & vous aurez celles de leurs extrémités.

DEMONSTRATION.

Supposons un plan qui passe par les extrémités de ces perpendiculaires; ce plan sera parallèle au Plan géométral, & par conséquent aussi au Tableau, puisque toutes les perpendiculaires sont supposées égales. Or la figure que les extrémités des perpendiculaires forment dans ce plan, est semblable & égale à celle que leurs pieds forment dans le Plan géométral: & par conséquent la Perspective de la figure qui est dans le second plan, est aussi semblable à la figure qui est dans le Plan géométral, & les lignes qui composent cette Perspective sont à leurs correspondantes dans ce second plan, comme la distance de l'œil au Tableau, est à sa distance au plan que nous venons de supposer. Mais par le moyen des fils attachés de la manière que nous venons de le dire, on trouve une figure dont les lignes
* 119 ont * cette proportion là; donc cette figure est la Perspective cherchée, & elle est située, à l'égard des Perspectives des figures du Plan géométral, comme elle doit l'être, parce que nous avons fait glisser ces figures; tellement que la perpendiculaire au point B, n'a pour Perspective qu'un point. Ces mêmes Perspectives sont aussi tournées de la manière qu'il le faut, parce que l'on a fait convenir la ligne BO, avec OV.

121. *Pour les Ombres solaires dans toutes les situations du Tableau.*

PROBLEME VII.

Trouver la Perspective des Ombres de plusieurs points élevés de la même hauteur au-dessus du Plan géométral.

* 104 Trouvez * un point dans le Plan géométral, qui soit l'Ombre d'un des points donnés: changez les figures du Plan géométral, en sorte que le point d'assiéte de ce point donné, convienne avec son Ombre, & que la ligne qui passe par ce point d'assiéte & par le point d'Ombre, convienne avec sa prolongation. Alors, si suivant la situation du Tableau, on cher-

che * la Perſpective des points d'aſſiéte des points donnés, on aura celle * 110, 116; 118
de leurs Ombres.

CHAPITRE NEUVIEME.

L'Uſage des régles de la Perſpective dans la Gnomonique: ou l'Art de tracer les Lignes horaires dans toutes ſortes de Quadrans, par le moyen de l'horizontal.

LA perfection du Deſſin n'eſt pas le ſeul fruit qu'on peut retirer de la Perſpective, on peut en appliquer les régles à quelques autres parties des Mathématiques, & principalement à la Gnomonique, ou à l'Art de tracer les Quadrans ſolaires: car ſi l'on conſidére l'extrémité du ſtile comme l'œil, & les rayons ſolaires comme des rayons viſuels, on pourra, par le moyen d'un Quadran horizontal, tracer tous les autres quadrans poſſibles pour la même latitude, comme nous l'allons démontrer.

Soit ABCD, un Quadran horizontal, fait pour une latitude quelle 122.
qu'elle puiſſe être; EF, ſon ſtile; HIML, un plan ſur lequel on doit *PL. XXI. Fig. 1.*
tracer un Quadran. Suppoſons que ce plan ſoit ſitué de telle maniére, que l'extrémité de ſon ſtile FG, convienne avec l'extrémité du ſtile du premier Quadran; alors ſi l'on trouve ſur le plan HIML, la Perſpective d'une des lignes horaires du Quadran ABCD; en conſidérant le point F, comme l'œil, il eſt évident * que l'ombre du point F, rencontrera cette * 2
Perſpective au même tems qu'elle auroit rencontré la ligne horaire dont elle eſt Perſpective; & par conſéquent cette ombre montrera ſur ce plan, l'heure qu'elle auroit montré ſur le Quadran. Ainſi cette Perſpective ſera une ligne horaire d'un Quadran tracé ſur le plan HLMI, & qui auroit pour ſtile GF. On démontrera la même choſe des Perſpectives des autres lignes horaires qui forment enſemble un Quadran ſur le plan HLMI. Voyons maintenant comment on peut trouver le plus commodément ces Perſpectives.

PROBLEME I.

123. *Tracer les Quadrans verticaux.*

PL. XXI. Fig. 2. Par le point E, qui est le pied du stile du Quadran horizontal ABFD, menez la ligne EO, égale à la longueur du stile du nouveau Quadran que l'on veut tracer, & faisant avec la méridienne C. XII, un angle égal à l'angle de la déclinaison du plan : cet angle doit être pris vers le point D, quand la déclinaison est du midi à l'orient, comme ici ; vers F, quand elle est du midi à l'occident ; vers A, quand elle est du septentrion à l'occident, & vers B, quand elle est du septentrion à l'orient. Par l'extrémité O de cette ligne, tirez la ligne IH, qui lui soit perpendiculaire ; puis menez par le centre du Quadran, la ligne CP, parallèle & égale à EO ; & par son extrémité P, menez la ligne PS, parallèle à HI.

PL. XXI. Fig. 3. A présent pour tracer le Quadran, tirez en un endroit à part la ligne *hi*, sur laquelle vous marquerez les divisions de la ligne HI ; & au point *o* qui convient avec le point O, vous éleverez la perpendiculaire *op*, égale au stile du Quadran horizontal ABDF : menez par l'extrémité de cette perpendiculaire une parallèle à *hi*, sur laquelle vous marquerez les divisions de la ligne PS, en faisant convenir le point P, avec le point *p* ; puis joignez chaque division de cette ligne avec celle qui lui répond dans la ligne *hi*, & vous aurez le Quadran cherché, dans lequel *p*, sera le pied du stile, & *ps*, la Ligne horizontale.

DEMONSTRATION.

PL. XXI. Fig. 2. & 3. La Ligne de terre est *hi* ; *ps* est la Ligne horizontale ; *p*, le point de vue ; & EO, ou CP, de la fig. 2. est la longueur du Rayon principal. Supposons que le plan *pshi*, soit posé perpendiculairement sur le Quadran horizontal, en sorte que la ligne *hi* convienne avec HI ; & le point *o*, avec O. Supposons de plus que par l'extrémité du stile, que je considére comme l'œil, on méne dans le Plan horizontal des lignes parallèles aux Lignes horaires du Quadran ; ces lignes, comme il est évident, rencontreront la Ligne horizontale *ps*, dans les points déja marqués ; & par conséquent * les Perspectives des Lignes horaires sont les lignes qui joignent les divisions des lignes *hi* & *ps*.

* 13

REMARQUE.

Quand il arrive que la ligne HI, rencontre la méridienne, la méthode ordinaire par le Quadran horizontal, eſt plus facile que celle-ci.

PROBLEME II.

Tracer les Quadrans inclinés. 124.

Ces Quadrans ſe tracent de la même maniére que les verticaux, après que l'on a fait la préparation ſuivante.

Tirez la ligne *ec* égale au ſtile du Quadran horizontal, & élevez à ſes deux extrémités les perpendiculaires *eo*, & *cp*; puis par le point *c*, menez la ligne *c*G égale à la longueur du ſtile du Quadran que l'on veut tracer; & faiſant avec *ce* un angle égal à l'angle de l'inclinaiſon du plan ſur lequel on le doit tracer; après quoi menez par l'extrémité G de cette ligne, la ligne *o*G*p* qui lui ſoit perpendiculaire. Cette préparation achevée, on ſe ſert de la pratique du Problème précédent, en faiſant EO & CP dans le Quadran horizontal, égales à *eo*, & *cp*, de cette figure; & *op* dans le Quadran que l'on veut tracer, égale à *op* de cette figure, dans laquelle le point G, donne le pied du ſtile. *PL. XXI. Fig. 4.*

S'il arrive dans la préparation dont nous venons de parler, que la ligne *po*, coupe la ligne *ec*, il faut dans le Quadran horizontal prendre EO, dans la même ligne, où on l'auroit priſe ſans cela; mais dans cette ligne continuée de l'autre côté du pied du ſtile. *PL. XXI. Fig. 5.*

La Démonſtration de ce Problème eſt la même que celle du précédent, ſi l'on conſidére que l'angle *po*Q, eſt égal à l'angle G*ce*, qui a été fait égal à celui de l'inclinaiſon du plan.

On pourroit encore montrer pluſieurs autres uſages des régles de la Perſpective, pour faciliter la Gnomonique; mais cela ne regarde pas mon ſujet, il me ſuffit d'en avoir donné un petit Eſſai, touchant le Problème le plus commun & le plus utile de l'Art de tracer les Quadrans.

FIN.

USA-

Fig. 1.

Fig. 4.

Fig. 2.

Fig. 5.

Fig. 3.

Fig. 6.

Fig. 7.

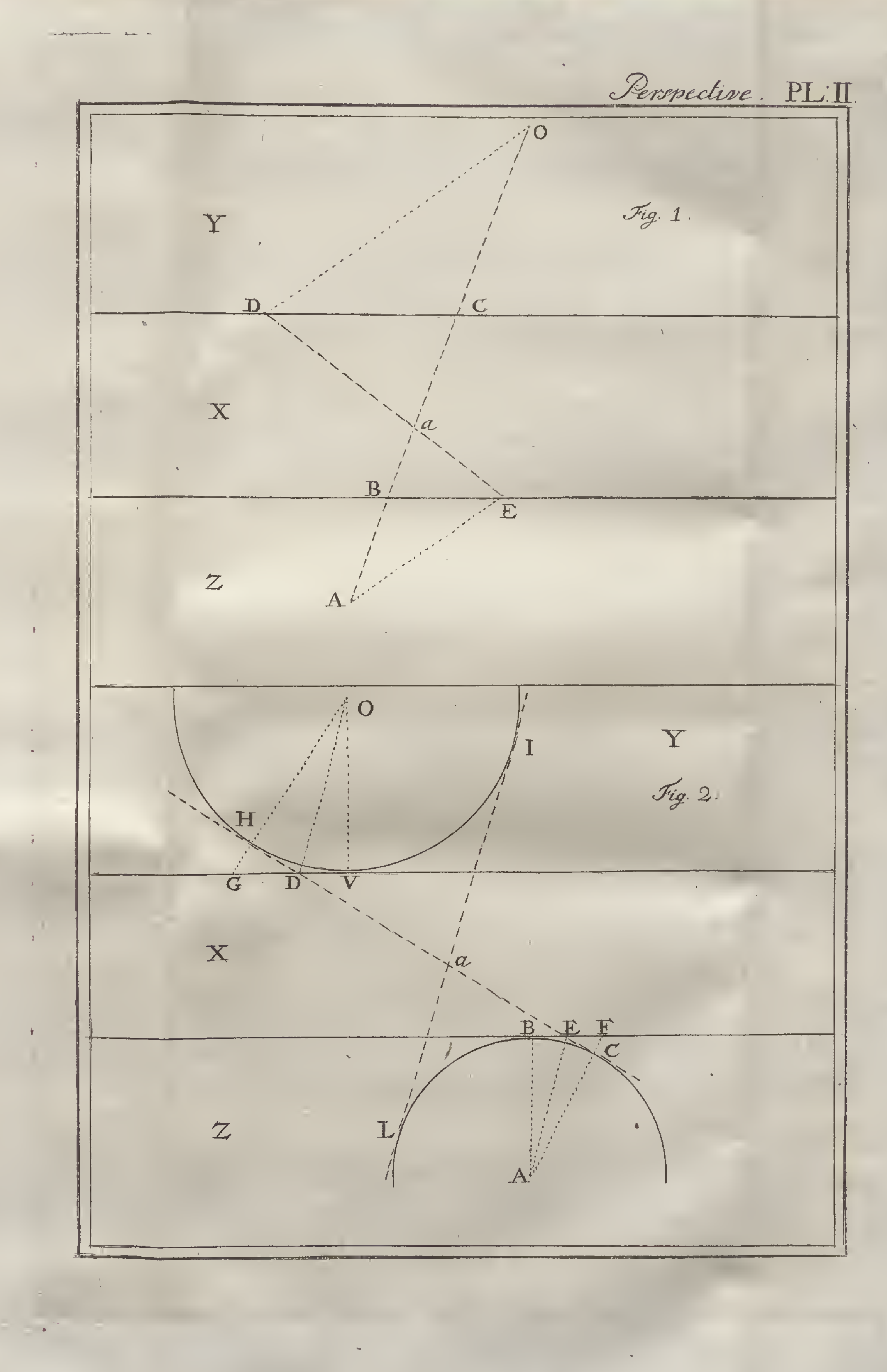

O
Y
Fig. 1.
D
C
X
a
B
E
Z
A
O
I
Y
Fig. 2.
H
G
D
V
X
a
B
E
F
C
Z
L
A

Fig. 1.

f

F O G

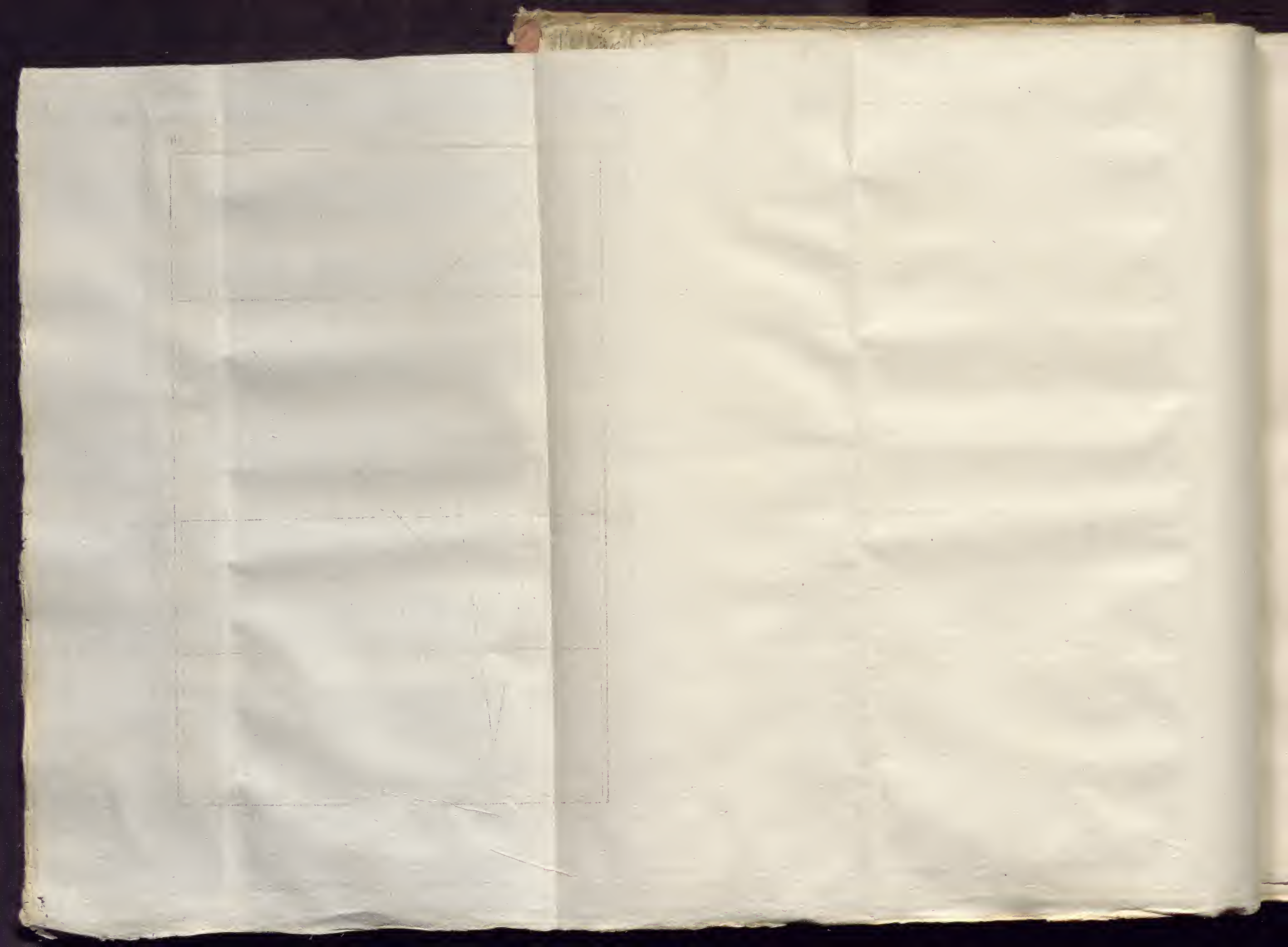
g

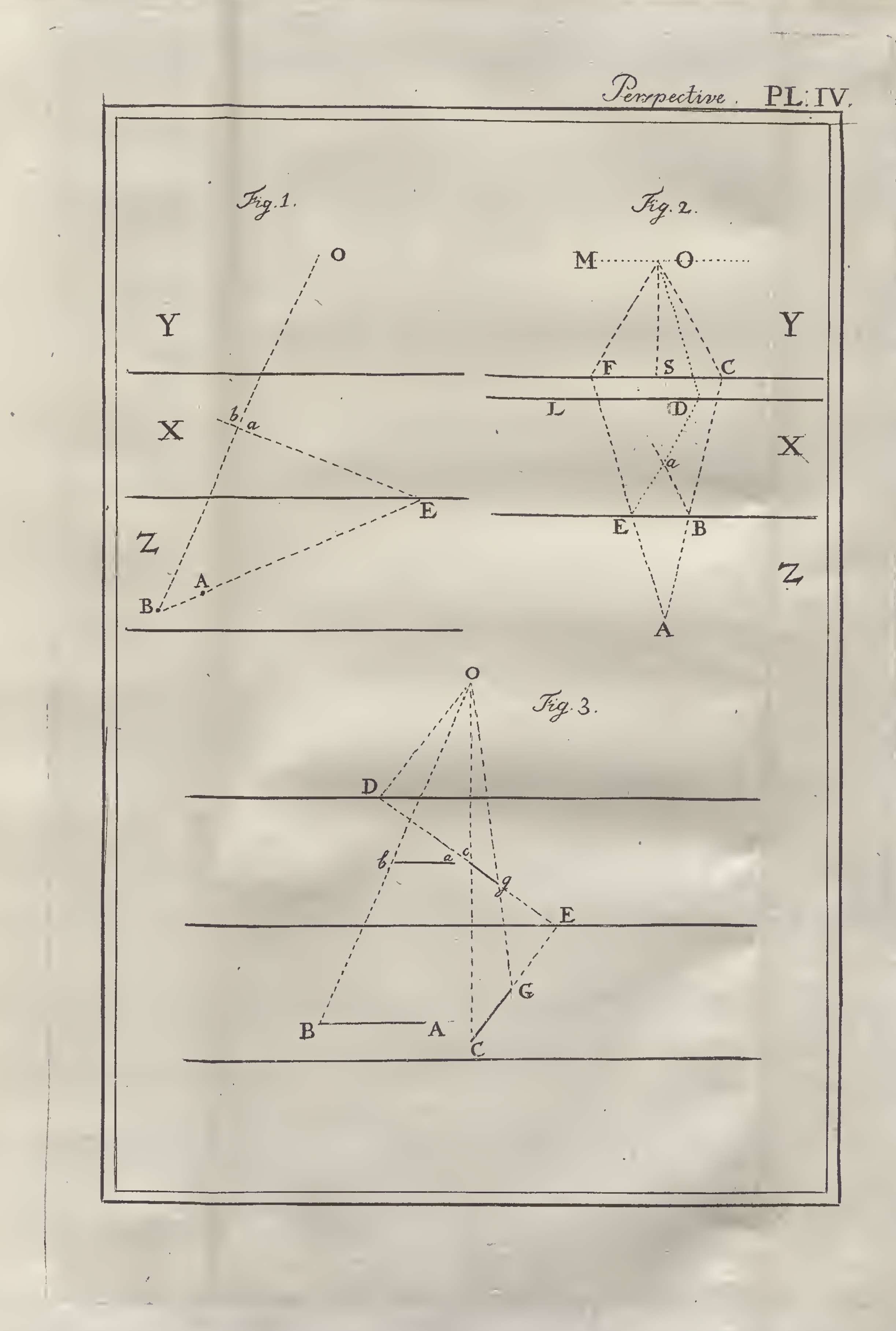
V D N L

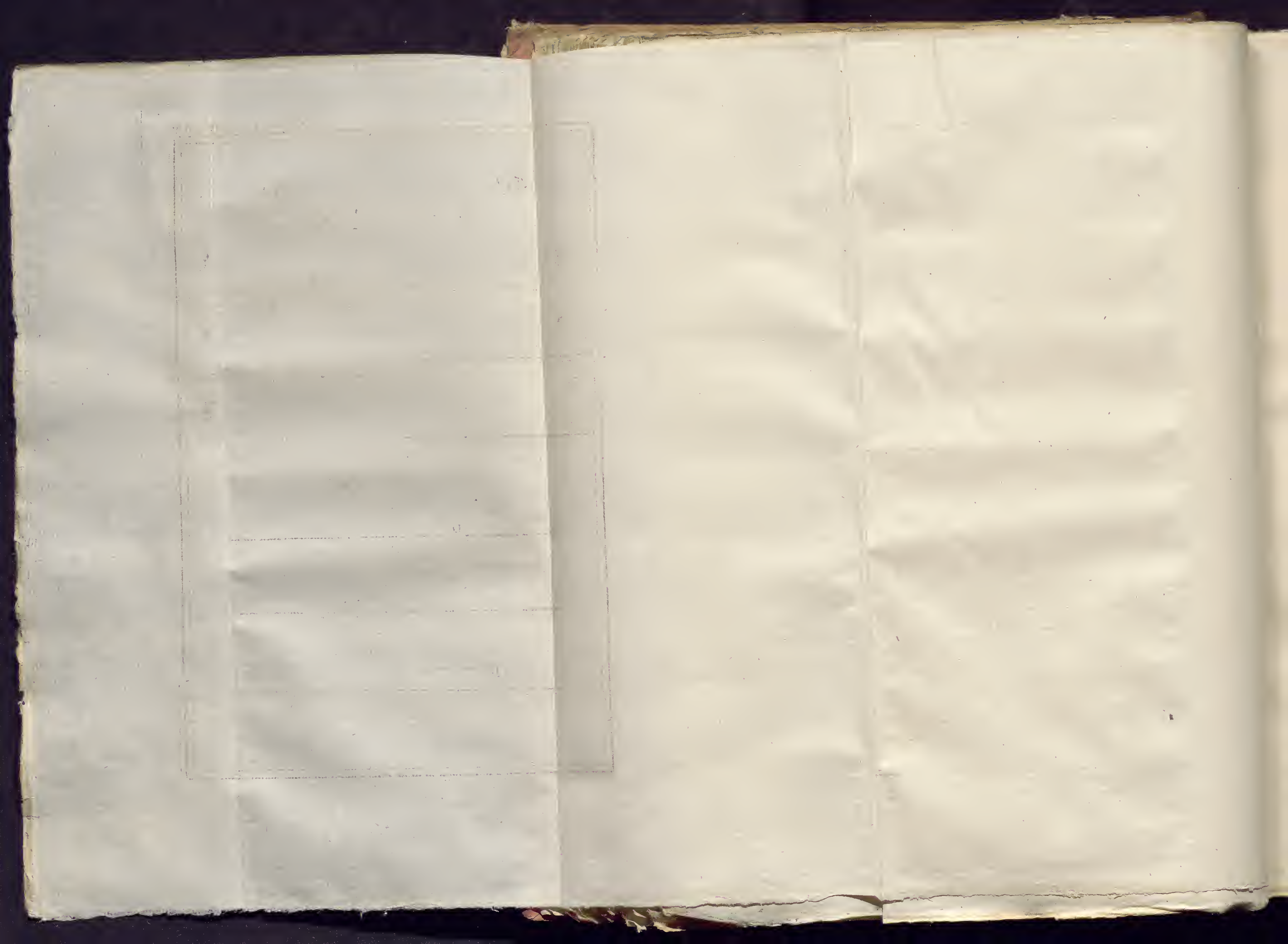
a

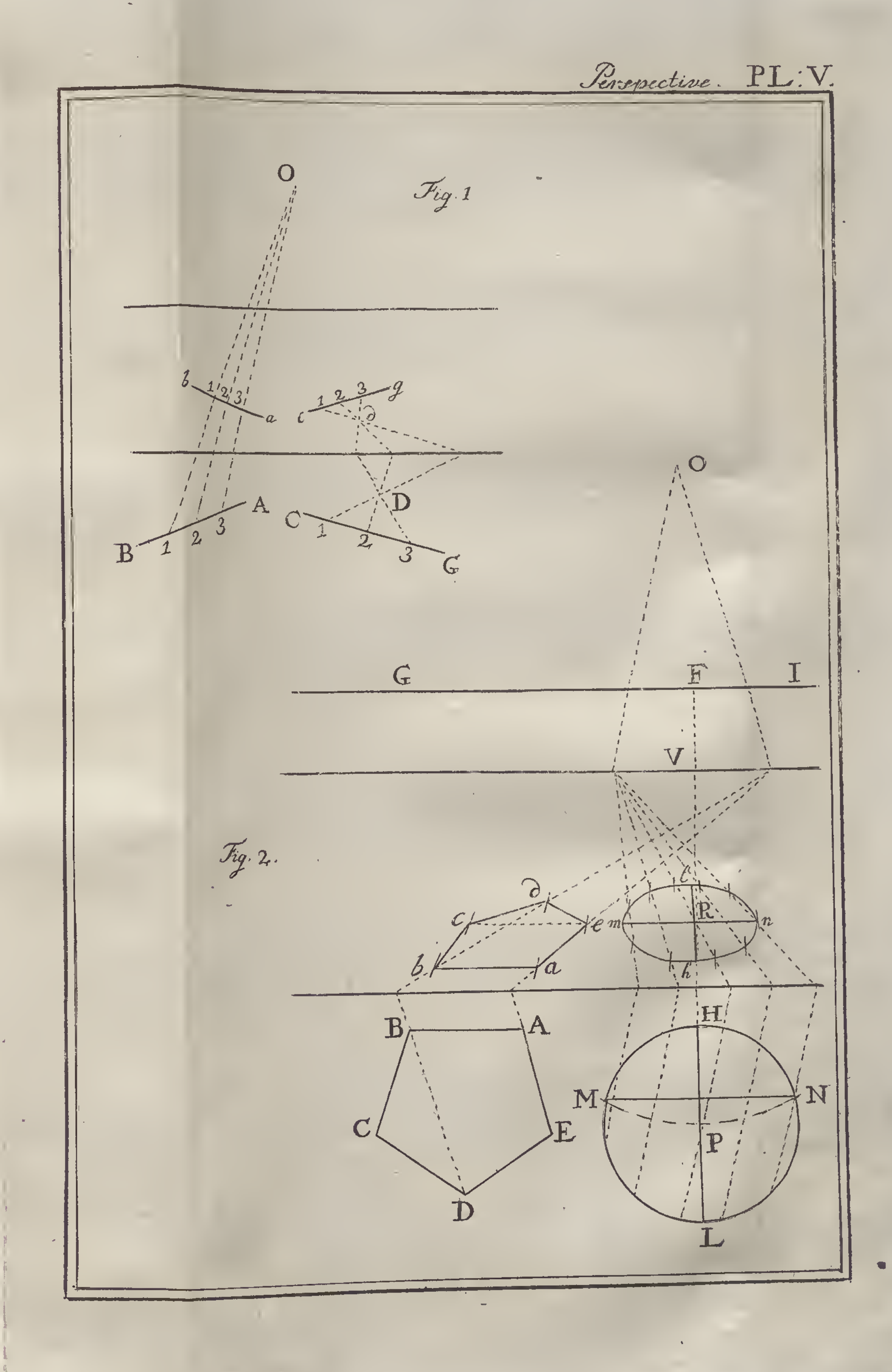
P E H I M

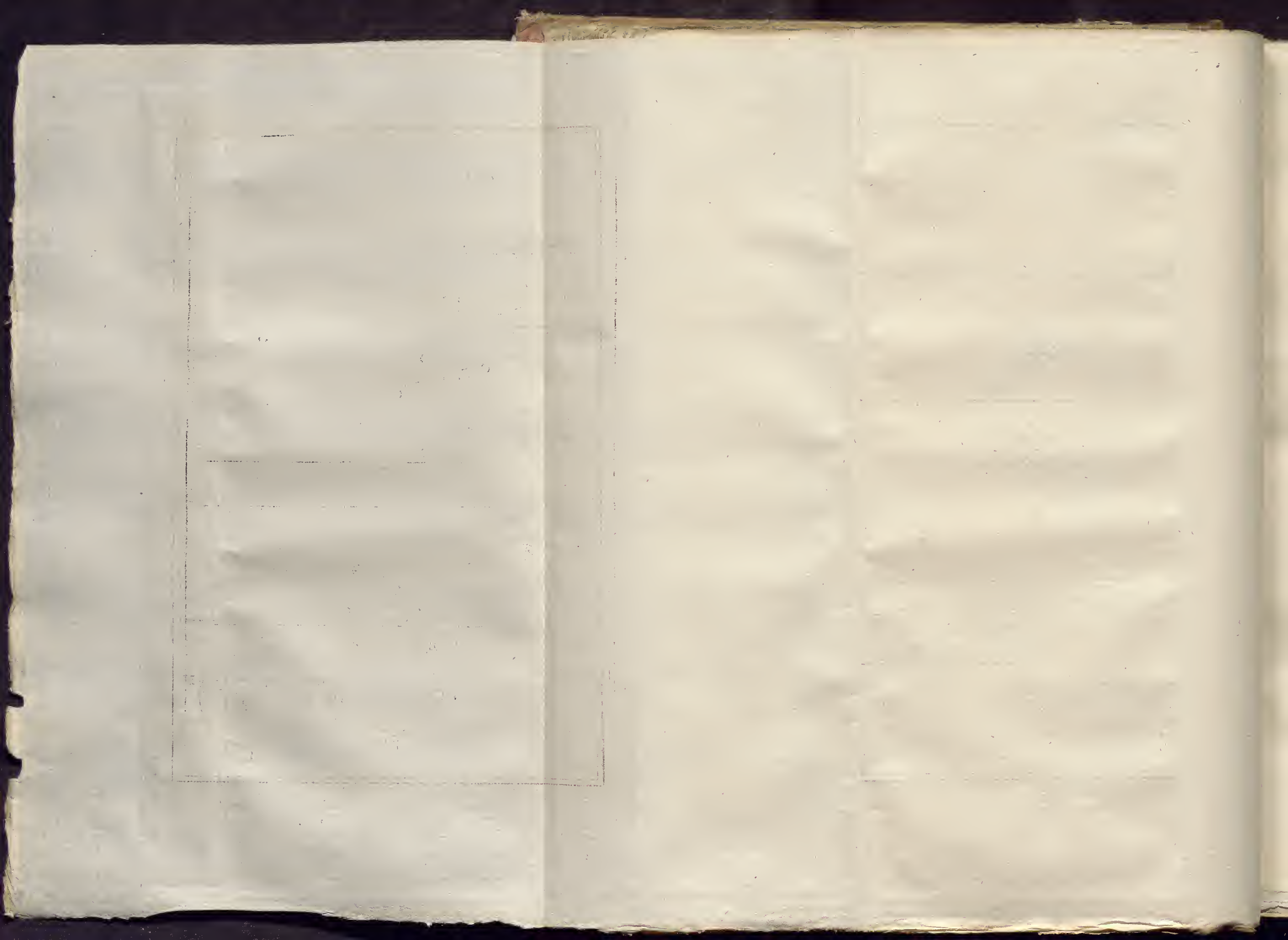
A

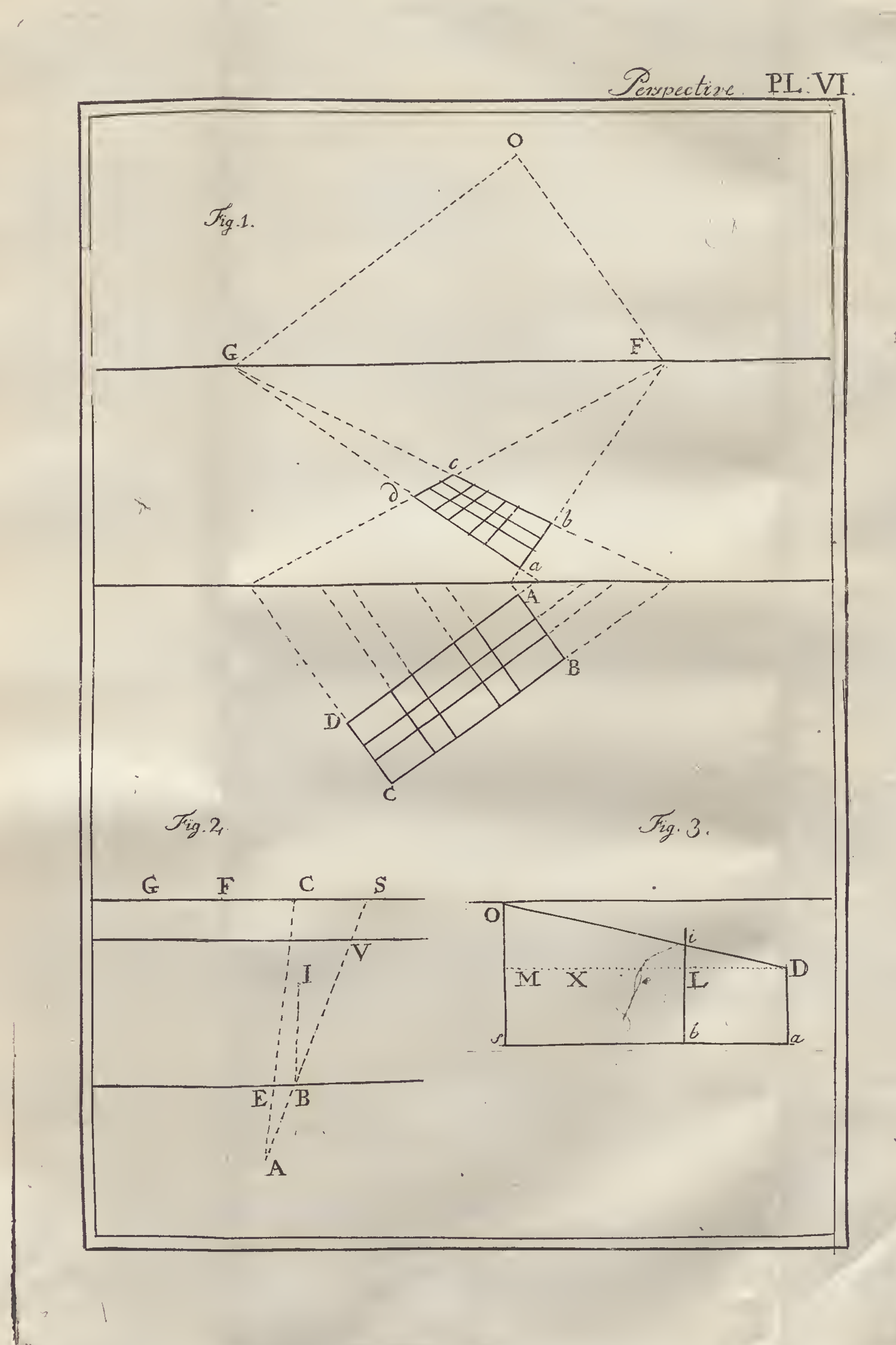



Fig. 1.
O
Y
X
b
a
E
Z
A
B
Fig. 2.
M
O
Y
F
S
C
L
D
X
a
E
B
Z
A
Fig. 3.
O
D
b
a
c
g
E
G
B
A
C




Fig. 1
O
b 1 2 3 a
c 1 2 3 g
d
B 1 2 3 A
C 1 2 3 G
D
Fig. 2.
O
G F I
V
c d
b a e m
R
n
h
B A
C E
D
H
M N
P
L




Fig. 1.
O
G
F
c
d
b
a
A
B
D
C
Fig. 2.
G
F
C
S
V
I
E
B
A
Fig. 3.
O
i
D
M
X
L
s
b
a

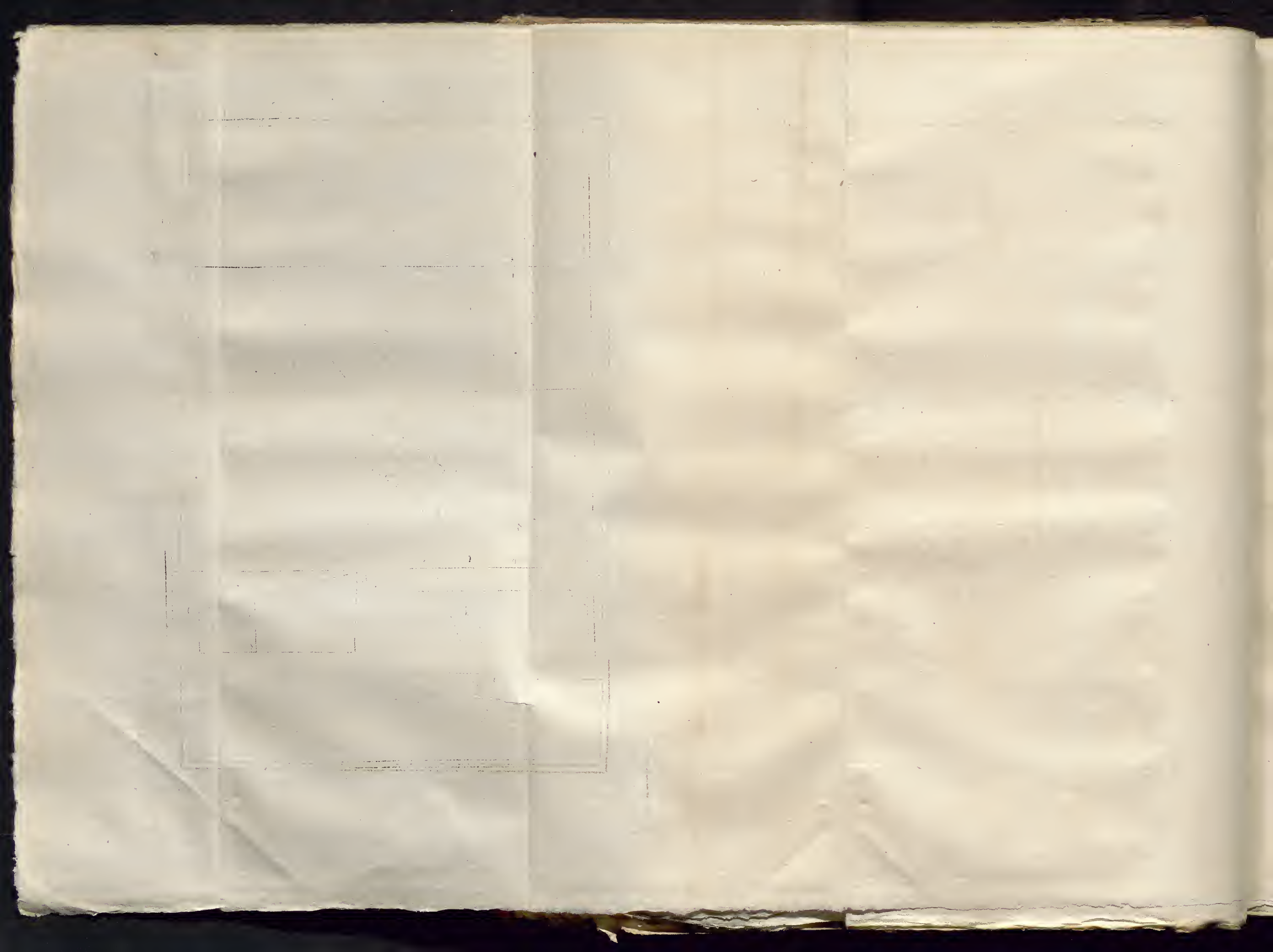
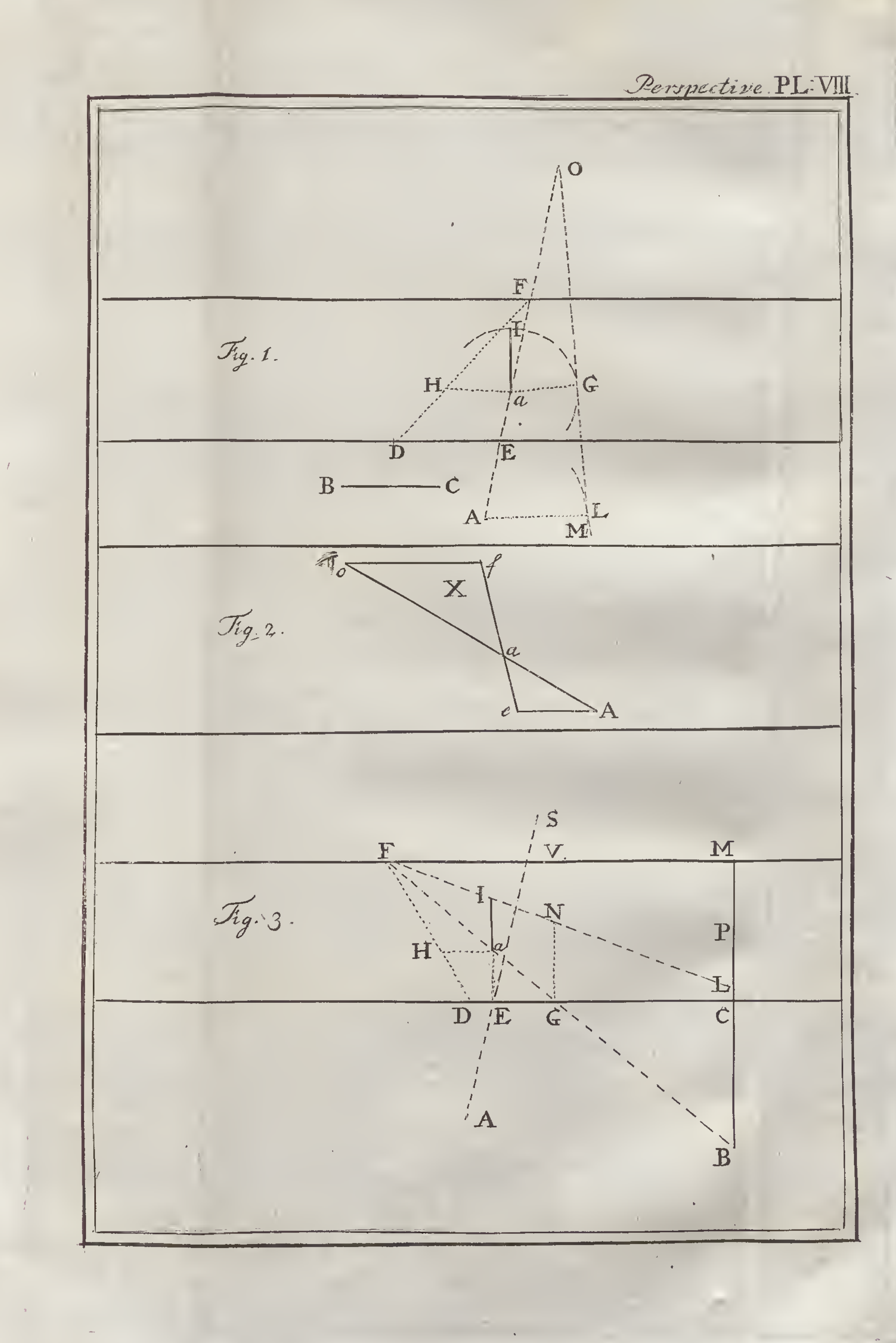


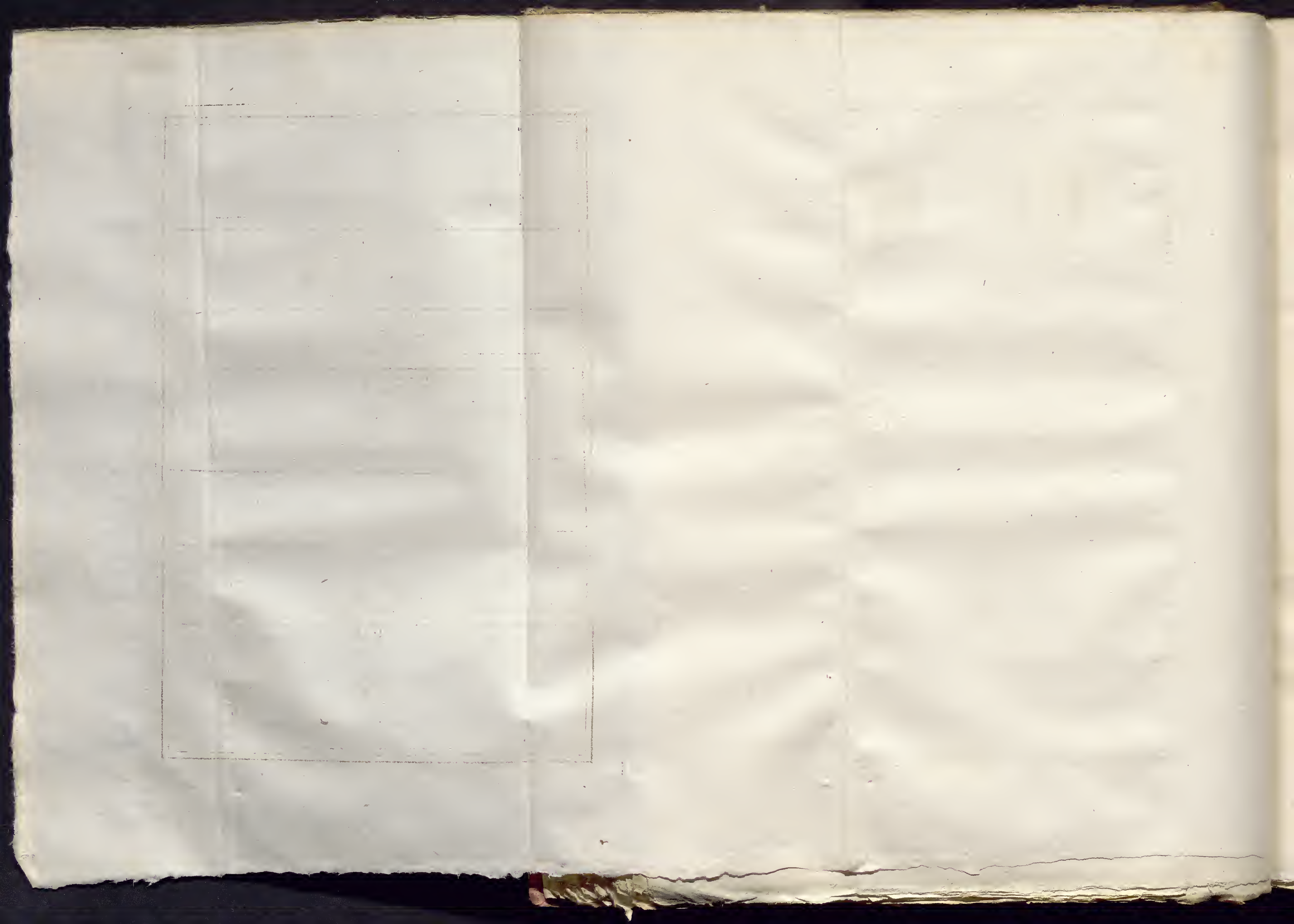
Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.


Fig. 1.
O
F
I
H
G
a
D
E
B
C
A
L
M
Fig. 2.
o
f
X
a
e
A
Fig. 3.
S
V
F
M
I
N
P
H
a
L
D
E
G
C
A
B



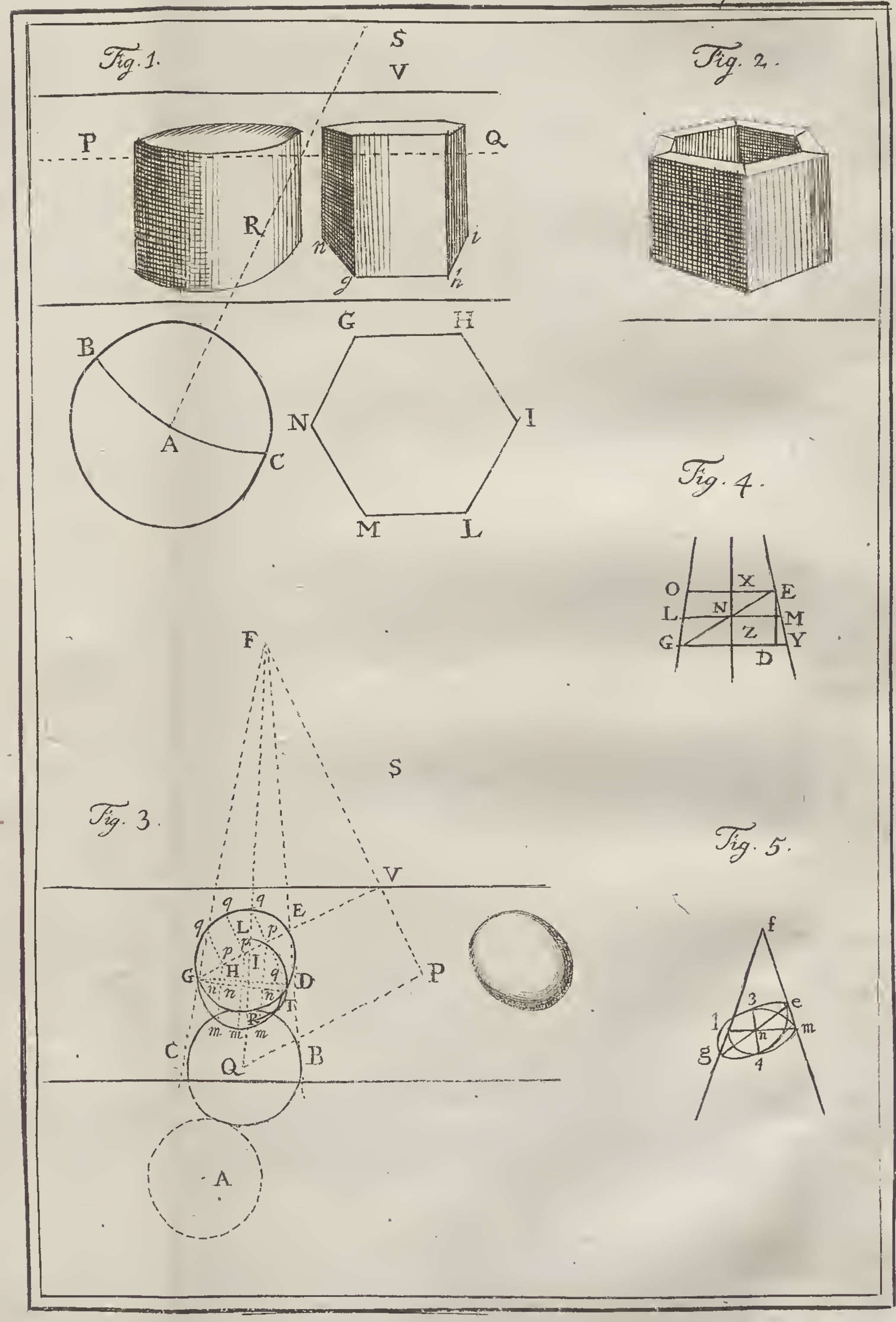


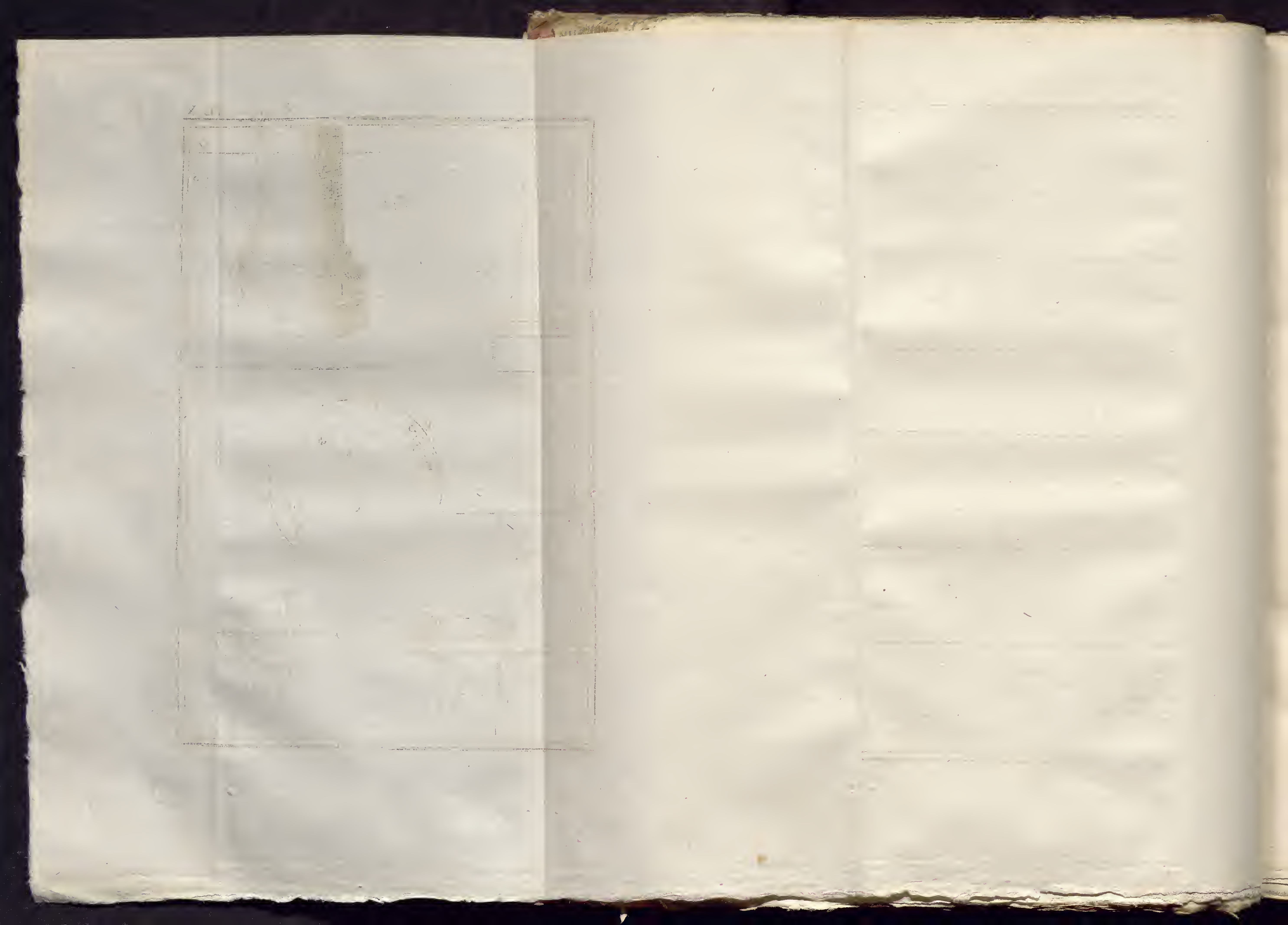
Fig. 1.
S
V
P
Q
R
n
i
g
h
B
A
C
G
H
N
I
M
L
Fig. 2.
Fig. 4.
O
X
E
L
N
M
G
Z
Y
D
F
S
Fig. 3.
V
E
L
G
H
I
D
T
R
P
C
Q
B
A
Fig. 5.
f
3
e
1
n
m
g
4

Fig. 1.

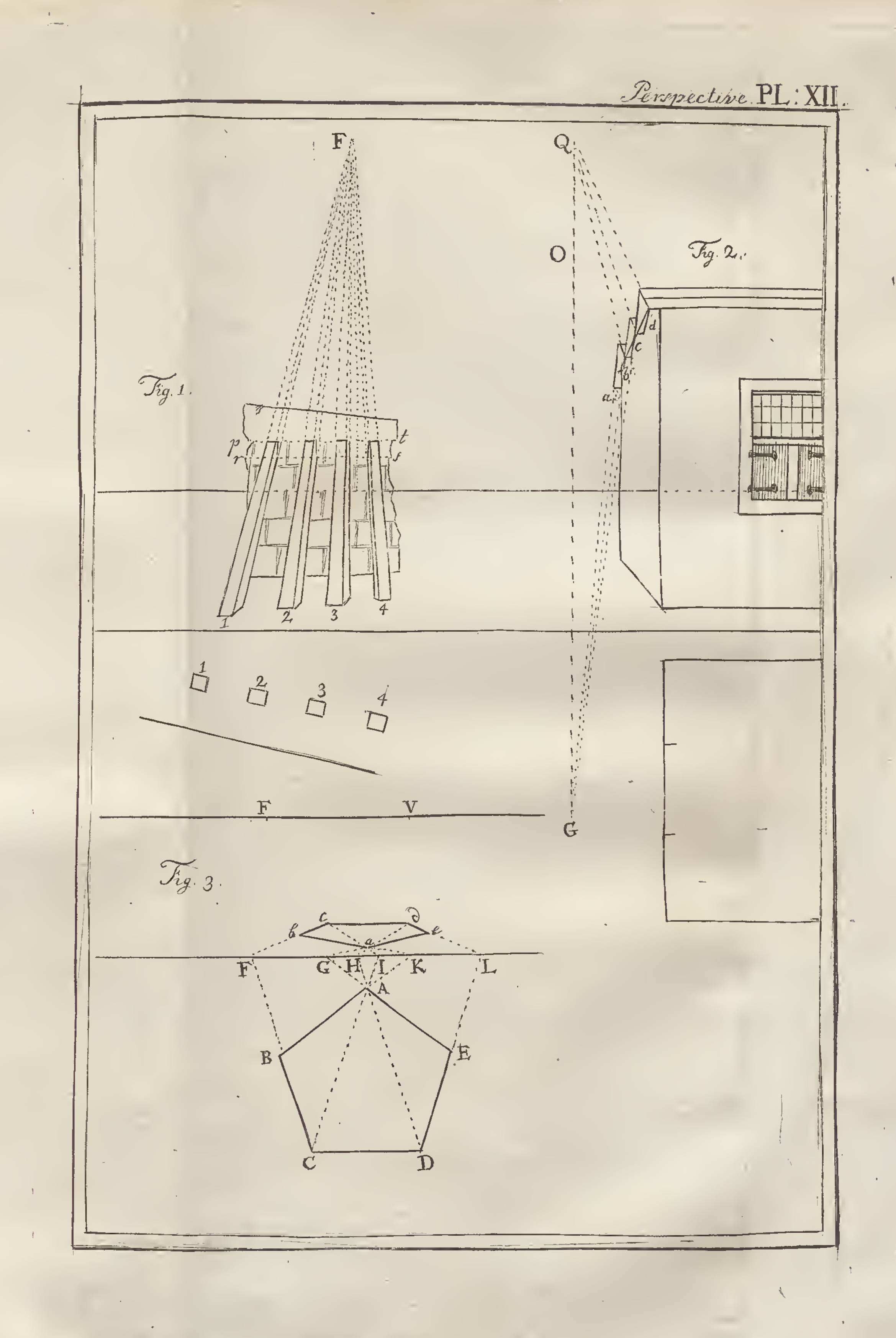
Fig. 2.

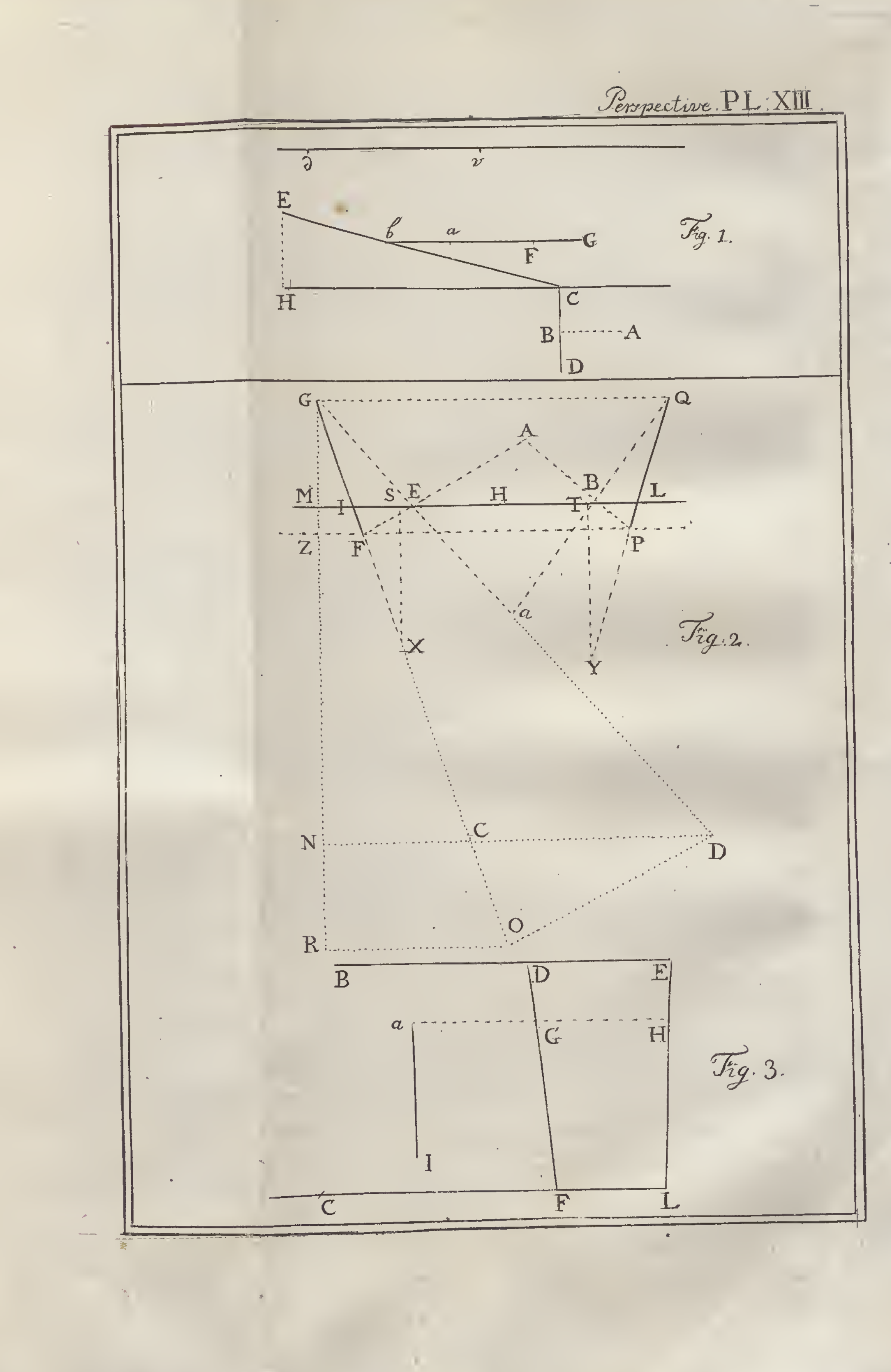
Fig. 3.

Fig. 4.



F
H
O
Z
D
G
T
Fig. 1.
N
M
L
a
R
Q
E
I
A
C
P
B
F
S
V
T
Fig. 2.
I
E
A
M
X
N
P
C
B


F
Q
O
Fig. 2.
Fig. 1.
d
c
b
a
p
r
q
t
s
1
2
3
4
1
2
3
4
F
V
G
Fig. 3.
c
d
b
e
a
F
G
H
I
K
L
A
B
E
C
D


Perspective. PL. XIII.
Fig. 1.
E
b
a
G
F
H
C
B
A
D
Fig. 2.
G
Q
A
M
I
S
E
H
B
T
L
Z
F
P
a
X
Y
N
C
D
R
O
Fig. 3.
B
D
E
a
G
H
I
C
F
L

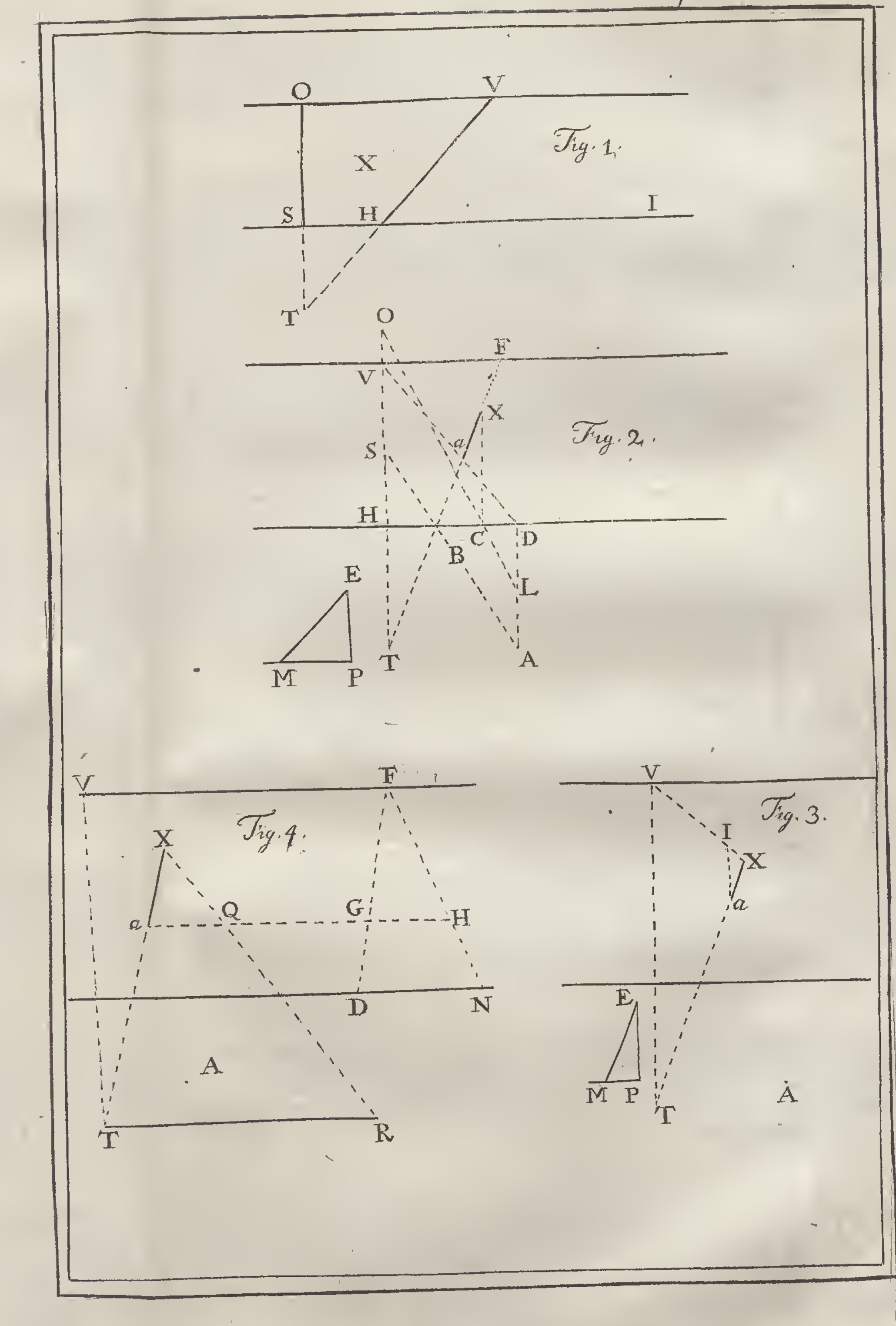


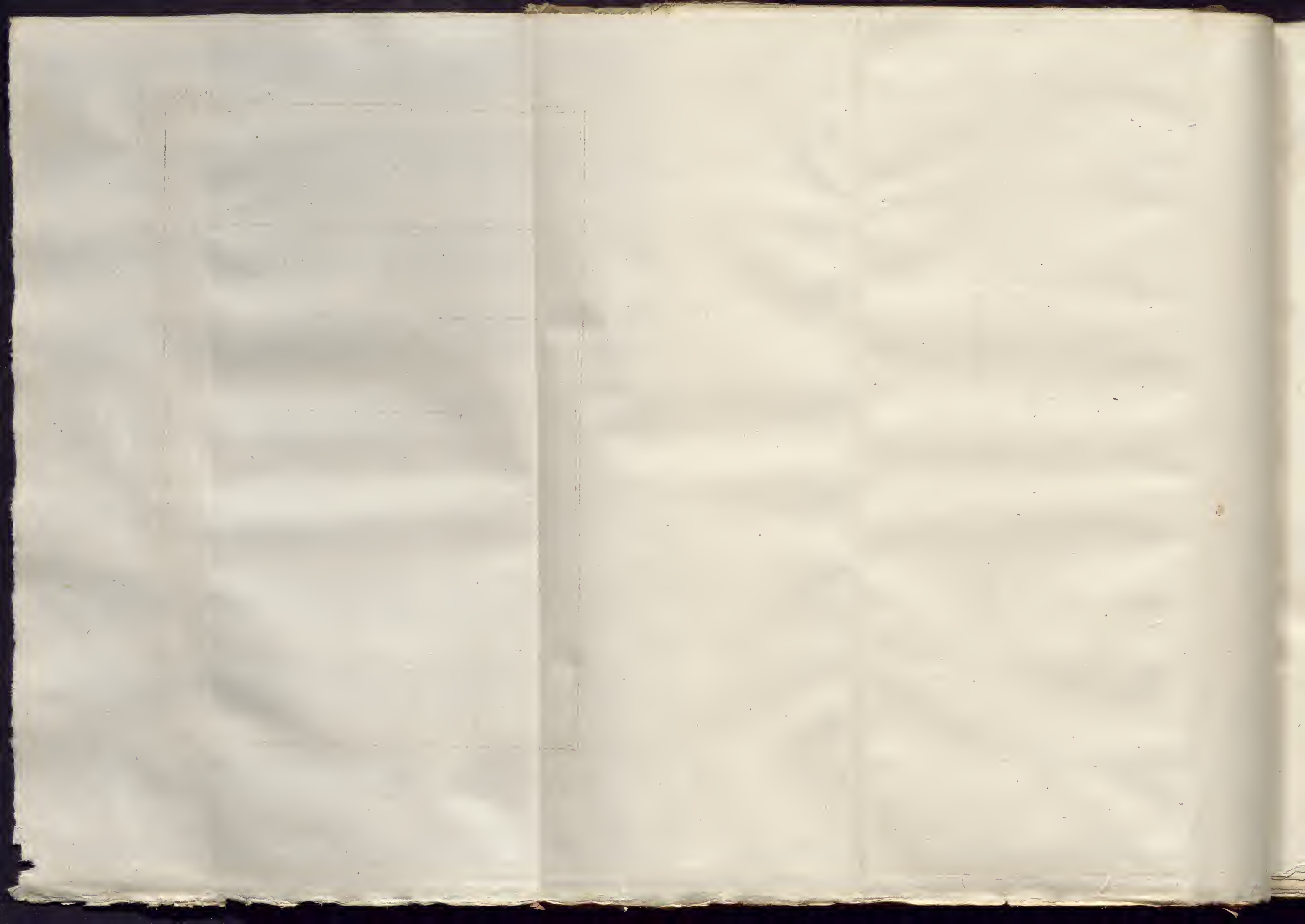
Fig. 1.
O
V
X
S
H
I
T
Fig. 2.
O
F
V
X
a
S
H
C
D
B
L
E
M
P
T
A
Fig. 4.
V
F
X
a
Q
G
H
D
N
A
T
R
Fig. 3.
V
I
X
a
E
M
P
T
A

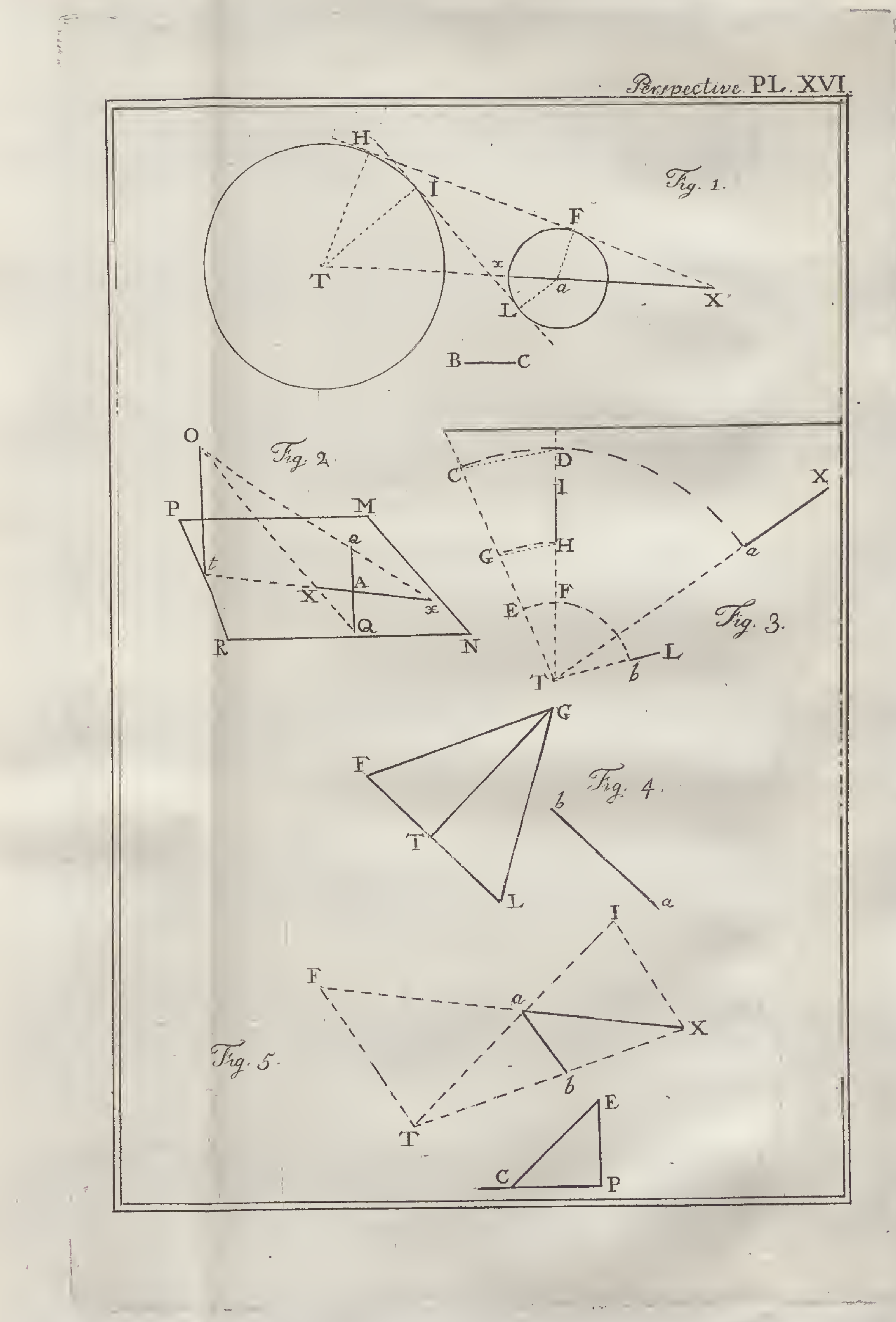
Fig. 1.

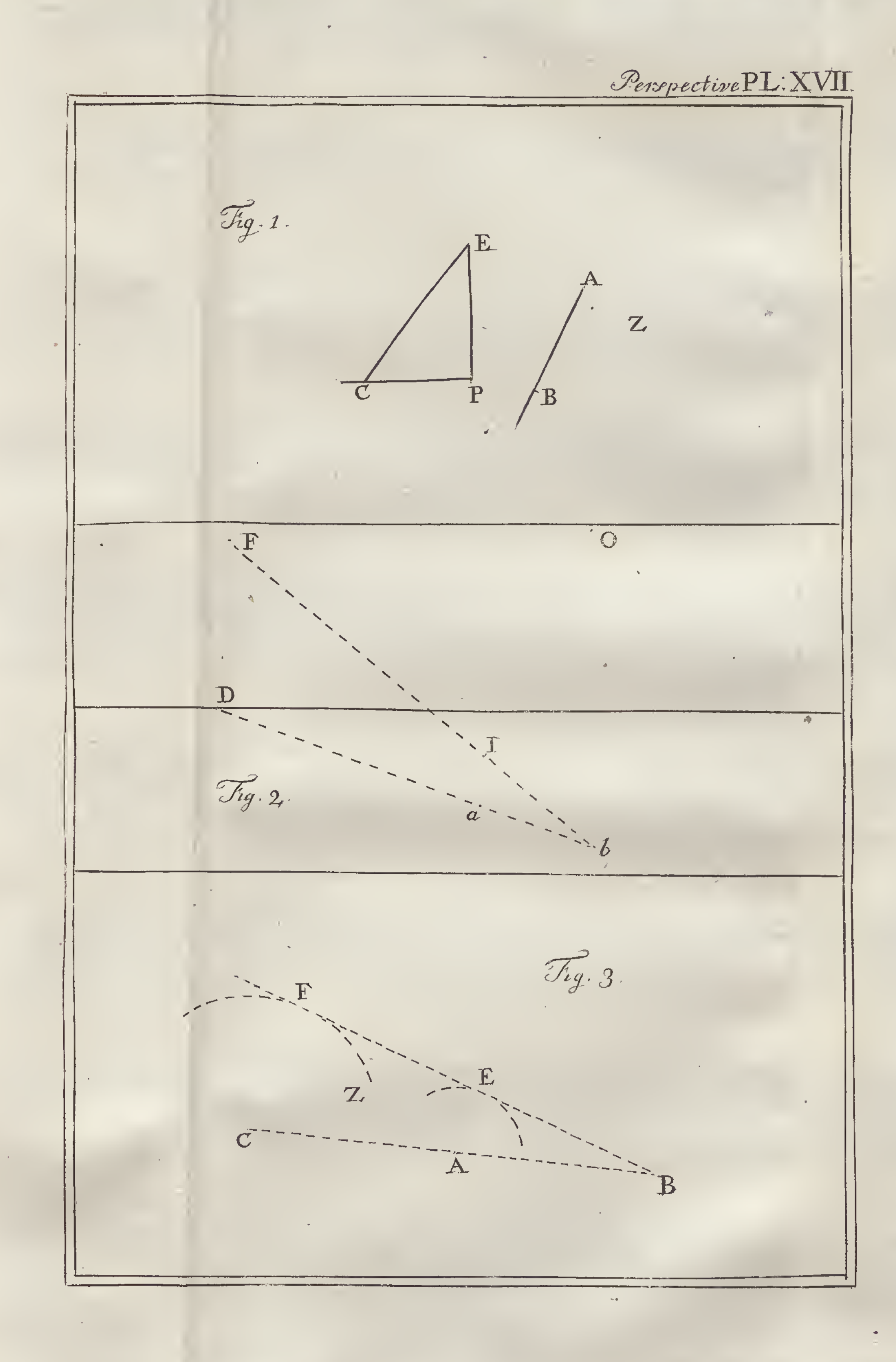
Fig. 2.

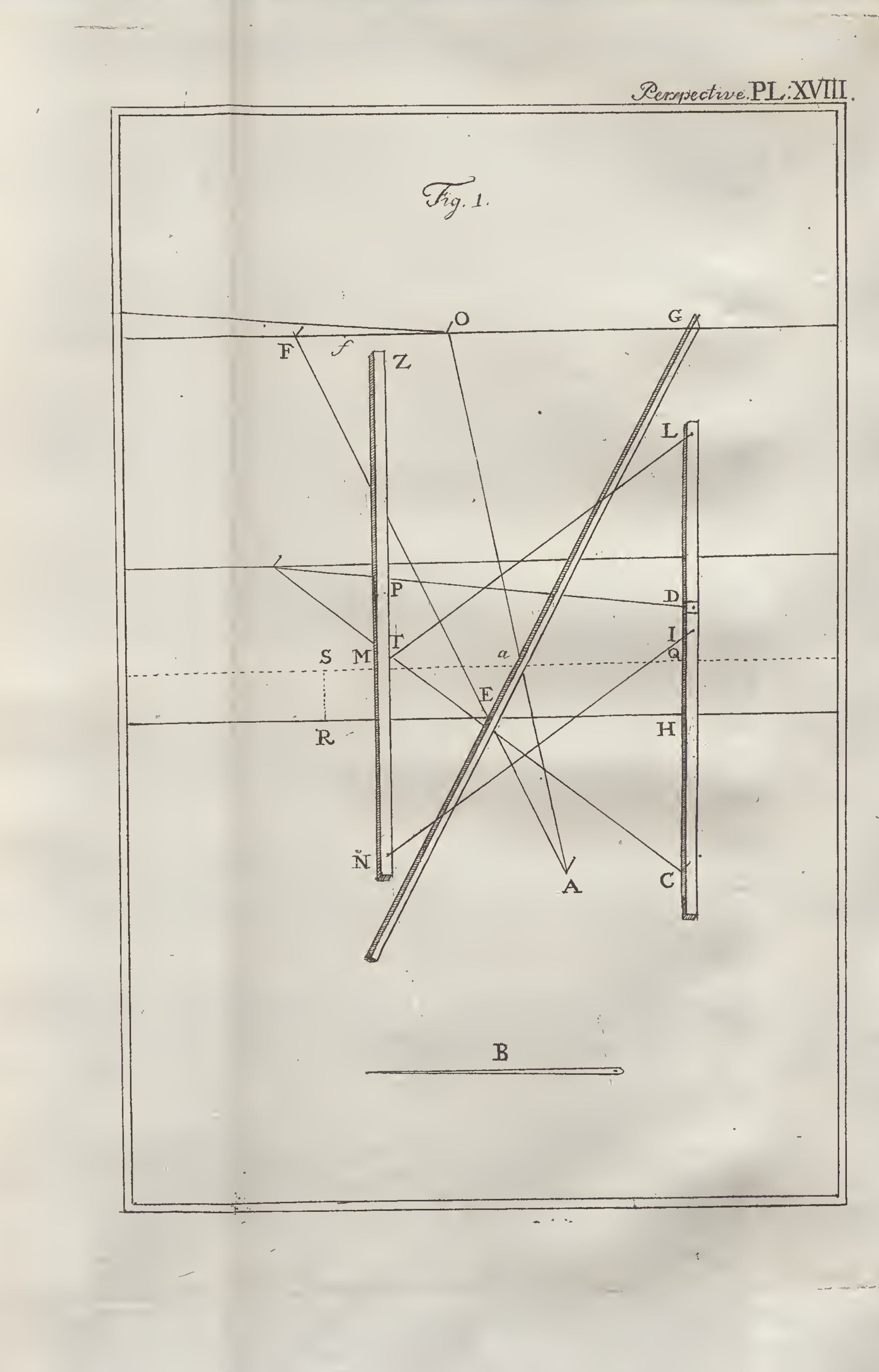
Fig. 3

Fig. 4.




Fig. 1.
H
I
F
T
x
a
L
X
B
C
Fig. 2.
O
P
M
a
t
A
X
x
Q
R
N
Fig. 3.
C
D
I
X
G
H
a
F
E
T
b
L
G
F
Fig. 4.
b
T
L
a
I
F
a
X
Fig. 5.
b
E
T
C
P


Fig. 1.
E
A
Z
C
P
B
F
O
D
I
Fig. 2.
a
b
Fig. 3.
F
E
Z
C
A
B


Fig. 1.
O
G
F
f
Z
L
P
D
T
I
S
M
a
Q
E
H
R
N
A
C
B

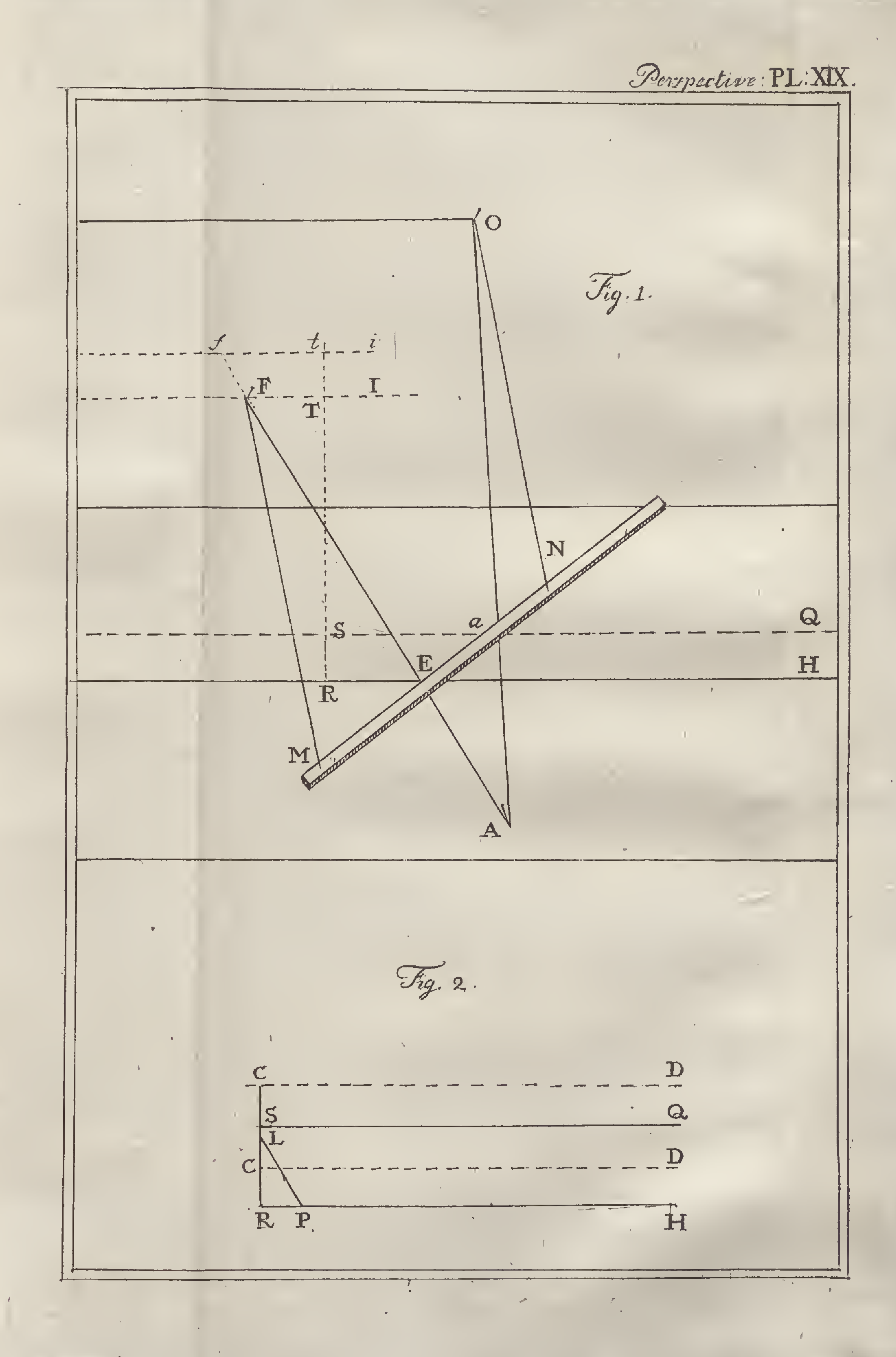
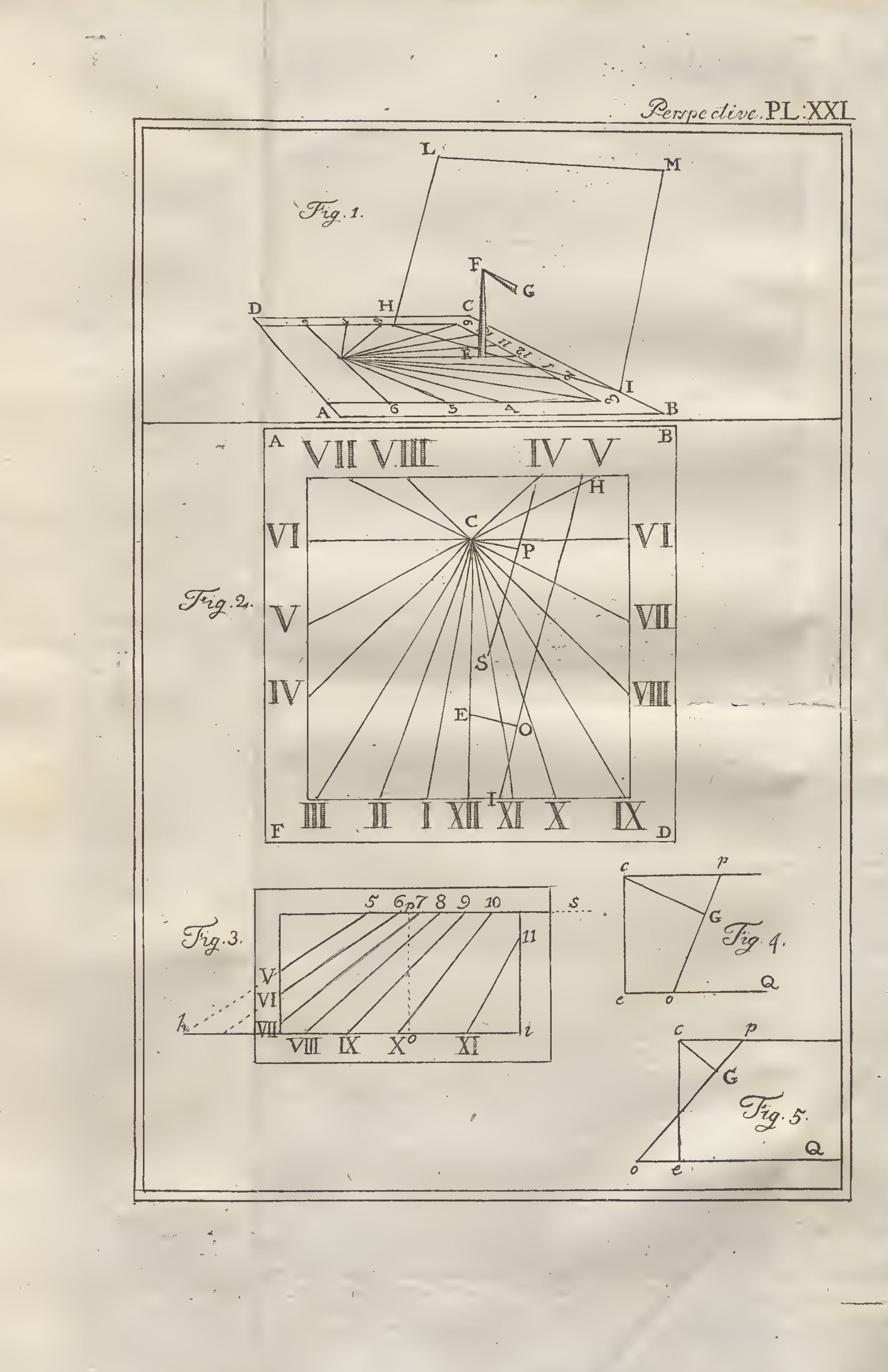

Fig. 1.
O
f
t
i
F
I
T
N
a
Q
S
E
H
R
M
A
Fig. 2.
C
D
S
Q
L
C
D
R
P
H

Fig. 1.

Fig. 2.


Fig. 1.
L
M
F
G
D
H
C
E
I
A
B
Fig. 2.
VII VIII
IV V
VI
VI
V
VII
IV
VIII
III II I XII XI X IX
C
P
H
S
E
O
F
D
Fig. 3.
5 6 p 7 8 9 10
11
s
V
VI
VII
VIII IX X XI
h
i
Fig. 4.
c
p
G
e
o
Q
Fig. 5.
c
p
G
o
e
Q

USAGE

DE LA

CHAMBRE OBSCURE

POUR

LE DESSIN.

AVERTISSEMENT.

Tout le monde ſçait avec quelle facilité on peut, par le moyen d'un ſeul verre convexe, repréſenter au naturel dans un lieu obſcur, les objets qui ſont au dehors. Spectacle, que la vivacité des couleurs, & la variété des mouvemens rendent très agréable. Il eſt d'ailleurs ſi aiſé de rendre cette invention utile pour le Deſſin, que le ſoin de traiter cette matiére auſſi au long qu'on le fait ici, paroitra ſans doute peu néceſſaire. Il ſemble qu'un petit nombre de remarques ſuffiſent à un Lecteur attentif, pour le mettre ſur les voyes, & lui donner lieu d'employer quelque Machine aux uſages qu'on lui auroit indiqués. On pourroit lui laiſſer ainſi le plaiſir de l'invention, après la lui avoir rendue facile. C'eſt auſſi là le premier parti qu'on avoit réſolu de prendre: mais on a conſideré que dans la conſtruction méchanique d'une Machine propre à faciliter le Deſſin, on ne pouvoit pas prévoir pluſieurs choſes que l'expérience ſeule peut apprendre; qu'il falloit tatonner aſſez long-tems, & eſſayer pluſieurs méthodes avant d'en pouvoir choiſir une qui fut ſimple & utile. Comme on avoit fait tout ce chemin là, on a cru devoir en épargner la fatigue aux autres, & on a eſpéré qu'il ne leur ſeroit pas deſagréable de voir ici la deſcription de deux Machines, leſquelles, après pluſieurs changemens, on ſe flate d'avoir rendues aſſez commodes.

La premiére des deux eſt ſans contredit préférable de beaucoup à la ſeconde: elle eſt plus ferme; elle rend le travail plus aiſé & plus exact; & il eſt plus facile d'y repréſenter les tailles douces. Joignez à tout cela, qu'avec très peu de changement on pourroit la rendre ſuſceptible du petit nombre d'uſages qui ſont particuliers à la ſeconde Machine; mais qui ſont de fort peu de conſéquence. Néanmoins comme cette derniére Machine eſt plus ſimple, d'une dépenſe beaucoup moindre, & quelle eſt plus facile à tranſporter, on a cru qu'il ſeroit bon d'en donner auſſi la deſcription dans ce petit Ouvrage.

AVERTISSEMENT.

Je ne m'arrêterai point à faire valoir les avantages que ces Machines pourront procurer aux Peintres; je remarquerai seulement qu'elles sont d'un grand usage pour réduire dans un même Tableau plusieurs objets séparés. On peint le plus qu'il est possible d'après la nature: mais il est très mal-aisé de donner à plusieurs objets représentés dans un Tableau leur véritable grandeur, & de les raporter à un même point de vue: cependant cela s'exécute avec beaucoup de facilité par le moyen des Machines. Le point de vue y est toujours le même, tant qu'on ne change point la disposition du verre convexe; & la grandeur de la représentation des objets y dépend de leur éloignement de la Machine.

On pourroit sans doute perfectionner davantage cette invention, si quelqu'un vouloit s'en donner la peine. Voici quelques remarques qui ne lui seront pas inutiles. 1. Il ne faut pas se servir de plus d'un verre convexe; car quand on en employe deux, ou davantage, on perd la véritable Perspective des objets. Inconvénient à quoi on est aussi sujet, quand, de quelque manière que ce puisse être, on fait entrer le miroir concave, dans la construction de la Machine. 2. Quand on employe plus de deux miroirs plans, les rayons après une triple reflexion sont trop foibles pour bien représenter les objets. Il faut même quand on se sert de deux miroirs qu'ils soient bien polis. 3. Il ne faut pas faire entrer les miroirs dans la Machine: car dans un lieu si étroit, l'humidité de la respiration les obscurciroit; ce qui n'arrive pas au verre convexe, parce qu'il est renfermé dans un tuyau.

USAGE
DE LA
CHAMBRE OBSCURE
POUR
LE DESSIN.

DEFINITION.

On nomme Chambre obſcure, tout lieu privé de lumiére, dans lequel on repréſente ſur un papier, ou ſur quelqu'autre choſe de blanc, les objets qui ſont au dehors, expoſés au grand jour.

Pour repréſenter ainſi les objets, on fait de leur côté, dans ce lieu obſcur, une petite ouverture : on place dans cette ouverture un verre convexe, & au foyer de ce verre on étend un papier, ſur lequel alors les objets paroiſſent renverſés.

THEOREME I.

La Chambre obſcure donne la véritable Perſpective des objets.

Les figures repréſentées dans la Chambre obſcure ſe forment, *comme cela ſe démontre dans la Dioptrique*, par des rayons, qui, partant de tous les points des objets, paſſent par le centre du verre : de ſorte qu'un œil poſé dans ce centre, verroit les objets par ces mêmes rayons, leſquels par conſéquent doivent donner la véritable repréſentation des objets, par leur rencontre avec un plan. Mais la piramide que forment ces rayons au dehors de la Chambre, étant ſemblable à celle qu'ils forment après avoir paſſé le verre, il s'enſuit que les rayons, qui dans la Chambre rencontrent le papier, y donnent auſſi la véritable repréſentation des objets. Ce qu'il falloit démontrer.

Ces objets paroiſſent renverſés, parce que les rayons ſe croiſent en traverſant le verre, ceux qui viennent d'enhaut paſſant en bas, &c.

THEOREME II.

3. *La reflexion que souffrent les rayons sur un miroir plan, avant de rencontrer le verre convexe, ne gâte point la représentation des objets.*

Cela est clair; car le miroir réfléchit les rayons dans le même ordre qu'il les reçoit.

Pour montrer à présent l'usage qu'on peut tirer de la Chambre obscure pour le Dessin, je donnerai ici la description de deux Machines dont je me suis servi pour cet effet, & j'en montrerai les usages.

4. ### *Description de la premiére Machine.*

Pl. I. Fig. 1. Cette Machine a la forme à peu près d'une chaise à porteur: le dessus en est arrondi vers le derriére, & par devant elle est faite en talut, jusques à la moitié de sa hauteur: voyez la Figure 1. qui représente la Machine, dont le côté opposé à la porte, est supposé enlevé, pour qu'on en puisse voir le dedans.

5. Au dedans, la planche A, sert de table: elle tourne sur deux chevilles de fer, qui entrent dans les bois qui forment le devant de la Machine. Cette table est soutenuë par deux chainettes; de-sorte qu'on peut la soulever, pour entrer plus commodément par la porte qui est de côté.

6. De part & d'autre il y a vers le derriére de la Machine, un tuyau de fer blanc recourbé vers les deux bouts, comme on le voit dans la Fig. 2. Ces tuyaux se placent dans la garniture qui est au dedans, & ils ont chacun une de leurs extrémités, qui donne dans la Machine, & une qui aboutit au dehors. Ils servent à donner de l'air, sans que la lumiére y puisse passer. On n'a pas pu les marquer dans la Figure de la Machine.

7. Au derriére de la Machine, en dehors, sont attachés quatre petits fers *c*, *c*, *c*, *c*, dans lesquels glissent deux régles de bois DE, DE, lesquelles sont de la largeur d'environ trois pouces. Au travers du haut de ces deux régles, passent vers D, D, deux lattes, qui tiennent attachée une planche F, laquelle, par leur moyen, on peut faire avancer & reculer.

8. Au-dessus de la Machine, il y a une planche, longue d'environ quinze pouces, & large de neuf, dans laquelle il y a une échancrure PMOQ, longue de neuf ou dix pouces & large de quatre.

9. On attache sur cette planche, deux régles faites en forme de queuë d'aronde, entre lesquelles on fait glisser une autre planche de même longueur que la premiére, & large d'environ six pouces. Cette seconde plan-

che eſt percée par le milieu; & dans cette ouverture, qui doit avoir environ trois pouces de diamétre, on fait un écroüe, qui ſert à élever & à abaiſſer un cilindre, ſur lequel il y a une vis, & dont la hauteur eſt d'environ quatre pouces. C'eſt dans ce cilindre, comme on le verra dans la ſuite, qu'eſt placé le verre convexe.

On fait gliſſer au-deſſus de la planche, dont on a parlé *n.* 8. une boëte 10.
X, en forme de petite tour quarrée, large d'environ ſept ou huit pouces, & haute de dix; le côté B, qui lui ſert de porte, eſt tourné vers le devant de la Machine. Le derriére de cette boëte a vers le bas une ouverture quarrée N, d'environ quatre pouces, laquelle peut ſe fermer par une petite planche I, qui gliſſe entre deux régles.

Au-deſſus de cette ouverture quarrée, il y a une fente, parallèle à 11.
l'horizon, & qui tient toute la largeur de la boëte; par cette fente on fait entrer dans la boëte un petit miroir, qui des deux côtés gliſſe entre deux régles, placées de telle maniére que la glace du miroir, qui eſt tournée vers la porte B, fait avec l'horizon, un angle de cent douze dégrés & demi.

Ce miroir, ſur le milieu du côté qui reſte hors de la boëte, a une pe- 12.
tite platine de fer qui tient lieu de baze à une petite vis, laquelle avance & ſert à arrêter le miroir dans l'endroit où on le voit en H. Pour le fixer ainſi, on fait paſſer la vis dans un petit trou qu'on fait dans la planche dont il eſt parlé *n.* 9., & par une fente qu'on fait pour cet effet dans la planche qui eſt au deſſous de celle-là, & dont on a parlé *n.* 8. Ce miroir ſe tourne verticalement de tous côtés, & on l'arrête par le moyen d'un écroüe R. Quand on ôte le miroir, de cette ſituation, la fente dont on vient de parler ſe ferme par une petite planche, qui au dedans de la Machine gliſſe entre deux petites régles. Quant à la fente dont il eſt parlé *n.* 11. elle ſe ſe ferme en partie par la planche I, quand on ouvre l'ouverture N, & les deux bouts qui reſtent ouverts ſe ferment par de petites régles.

A un des côtés de la boëte, on fait gliſſer une régle dans deux pe- 13.
tits fers, pareils à ceux qui ſont * au derriére de la Machine. Cette ré- * 7
gle paſſe de quelques pouces le derriére de la boëte; & à ſon extrémité, elle a un trou par où on fait paſſer la vis du miroir dont je viens de parler: de ſorte qu'on peut incliner ce miroir ſous toutes ſortes d'angles, au devant de l'ouverture N.

Outre ce premier miroir, il y en a un autre marqué L. Il eſt plus 14.
petit, & attaché vers ſon milieu à une latte qui paſſe par le milieu du haut de la boëte. Cette latte peut s'arrêter à vis, & elle ſert à élever

& à abaiſſer le miroir, qui lui eſt attaché de maniére à pouvoir être fixé à toutes ſortes d'inclinaiſons.

REMARQUE.

Ceux qui croiront que les tuyaux dont il eſt parlé *n. 6.* ne ſuffiſent point pour donner de l'air à la Machine, pourront mettre ſous le ſiége un petit ſouflet, qu'on fera agir par le moyen du pied. De cette maniére on renouvellera continuellement l'air de la Machine, le ſouflet chaſſant celui qui y eſt, & obligeant ainſi celui de dehors d'entrer par les tuyaux.

Uſage de la Machine.

PROBLEME I.

15. *Repréſenter les objets dans leur diſpoſition naturelle.*

PL. I. Fig. 1. Quand on veut repréſenter les objets dans cette Machine, on étend un papier ſur la table; ou bien, ce qui eſt mieux, on étend le papier ſur une autre planche, en ſorte qu'il déborde, & on inſére cette planche ainſi couverte, dans un quadre, en ſorte qu'elle y ſoit fixée, par le moyen de deux régles faites en forme de queuë d'aronde.

* 9 On met dans le cilindre C, * qui tourne à vis dans le haut de la Machine, un verre convexe, dont le foyer eſt à une diſtance à peu près égale à la hauteur de la Machine au deſſus de la Table: on ouvre par derriére la boëte qui eſt au deſſus de la Machine, & on incline vers cette ouverture le miroir L, enſorte qu'il faſſe avec l'horizon un angle demi droit, quand on veut repréſenter les objets pour le Tableau perpendiculaire. Alors, ſi on ôte le miroir H, & la planche F, auſſi bien que les régles DE, DE, on verra ſe placer ſur le papier tous les objets, qui envoyent ſur le miroir L des rayons qui peuvent être réfléchis ſur le verre convexe, lequel on éleve ou l'on abaiſſe par le moyen de la vis du cilindre, juſques à ce que les objets paroiſſent entiérement diſtincts.

16. Quand on veut repréſenter ces mêmes objets pour le Tableau incliné, on doit donner au miroir, la moitié de l'inclinaiſon qu'on veut donner au Tableau.

17. Pour le Tableau parallèle, il faut fermer l'ouverture N, & ouvrir la porte B: après quoi il faut élever le miroir L juſques au haut de la boëte, en le mettant dans une ſituation parallèle à l'horiſon. Cette diſpoſi-

tion

tion de la Machine peut ſervir, quand on eſt ſur un balcon ou à quelque étage élevé, à deſſiner un parterre qui ſeroit au bas.

Si on vouloit deſſiner une ſtatue qui ſeroit dans un lieu un peu élevé, 18.
& qu'on voulut la repréſenter de la maniére qu'il faudroit la peindre, contre un plât-fond, il faudroit tourner le derriére de la Machine vers la ſtatue, & tourner auſſi la boëte, en ſorte que la porte B, regardat la ſtatue; alors après avoir ouvert la porte, il faudroit mettre le miroir L verticalement, la glace tournée vers la ſtatue, & avancer ou reculer la boëte, ou bien élever, ou abaiſſer le miroir, juſques à ce que les rayons qui viennent de la ſtatue ſur le miroir, puſſent être réfléchis ſur le verre. Quand ces changemens de la boëte, ou du miroir, ne ſuffiſent pas pour donner cette réflexion ſur le verre, il faut avancer ou reculer la Machine entiére.

DEMONSTRATION.

De ce qui vient d'être dit ſur l'inclinaiſon du miroir.

Pour démontrer qu'on a incliné le miroir d'une maniére convenable, il 19.
ſuffit de prouver que les rayons réfléchis rencontrent la Table ſous le même angle que les rayons directs rencontreroient un plan, qui auroit la ſituation qu'on veut donner au Tableau.

Soit donc AB, un rayon venant d'un point de quelque objet ſur le miroir GH, d'où il eſt réfléchi ſur la Table de la Machine en *a*: il faut démontrer que ſi l'on méne la ligne DI, qui faſſe avec FE un angle égal à l'inclinaiſon du Tableau, c'eſt-à-dire, * que l'angle DIE ſoit double de l'angle DFI; il faut démontrer, dis-je, que l'angle B*a*F eſt égal à l'angle BCD. *PL. II. Fig. 1.* * 15, 16

Par la conſtruction, l'angle DIE eſt double de l'angle DFI; par conſéquent ce dernier angle eſt égal à l'angle IDF; & puiſque l'angle d'incidence CBD, eſt égal à l'angle de réfléxion *a*BF, le Triangle BCD eſt ſemblable au Triangle F*a*B; d'où il s'enſuit que l'angle B*a*F eſt égal à l'angle BCD. Ce qu'il falloit démontrer.

Pour ce qui a été dit du Tableau parallèle, il faut remarquer; que dans 20.
la démonſtration précédente l'angle de l'inclinaiſon du Tableau ſe meſure du côté des objets; & que ſi on diminue cet angle, juſques à ce qu'il ſoit égal à zero, on aura un Tableau parallèle à l'horizon au deſſous de l'œil. Mais par la démonſtration, l'angle de l'inclinaiſon du miroir étant la moitié de l'angle de l'inclinaiſon du Tableau, il s'enſuit que l'inclinaiſon du miroir eſt auſſi zero, & par conſéquent qu'il doit auſſi être parallèle à l'horizon.

21. On démontre de même que le miroir doit être placé verticalement quand on conſidére le Tableau parallèle au deſſus de l'œil: car pour donner cette ſituation au Tableau, il faut augmenter l'angle d'inclinaiſon du Tableau meſuré du côté des objets, juſques à ce qu'il ſoit de 180. dégrés, dont la moitié eſt 90. qui par conſéquent eſt l'inclinaiſon du miroir.

PROBLEME II.

22. *Repréſenter les objets, en faiſant paroître à droit, ce qui doit être à gauche.*

Pl. I. Fig. 1. Ayant mis la boëte X, dans la ſituation qu'on voit dans la figure, il faut ouvrir la porte B & fermer l'ouverture N; puis mettant le miroir H
23. dans la diſpoſition indiquée (n. 11.) élevez le miroir L, vers le haut de la boëte, & inclinez-le vers le premier miroir, en ſorte qu'il faſſe avec l'horiſon un angle de 22. dégrés & demi; c'eſt-à-dire, que le deſſus de la Machine, après une double réflexion, paroiſſe vertical dans le premier miroir.

24. Pour le Tableau incliné, il faut que le miroir L faſſe avec l'horizon, un angle égal à la moitié de l'angle de l'inclinaiſon du Tableau, moins le quart d'un angle droit. On trouve cet angle avec aſſez de préciſion pour la pratique, en inclinant le miroir L, juſques à ce que l'apparence du deſſus de la Machine, après une double reflexion, paroiſſe dans l'autre miroir ſous un angle avec l'horizon, égal à l'inclinaiſon qu'on veut donner au Tableau. Si l'inclinaiſon du Tableau étoit moindre que du quart de 90. dégrés, il ne faudroit pas incliner le miroir L, vers le premier, com-
* 23 me il a été dit *, mais du côté oppoſé, en faiſant l'angle de l'inclinaiſon du miroir, égal à la différence de l'angle de l'inclinaiſon du Tableau, au quart de 90. dégrés.

25. Quand on veut repréſenter les objets pour le Tableau parallèle, il faut mettre le miroir L, dans la diſpoſition qui a été dite (n. 15.), & le miroir H, dans celle qui a été dite (n. 13.) en l'inclinant vers l'horizon, ſous un angle demi droit, la glace tournée vers la terre, quand on ſuppoſe le Tableau au deſſous de l'œil, & vers le ciel quand on le ſuppoſe au deſſus.

26. Cette diſpoſition de la Machine peut auſſi être d'uſage pour les Tableaux inclinés, qui font avec l'horizon un angle fort petit; mais alors il faut diminuer l'inclinaiſon d'un des miroirs, de la moitié de l'inclinaiſon du Tableau.

DEMONSTRATION.

De l'inclinaiſon des miroirs. 27.

J'ai dit * que pour le Tableau perpendiculaire, il falloit qu'un des miroirs fit, avec l'horizon, un angle * de 112. dégrés 30. min., & que l'autre miroir L devoit * être incliné vers le premier, & faire avec l'horiſon un angle de 22. dég. 30. min. Soient MN & GH, deux miroirs dans la ſituation que je viens de marquer: il faut démontrer que ſi le rayon AB, eſt parallèle à l'horizon, il doit, après être réfléchi en B & en C, tomber perpendiculairement ſur la Machine. L'angle ABN eſt * de 112. d. 30. m.; par conſéquent l'angle d'incidence ABM, & ſon égal l'angle de réflexion CBN, ſont chacun de 67. d. 30. m. L'angle BPQ, eſt le complément à 180. d. de l'angle NBA, plus l'angle PQB qui eſt * de 22. d. 30. m.; donc cet angle BPQ eſt de 45. d. L'angle PCB eſt le complément à 180. d. des deux angles CBP & BPC; par conſéquent il eſt de 67. d. 30. m., de même que ſon égal l'angle de réflexion QC*a*. En raiſonnant de la même maniére, on trouve dans le Triangle RCQ, que l'angle CRQ eſt droit. Ce qu'il falloit démontrer.

* 22 * 11 * 23 PL. II. Fig. 2. * 11 * 23

28. Il n'eſt pas abſolument néceſſaire de donner aux miroirs l'inclinaiſon dont on vient de parler; on peut prendre l'angle ABN à diſcrétion, & retrancher cet angle d'un angle de 135. d., pour avoir l'inclinaiſon du miroir GH. Néanmoins les angles, que nous avons déterminés, ſont les plus avantageux pour le Tableau perpendiculaire.

29. Quand le Tableau eſt incliné & qu'il fait avec l'horizon l'angle DIA il faut * que le miroir MN garde ſa ſituation, & que l'angle CQR ſoit égal à la moitié de l'angle DIA, moins le quart d'un angle droit; & je dis qu'alors l'angle F*a*C, ou ſon égal CRQ, ſera égal à l'angle BID. L'angle PBQ, eſt * de 112. d. 30. m. donc l'angle BPQ, qui eſt le complément à deux droits de PBQ, & de PQB, eſt * de 90. d., moins la moitié de l'angle DIA: d'où il s'enſuit, puiſque NBC eſt de 67. d. 3. m., que l'angle BCP, & ſon égal RCQ, eſt de 22. d. 30. m, plus la moitié de DIA. Si on ajoute à cet angle, l'angle RQC, leur ſomme ſera égale à l'angle DIA; d'où il ſuit que l'angle CRQ, eſt égal à DIR. Ce qu'il falloit démontrer.

PL. II. Fig. 3. * 24 * 11 * 27

30. Si on changeoit l'angle RBN, & qu'il fût (*a*), & l'angle DIA $= b$, & qu'on nommat (*d*) l'angle droit; l'angle CQR $= d + \frac{1}{2} b - a$,

31. Pour le Tableau parallèle il eſt aiſé de voir que quand les deux miroirs GH & MN, ſont chacun inclinés ſous un angle demi droit, un rayon, PL. II. Fig. 4.

qui est perpendiculaire à l'horizon, tombe aussi, après la double réflexion, perpendiculairement sur la Table.

PROBLEME III.

32. *Représenter tour à tour les objets qui sont aux environs d'une Campagne, ou d'un Jardin, au milieu du quel on a placé la Machine, & faire paroître ces objets redressés, devant celui qui est assis dans la Machine.*

Il faut tourner le dos de la Machine, vers le Soleil, parce que les objets, qui sont derriére la Machine, se représentant * par une seule réflexion, leur apparence sera toujours plus claire, bien qu'ils soient dans l'ombre, que celle des objets placés aux autres côtés & qui ne peuvent être vus que par une double réflexion.

* 15

33. Les objets qui sont aux deux côtés de la Machine, se représentent par le moyen du miroir H, situé * comme on le voit dans la figure. On couvre ce miroir d'une tour, ou boëte de carton, ouverte du côté des objets, comme aussi du côté de l'ouverture N, de la boëte X; on doit user de cette précaution; car si on laisse le miroir entiérement exposé, il réfléchira sur le miroir L, les rayons de lumiére qui viennent de côté; lesquels entrant par le verre convexe, après avoir été réfléchis par le miroir L, affoibliront extrêmement la représentation.

PL. I. Fig. 1. * 12

34. Les objets qui sont au devant de la Machine, se représentent comme il a été dit (n. 22. & 28.)

PROBLEME IV.

35. *Représenter des Tableaux ou des Tailles-douces.*

PL. I. Fig. 1. Les Tableaux & les Tailles-douces qu'on veut représenter, s'attachent contre la planche F, du côté qui regarde le derriére de la Machine, laquelle on tourne en sorte que ces Tailles-douces soient exposées au Soleil. Dans cette situation on les représente comme * les autres objets, avec cette seule différence, qu'il faut changer le verre convexe, qui est dans le cilindre C: car si on se propose de donner aux Tailles-douces leur véritable grandeur, il faut que la distance du foyer à ce verre, soit égale à la moitié de la hauteur de la Machine au dessus de la Table; c'est-à-dire, à la moitié de AC. Si on vouloit, dans le dessin, donner à ces mêmes figures plus de grandeur qu'elles n'en ont véritablement, il faudroit que la distance du foyer à son verre fut encore plus petite; & il faudroit au

* 15

contraire qu'elle fut plus grande, ſi on vouloit repréſenter les figures plus petites qu'elles ne le ſont. L'éloignement dans lequel il faut mettre les Tailles-douces, ſe trouve en avançant ou en reculant la planche F, juſques à ce qu'elles paroiſſent diſtinctement dans la Machine. On peut 36.
déterminer encore cet éloignement, par la proportion ſuivante.

La hauteur de la Machine au deſſus de la Table, moins la diſtance du foyer au verre,

eſt à

la hauteur de la Machine au deſſus de la Table

comme

la diſtance du foyer au verre

eſt à

la diſtance du verre à la figure.

Remarquez que cette diſtance du verre à la figure, ſe meſure par un rayon réfléchi, qui part de la figure parallèlement à l'horizon, & eſt réfléchi par le miroir perpendiculairement ſur le verre. Remarquez encore, que quand on veut éloigner les figures au delà du derriére de la Machine, il faut les attacher contre le côté F, de la planche, & la tourner en faiſant paſſer ſes lattes par les régles DE, DE, de maniére que la face F, regarde l'ouverture N.

REMARQUE.

Sur la repréſentation des Viſages. 37.

Il ſeroit aſſurément très curieux & très utile de pouvoir deſſiner les Viſages des Hommes au naturel. La choſe réuſſit fort bien en petit; & quand, parmi les objets qu'on enviſage ainſi tracés, il ſe trouve quelque perſonne de connoiſſance, on la reconnoit très diſtinctement, quand même l'apparence de la perſonne entiére n'occuperoit pas un demi pouce ſur le papier; mais il y a plus de difficulté de réuſſir en grand; car quand on repréſente un Viſage dans ſa grandeur naturelle, on employe un verre tel qu'il a été dit * pour les Tailles-douces, & on place le Viſage dans * 35
l'endroit où on devoit mettre la planche F *. Mais ce Viſage qui paroit * 35
alors aſſez diſtinctement pour qu'on puiſſe reconnoitre la perſonne, & pour ſatisfaire à la vue, n'a pas d'ailleurs les traits aſſez marqués pour qu'ils puiſſent être ſuivis auſſi exactement qu'il le faudroit pour garder la reſſemblance. La raiſon en eſt, que les traits paroiſſent vifs & diſtincts dans la Chambre obſcure, quand la réunion des rayons, qui partent d'un même point d'un objet, ſe fait exactement ſur le papier, dans un ſeul point:

mais le moindre éloignement, où un point eſt plus qu'un autre, du verre convexe, quand la diſtance eſt auſſi petite qu'il la faut pour repréſenter les objets dans leur grandeur naturelle, change tellement le lieu de cette réunion, que pour les différentes parties du Viſage, ces lieux différent de plus de deux pouces & demi. Ainſi il n'eſt pas ſurprenant que tous les traits ne ſoient pas auſſi marqués qu'on le ſouhaite, puiſque dans toutes les diſtances qu'on pourra choiſir, il y aura toujours beaucoup de rayons dont la réunion ſe fera à plus d'un pouce au deça ou au delà du papier. La confuſion qui nait de cette diverſité, pour n'être pas fort remarquable à la vue, ne laiſſe pas d'être nuiſible, & d'empêcher qu'on ne puiſſe attraper une exacte reſſemblance. Je fais ici cette remarque, afin de donner une juſte idée de la valeur de cette Machine, en marquant également en quoi elle peut être réellement utile, & en quoi ſon utilité aparente eſt ſujette à une erreur que l'expérience découvre plutot que le raiſonnement.

REMARQUE II.

38. *Sur l'ouverture du verre convexe.*

Dans tous les Problèmes précédents il ne faut pas négliger d'éxaminer l'ouverture qu'on doit donner au verre convexe; car bien qu'on ne puiſſe pas réduire cette ouverture à une meſure fixe, il ſera bon toujours de faire attention aux remarques ſuivantes. 1. Qu'on peut ordinairement donner au verre la même ouverture qu'on donneroit à une lunette d'approche, dont ce verre ſeroit l'objectif. 2. Qu'il faut diminuer cette ouverture quand les objets ſont fort éclairés, & qu'il la faut augmenter, quand au contraire ils ſont expoſés à un jour plus foible. 3. Que les traits paroiſſent mieux marqués avec une petite ouverture qu'avec une plus grande, & qu'ainſi lors qu'on veut deſſiner, il faut donner au verre le moins d'ouverture qu'il ſera poſſible; avec cette précaution pourtant, qu'il ne faut pas trop exténuer la lumiére qui entre par là dans la Machine. On voit par toutes ces remarques, qu'il eſt bon d'avoir pluſieurs pièces de fer blanc ou de cuivre mince, qui ſoient rondes, de la grandeur du verre, & percées différemment, afin de pouvoir ainſi donner au verre l'ouverture dont on a beſoin. On pourroit encore faire différentes ouvertures dans une lame de cuivre qu'on feroit gliſſer ſur le verre; ou ſe ſervir d'une plaque ronde, qui tournant ſur ſon centre, feroit paſſer ſur le verre des trous de différente grandeur.

Deſcription de la ſeconde Machine. 39.

Cette ſeconde Machine eſt une eſpéce de boëte, dont la largeur BD, *PL. III.*
& la hauteur AB, ſont égales, chacune étant d'environ 18. pouces : ſa *Fig. 1.*
profondeur FB n'en a que dix : le côté FE eſt fait en talut, de ſorte
que AE n'eſt environ que de ſix pouces.

On fait gliſſer au bas de cette boëte un quadre G, dans le quel le pa- 40.
pier eſt attaché *. * 15

Dans le milieu du haut de la boëte on fait une ouverture qui a un 41.
écroue pour élever & abaiſſer le cilindre, dans lequel on met le verre *. * 9

Au haut de la boëte, en dedans, il y a deux lattes HI & LM, les- 42.
quelles gliſſent dans de petits fers pareils à ceux dont il a été parlé *. * 7
Ces lattes avancent environ de deux pieds hors de la boëte, & leurs extré-
mités I & M ſont dans une diſtance l'une de l'autre égale, ou un peu
plus grande que n'eſt la longueur de la boëte. Elles ſervent à ſoutenir
une toile peinte de noir, qui eſt attachée aux trois côtés BA, AC, &
CD, de l'ouverture de la boëte.

A chaque côté au deſſous de la boëte il y a une piéce de bois de la 43.
figure marquée R (fig. 2.), qui ſert à ſoutenir la boëte ſur ſon pied, où
on la fixe par quatre chevilles de fer. Deux de ces chevilles paſſent de
chaque côté dans le pied, par les trous N & P; & dans les piéces dont
je viens de parler, par les trous T & V, quand on veut que le fond de
la boëte ſoit horizontal; & par T & O, quand on veut un peu l'incliner.

On eſt quelquefois obligé de mettre la boëte plus avant ſur ſon pied; 44.
ce qui ſe fait en employant les trous Q & S, au lieu de N & P. Il ar-
rive quelquefois dans ces cas là, qu'il eſt avantageux de pancher la boëte
un peu en arriére; ce qui peut ſe pratiquer en faiſant paſſer la cheville qui
eſt en S, par le trou X, lequel on perce dans une petite piéce de bois
qu'on attache contre la Machine : on fait un trou ſemblable de l'autre côté.

Au deſſus de la Machine on fait gliſſer une boëte ou petite tour, pareil- 45.
le à celle qui a été décrite * : mais avec cette ſeule différence, quelle doit * 10, 11,
être plus petite. 13

Au deſſus de cette petite tour Y, il y a deux petits fers Z, Z, qui ſer-
vent à faire gliſſer une régle à laquelle on arrête un miroir, comme il a
été dit *. Par ce moyen là on donne à ce miroir la ſituation qu'il a en * 13
H, dans la figure de la premiére Machine.

La Machine que je viens de décrire eſt extrémement facile à tranſpor- 46.
ter; car alors on fait repoſer la boëte BEC, ſur les deux traverſes 2, 3,
& 4, 5, qui ont chacune une échancrure en dedans, pour empêcher la

boëte de glisser. Dans cette situation l'ouverture ABCD est en haut: on met alors dans la boëte, la petite tour Y, avec la régle & le miroir dont il est parlé, n. 13. On y fait entrer aussi la toile peinte de noir, après qu'on a ôté les deux lattes qui la soutenoient; puis on couvre la
* 40 boëte, en partie du quadre G *, qui est soutenu par deux lattes fort minces, & en partie d'une autre petite planche, quand le quadre n'est pas assez grand. Toute la Machine ainsi démontée, n'occupe pas plus d'espace que n'en occupoit auparavant le pied seul. Quand on veut s'en servir pour représenter les objets, il faut la remettre dans son premier état.

47. *Usage de cette Machine.*

L'Usage de cette seconde Machine est le même que celui de la premié-
* 43 re: mais il est bon de remarquer que quand on incline * la Machine, il faut diminuer l'angle de l'inclinaison du miroir avec l'horizon, de la moi-
* 44 tié de l'inclinaison du fond de la boëte; & que quand on renverse * un peu la Machine, il faut augmenter cet angle d'une pareille moitié. Il
* 44 faut remarquer d'ailleurs que pour le Tableau parallèle, on doit avancer * la Machine sur son pied, & passer les chevilles par S & Q. Quant aux Tailles-douces, elles doivent s'attacher à une planche entiérement séparée de la Machine. Cette planche doit être soutenuë par un pied qu'on puisse avancer & reculer commodément.

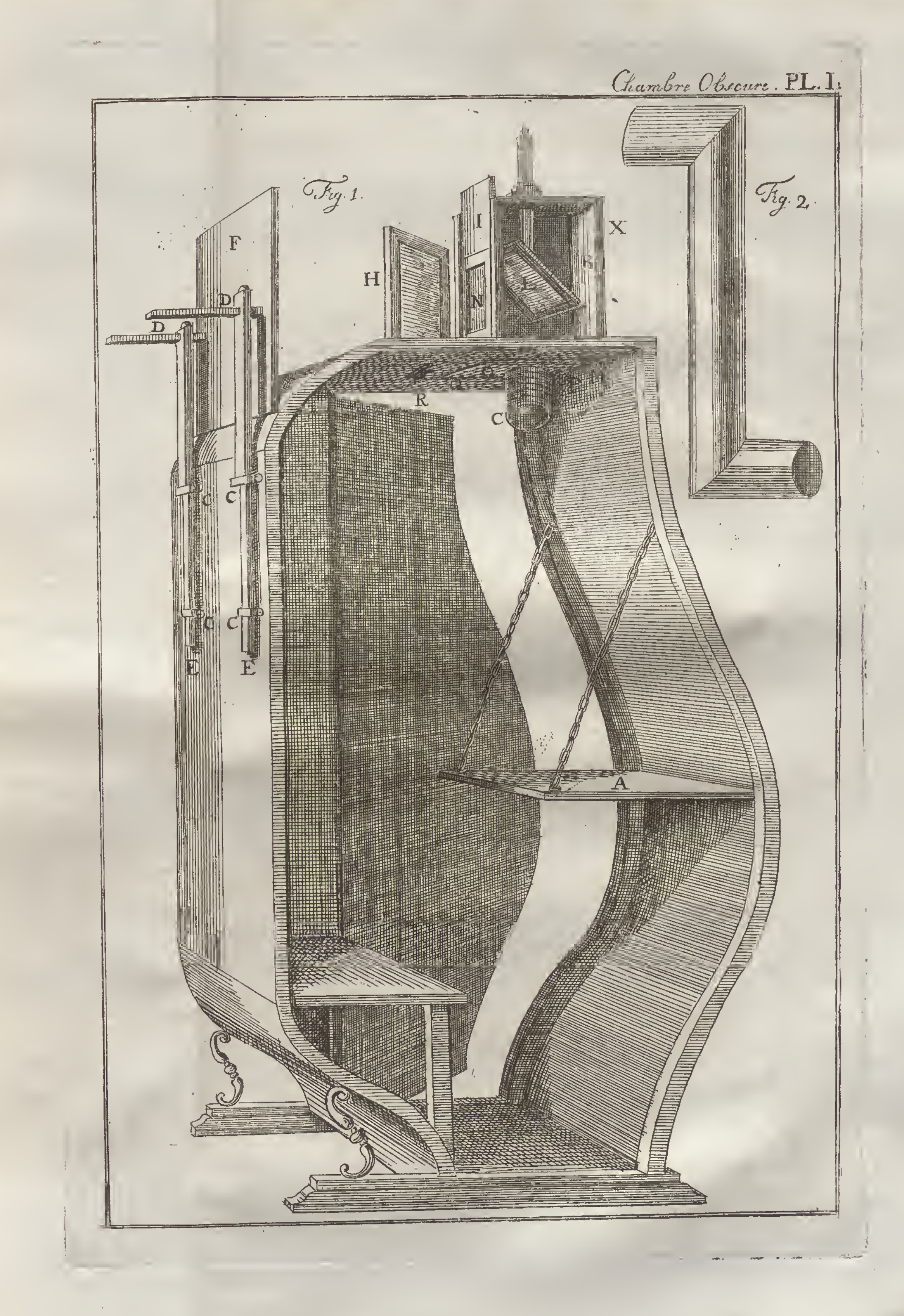
DEMONSTRATION.

48. *Pour l'inclinaison du miroir.*

PL. II. Fig. 5. Soit AB, un rayon venant d'un point de quelque objet: il faut dé-
* 19 montrer *, que si la ligne DI, a l'inclinaison qu'on veut donner au Tableau, & que si on a donné au miroir GH l'inclinaison, que nous avons prescrite, l'angle B*a*F sera égal à l'angle DCB. Pour la démonstration, menez la ligne FI, parallèle à l'horizon. A present dans le Triangle IDF, les deux angles IDF & DFI sont ensemble égaux à l'angle DIE;
* 16, 47 mais l'angle DFI, qui est l'inclinaison du miroir, est égal * à la moitié de l'angle DIE, moins la moitié de l'angle IF*a*; par conséquent il est moindre que l'angle FDI de l'angle entier IF*a*: ainsi si à l'angle DFI on ajoute l'angle IF*a*, on aura l'angle DF*a*, égal à l'angle FDI: donc
* 19 l'angle F*a*B sera * aussi égal à l'angle BCD. Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera par un raisonnement à peu près semblable, ce qui a été
* 47 dit * de l'inclinaison du miroir quand on renverse un peu la boëte.

FIN.


Fig. 1.
Fig. 2.
F
D
D
D
C
C
C
C
C
E
E
H
I
N
L
X
R
G
C
A

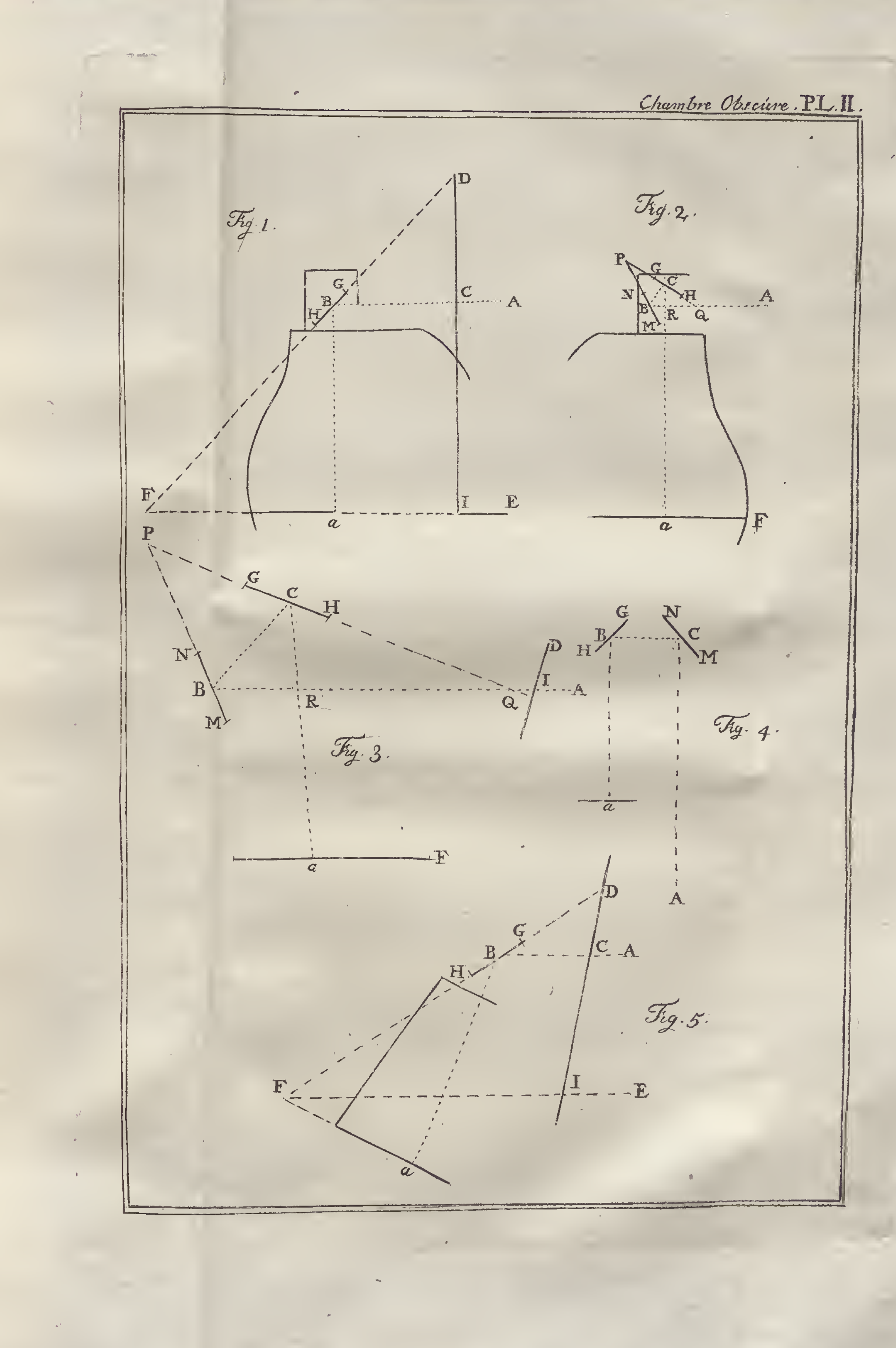

Fig. 1.
D
G
B
H
C
A
F
P
a
I
E
Fig. 2.
P
G
C
N
H
A
B
R
Q
M
a
F
G
C
H
N
B
M
R
Q
D
I
A
Fig. 3.
a
F
G
N
B
C
H
M
Fig. 4.
a
A
D
G
C
A
B
H
Fig. 5.
F
I
E
a

Fig. 1.

Fig. 2.

MATHESEOS
UNIVERSALIS
ELEMENTA.

QUIBUS ACCEDUNT,

SPECIMEN COMMENTARII

IN

ARITHMETICAM UNIVERSALEM NEWTONI;

UT ET

DE DETERMINANDA FORMA SERIEI INFINITÆ ADSUMTÆ

REGULA NOVA.

PRÆFATIO.

Inter varios Matheseos usus, merito cæteris anteponitur ille, quo ingenia reliquis omnibus scientiis aptiora reddit.

Fit hoc duplici modo 1°. Ratiociniis firmis mentem adsuefacit, quo hæc facultatem acquirit discernendi, in quo defectus ratiocinii hæreat, & quid in ipso desideretur. 2°. Matheseos studio sagacitatem quandam acquirit mens, quæ in inquirendo Vero in scientiis reliquis, etiam in vita civili, magni usus est; si modo aliarum scientiarum, aut ipsorum hominum, cognitio cum Mathesi conjungatur. Qui enim dum Mathesi animum applicat, reliqua negligit, non proprie methodum Mathematicam addiscit, sed solis ratiociniis circa quantitatem ingenium aptum facit.

Primus ex hisce usibus habetur in Geometriæ studio, si antiquorum methodum in demonstrando sequamur; non enim curandum utrum quis multa brevi tempore discat, sed an pauca bene discat: ubi enim agitur de acquirenda facultate bene ratiocinandi, non agitur de numero propositionum, sed tantum de methodo, qua traduntur, & ad hoc certe multi ex recentioribus Geometris non satis attendunt.

Usus secundus memoratus, merito a multis ad Algebram refertur, quæ de Vero detegendo regulas & exempla tradit, quare hujus scientiæ studium cum Geometriæ studio conjungendum est.

Cui tamen utrique & Logices studium addendum est, si quis sibi artem ratiocinandi propriam facere in animo habet.

Si huic Algebræ usui addamus hujus necessitatem, non tan-

tum in omnibus Matheseos partibus, sed præcipue in Physicis, quam sine Geometriæ & Algebræ Elementis nemo vix a limine salutare potest, in prædicanda hac arte subsistere poterimus.

Elementa, quæ nunc trado, privatis institutionibus destinata sunt; ideo quantum potui, quæ mihi dicenda fuere, breviter dixi.

Non in hisce ago de Problematibus, quæ ultra duas dimensiones adscendunt. Scopus mihi fuit, quantum potui, illustrare naturam Problematum, quod plerumque negligunt de Algebra Scriptores, qui etiam non semper satis ex regulis generalioribus operationum rationes deducunt.

Hac de causa varias adjeci observationes circa Problematum solutiones, & de Problematibus, quæ ad duas conducunt dimensiones, fusius egi.

De Problematibus trium & quatuor dimensionum plura dicenda forent. De natura Æquationum plurimi egere. Natura Problematum, quæ ad has æquationes conducunt, magis neglecta fuit: materia tamen Mathematico est digna, & tirones ex multis difficultatibus liberarentur, si bene explicata foret.

De duobus scriptis minoribus, quæ hisce Elementis adjeci, vide ipsorum præfationes.

MATHESEOS
UNIVERSALIS
ELEMENTA.

CAPUT I.

Generalia de Quantitate, & Scopo Analytices.

Matheseos objectum generale est Quantitas.

Quantum dicimus omne id, quod augeri & minui potest; ut Extensio, Tempus, Motus, Velocitas, &c. 1.

In diversis Matheseos partibus quantitates peculiares examinantur; de quantitate autem in genere considerata in his agam, regulasque, quibus detegitur verum, ubi de quantitatibus agitur, quæcunque hæ fuerint, breviter exponam.

Possunt quæ de quantitate in genere demonstrantur ad quantitatem quamcunque peculiarem applicari; & verum eadem methodo, in partibus quibuscunque Matheseos, assequimur.

Omne ratiocinium de quantitate ad hujus mensuram referri potest. 2.

Quantitatis Mensura est hujus cum alia ejusdem generis collatio. Linea dicitur sex pedum, si, collata cum linea unius pedis, hanc sexies contineat illa. 3.

Quantitates ejusdem generis tantum collationem admittunt; linea cum linea, superficies cum superficie, tempus cum tempore confertur; non autem tempus ullum lineæ cuicunque æquale dici poterit.

Dum quantitatem cum quantitate comparamus, sæpe attendimus, ad excessum unius supra aliam, id est, videmus majorem valere minoris cum alia summam, quod & ad plures, repetita comparatione, applicare possumus. Ad hanc comparationem illam referimus Arithmeticæ operationem, quam ADDITIONEM vocamus. 4.

Sæpe, mutata tantum consideratione, ad defectum, quo quantitas ab alia quantitate deficit, attendimus. Determinatio autem differentiæ duarum quantitatum SUBTRACTIO vocatur. 5.

6. Quantitas quæ repetita additione ejusdem quantitatis, aut partis ipsius formatur, MULTIPLICATIONE formari dicitur.

7. Contraria operatio, qua determinamus, quoties quantitas in quantitate contineatur, DIVISIO dicitur.

8. *Nulla potest concipi quantitatum collatio, quæ non ad unam ex his quatuor operationibus referri possit*; quam enim vocant Radicis extractionem, hanc ad Divisionem debere referri suo tempore dicetur.

9. Hisce quatuor operationibus veritas omnis, quæ quantitates spectat, investigatur.

Dicam nunc quid in his Elementis explicaturus sum, & quo ordine.

Primo breviter exponam quomodo quantitas generaliter ita possit exprimi, ut expressio ad quantitatem quamcunque peculiarem possit applicari.

Deinde exponam methodum, qua operationes circa quantitates ita expressas instituuntur.

Cum autem expressiones novæ ex his operationibus oriantur, demonstrabo qua methodo circa has novas expressiones operandum sit.

Tandem dicam qua arte, & quo ordine, in vero detegendo, operationes ipsæ dirigendæ sint.

10. Ars hæc, ALGEBRA, etiam ANALYSIS, a quibusdam MATHESIS UNIVERSALIS vocatur.

Hujus artis, ut ex dictis patet, scopus est Problematum solutio.

11. *PROBLEMA vocant Mathematici Propositionem omnem, quæ aliquid faciendum exigit.*

Ut vero Problema solvatur, quod desideratur præstandum est; & demonstrandum deinde solutionem requisito satisfacere.

In solutionibus autem analyticis, ipsæ operationes, quibus ad illas pervenimus, extra dubium ponunt, veram esse, quæ detegitur solutio.

CAPUT II.

De Quantitatum Expressionibus, & Operationibus circa Quantitates simplices.

12. *Quantitates Litteris exprimere maxime commodum* duxere Mathematici, ubi de operationibus agitur algebraicis.

Singulas litteras a, b, c, &c. peculiarem quantitatem quamcunque, sive notam, sive incognitam, exprimere posse quis non videt; incognitasque ope-

operationibus memoratis subjici iisdem regulis, quæ in quantitatibus cognitis locum habent?

Ut autem facilius cognitæ quantitates ab incognitis distinguantur, has ultimis litteris z, y, x, u &c. denotant, dum primæ, ut a, b, c, &c. cognitis quantitatibus designandis inserviunt. 13.

De Additione.

Summa variarum quantitatum exprimitur, jungendo litteras, quæ singulas quantitates designant, signo hoc +, quod significat PLUS. Sic $a+b$ est a plus b, & valet summam quantitatum a & b. 14.

Exempla.

$$\begin{array}{cccc} & & & 3d \\ & a & d & 2d \\ a & b & f & 2g \\ a & a & g & g \\ \hline 2a & 2a+b & d+f+g & 5d+3g \end{array}$$

De Subtractione.

Signum hoc — indicat quantitatem ex alia tolli; significat MINUS. $a-b$, est a minus b, id est, exprimit hoc differentiam quantitatum a & b. 15.

Exempla.

$$\begin{array}{ccc} 3a & a & 3a \\ 2a & b & 2b \\ \hline a & a-b & 3a-2b \end{array}$$

De Multiplicatione.

Multiplicatio est ejusdem quantitatis, aut partis ipsius, repetitio (6.); ita ut vices quibus repetitur exprimendæ sint; has autem numeri exprimunt.

Omnis ergo Multiplicatio fit per numerum: & quantitatem per quantitatem multiplicare absurdum est. 16.

Sed *Quantitas*, si cum alia conferatur, quæ pro unitate habetur, *potest* per numerum designari, & ipsa *pro numero haberi, quamvis per litteram exprimatur*; quod semper fit, ubi quantitas per quantitatem multipli- 17.

pli-

plicatur, ne absurda sit Multiplicatio; neque ideo unitatis determinatio necessaria est.

18. *Multiplicationis signum est hoc* $\times$, *aut simplex litterarum conjunctio*. Ubi a multiplicari debet per b, scribimus $a \times b$ aut $a\,b$.

19. *Vocatur hoc PRODUCTUM Multiplicationis.*

20. Quod idem Productum potest exprimi per $b\,a$; nam *ad ordinem litterarum non attendimus in Multiplicatione.*

Si $3\,a$ debeat multiplicari per b, Productum est $3\,ab$; sed si $3\,a$ multiplicandum sit per $2\,b$, quis non videt præcedens Productum duplicari debere, & esse $6\,a\,b$. Ergo

21. *Ubi per numeros multiplicatæ sunt quantitates, separatim hi multiplicantur.*

22. Productum a per a est $a\,a$, quod etiam sic exprimitur a^2.

Si $a\,a$ aut a^2 per a multiplicetur, Productum est $a\,a\,a$ aut a^3.

23. Hac de causa *ubi quantitas per numerum multiplicatur*, ut omnis evitetur confusio, *numerus ante litteram scribitur*. Si b per 6. multiplicetur, id est, si sexies sumi debeat, scribo $6\,b$, non $b\,6$, ne expressio hæc confundatur cum b^6, quæ significat $b\,b\,b\,b\,b\,b$.

24. Productum a per a, aut aa, vocatur QUADRATUM, aut SECUNDA POTESTAS, quantitatis a; & a est RADIX Quadrati aa.

25. CUBUS quantitatis a est a^3, aut aaa, dicitur etiam TERTIA POTESTAS; & a est Radix cubica a^3.

26. QUARTA POTESTAS quantitatis a est a^4, quæ etiam QUADRATO-QUADRATUM dicitur. QUINTA POTESTAS est a^5 & sic de cæteris.

27. *Numerus adscriptus INDEX est Potestatis.*

28. *Quantitas, quæ per aliam multiplicari debet, vocatur MULTIPLICANDUM.*

29. *MULTIPLICATOR vocatur quantitas per quam Multiplicatio fit.*

30. *PRODUCTUM Multiplicationis vocatur quantitas, quæ Multiplicatione detegitur*; ut monuimus in *N°*. 19.

EXEMPLA MULTIPLICATIONIS.

a	a^3	ab	$3b$	$3a^2f$
b	ab	ab	$6d$	$4af$
ab	a^4b	a^2b^2	$18bd$	$12a^3f^2$

DE DIVISIONE.

31. *Divisio resolvit quod Multiplicatione fuit compositum*, dum determinat quoties quantitas in quantitate contineatur.

DI-

DIVIDENDUM vocatur quantitas quæ dividi debet. 32.

DIVISOR est quantitas per quam fit divisio. 33.

QUOTIENS est quantitas quæ exprimit quoties Divisor in Dividendo continetur. 34.

Divisorem multiplicatum per Quotientem dare in Producto ipsum Dividendum, satis manifestum est. 35.

Unde hanc Regulam pro Divisione detegimus. *Ex Dividendo Divisor delendus est & supererit Quotiens:* si ab dividi debeat per a, deleto a restat b, & est Quotiens; nam multiplicato hoc Quotiente b per Divisorem a, datur in Producto ipsum Dividendum ab. 36.

Si numeri adsint hos separatim debere dividi, facile liquet (21. 35.) 37.

EXEMPLA DIVISIONIS.

Divid.	ab	} b Quot.	a^3bd	} aa.	$6afg$	} $2f$.
Divis.	a		abd		$3ag$	

Quando hac Methodo Divisio institui non potest, ut si ab per f dividi debeat, *Dividendum supra lineam & Divisor infra eandem scribitur*; sic $\frac{ab}{f}$ exprimit hujus Divisionis Quotientem. 38.

Quotiens in hoc ultimo casu FRACTIO vocatur. 39.

Dividendum, (ut ab), *vocatur NUMERATOR Fractionis*; 40.

Divisor vero, (ut f), *est DENOMINATOR Fractionis.* 41.

CAPUT III.

De Operationibus circa Quantitates compositas.

Composita vocatur quantitas, si variæ simplices signis + aut — junguntur. 42.

DE ADDITIONE.

Observandum quantitatem, quæ sine signo scribitur, habere subintellectum signum +; & liquet *additionem fieri, si, servatis signis, quantitates addendæ jungantur.* 43.

EXEMPLA.

		$2a+g-d$
$a+b$	$2a-f$	$3f-g-a$
$d+f$	$a-l$	$b-g+d$
$a+b+d+f$	$3a-f-l$	$a+3f+b-g$

DE SUBTRACTIONE.

44. Subtractio est contrarium Additionis; ergo *subtrahenda quantitas, mutatis omnibus hujus signis, cum alia conjungenda est.*

EXEMPLA.

$a+b$	$2a+b$	$3a+f-2g$
$c+d$	$a-b$	$4a+g-d$
$a+b-c-d$	$a+2b$	$f-3g-a+d$

DE MULTIPLICATIONE.

45. *Singulas quantitates Multiplicandi per singulas quantitates Multiplicatoris separatim multiplicari debere*, rem attente consideranti patebit.

46. In hisce peculiaribus Multiplicationibus observandum; *si Multiplicandi & Multiplicatoris signa fuerint similia Productum esse affirmativum, negativum esse hoc si signa fuerint diversa.*

47. Regula hæc ex examine casuum peculiarium deducitur; quales tantum quatuor dari facile percipimus; nam omnis Multiplicatio fit per numerum (16.): ergo 1. quantitas affirmativa, seu positiva, per numerum affirmativum multiplicatur. 2. Quantitas affirmativa in numerum negativum ducitur. 3. Multiplicatio est quantitatis negativæ & numeri affirmativi. 4. Tandem Quantitas negativa per numerum negatum multiplicatur.

In primo casu Productum esse affirmativum quis negabit?

In secundo casu est negativum; nam multiplicare per numerum negativum est tollere, cum multiplicare per numerum positivum sit ponere.

In tertio casu agitur de quantitate negata, quæ certis vicibus sumitur, & quæ idcirco negata manet.

Quartus casus tertio contrarius est; quare Productum etiam signo contrario afficitur & est affirmativum. Tollitur in hoc casu negativa quantitas, quo negatio evanescit. Sic tollere debitum est ipsum solvere.

E x-

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{l} a+b \\ d+f \\ \hline ad+bd+af+bf \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{l} 3a+2f-g-m \\ 2a+g-m \\ \hline 6aa+4af-2ag-2am+2gf-gg-gm-2fm+m^2 \\ \quad\quad +3ag-3am \quad\quad\quad +gm \\ \hline 6aa+4af+ag-5am+2gf-gg \quad -2fm+m^2 \end{array}$$

Multiplicationem hoc ſigno $\times$ poſſe exprimi diximus (18.); ſæpe uſu venit hoc in quantitatibus compoſitis, in quo caſu lineæ ducuntur ſupra quantitates multiplicandas, quæ has a reliquis ſeparant; ſic $\overline{a+b}\times\overline{f+g}-gf$ ſignificat gf ſubtrahi ex Producto quantitatum $a+b$ per $f+g$. 48.

Quæ de expreſſione Poteſtatum quantitatum ſimplicium dicta ſunt (22.) etiam ad quantitates compoſitas applicari poſſunt, ſi linea ducatur ſupra quantitates, de quibus agitur; $\overline{a+b}^3$ ſignificat Cubum Radicis $a+b$. 49.

DE DIVISIONE.

Diſpoſita aut Ordinata juxta litteræ datæ dimenſiones dicitur quantitas compoſita, quando in primo loco ponitur quantitas ſimplex, quæ litteræ datæ continet Poteſtatem altiſſimam, & quando Poteſtates ſucceſſive decreſcentes in ſequentibus quantitatibus diſponuntur; 50.

$$ab^3+fgb^2+a^3b+a^4;$$

Juxta dimenſiones litteræ b ordinata eſt quantitas hæc.

In hoc caſu ab^3 eſt primus terminus, & Poteſtates decreſcentes ipſius b ſequentes terminos determinant; numerusque terminorum unitate ſemper excedit indicem Poteſtatis altiſſimæ, continetque quantitas hæc terminos quatuor. 51.

Sæpe quidam termini deficiunt, quorum loca vacua relinquenda ſunt. In hac ipſa quantitate, ſi pro littera a ordinata fuerit, deficit terminus tertius, 52.

$$a^4+ba^3 \quad * \quad +b^3a+fgb^2.$$

53. Sæpe termini peculiares constant ex quantitatibus compositis, ut in hac quantitate.

$$\begin{array}{llll} e^4 + fe^3 + llee & * & -fl^3 \\ \quad -ge^3 & & -hmst \end{array}$$

Secundus terminus est $fe^3 - ge^3$ & quintus est $-fl^3 - hmst$.

54. In his casibus primam vocamus quantitatem termini cujuscunque quæ superior est, sed ad libitum scribi possunt.

Hisce præmissis, regulis sequentibus Divisio peragenda est.

55. 1. *Ordinanda sunt juxta dimensiones ejusdem litteræ Dividendum & Divisor.*

2. *Prima quantitas primi termini Dividendi per primam quantitatem primi termini Divisoris dividitur, & Quotiens notatur.*

3. *Divisor totus per Quotientem multiplicatur, & ex Dividendo Productum subtrahitur.*

4. *Repetitis hisce operationibus Divisio absolvitur, summaque Quotientum peculiarium dat Quotientem quæsitum.*

5. *In Divisionibus peculiaribus observandum, Dividendi & Divisoris signa similia dare Quotientem affirmativum, signa diversa dare Quotientem negativum.*

Si absoluta Divisione ad operationes attendamus, ex Theoremate *n.* 35. constabit detectum Quotientem verum esse.

EXEMPLUM I.

$$\text{Divid.} \left\{ \begin{array}{l} ab + dc \\ ac + db \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a + d \ \text{Divis.} \\ \overline{b + c} \ \text{Quot.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \overline{-ab - db} \\ ac + dc \\ \underline{-ac - dc} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\text{Divid.}\ a^3 + ba^2 + b^2a + b^3 \left\{ \begin{array}{l} a + b \ \text{Divis.} \\ \overline{aa + bb} \ \text{Quot.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \overline{-a^3 - ba^2 \qquad\qquad} \\ + bba + b^3 \\ \underline{- bba - b^3} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

Ex-

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{l|l} \text{Divid. } a^4 \quad * \quad * \quad * \quad -b^4 & a-b \text{ Divis.} \\ \hline & a^3+baa+b^2a+b^3 \quad \text{Quot.} \\ -a^4+ba^3 & \\ \hline +ba^3 \qquad -b^4 & \\ -ba^3+b^2a^2 & \\ \hline +b^2a^2 \qquad -b^4 & \\ -b^2a^2+b^3a & \\ \hline +b^3a-b^4 & \\ -b^3a+b^4 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Ubi hæ operationes ulterius produci non poſſunt, ſuperſtitibus in Dividendo quantitatibus quibuscunque, Diviſio exacte fieri non poteſt, & RELIQUUM Diviſionis dicuntur quantitates hæ quæ ſuperſunt. 56.

In hiſce caſibus totus Quotiens Fractione deſignatur, aut detecto Quotiente Fractio ex Reliquo formata adjicitur. 57.

Si $aa - 2ab + 2bb$

per $a + b$ dividi debeat, Quotiens erit

$$\frac{aa - 2ab + 2bb}{a+b}, \text{ aut } a - b + \frac{bb}{a+b}.$$

De Radicum Extractione.

RADICUM EXTRACTIO vocatur Radicum inveſtigatio ex datis Poteſtatibus; eſtque peculiaris ſpecies Diviſionis, in qua Diviſor cum Quotiente quæruntur, data horum relatione. 58.

Ubi de quantitatibus ſimplicibus agitur, ſine difficultate Radix detegitur, ſi extrahi poſſit; a^2 Radicem quadratam habet a; a^4 Radicem habet aa; tandem ab eſt Radix Quadrati $aabb$. 59.

Eodem modo liquet a^3 habere Radicem cubicam a; a^3b^3 habet Radicem ab.

Circa quantitates compoſitas explicabo quæ ſpectant Radices quadratas & cubicas, ex quibus facile deduci poterunt extractiones Radicum reliquarum Poteſtatum.

In extractione Radicum quadratarum observandum, in omni Quadrato quantitatis compositæ dari quadrata quantitatum peculiarium, ex quibus Radix constat; ex qua observatione deducimus methodum detegendæ Radicis tentandæ.

EXEMPLUM I.

Quæritur Radix quadrata quantitatis,

$$aa + 2ab + bb.$$

Continet Quantitas hæc quadrata duo peculiaria aa & bb, ex his Radices extraho a & b, quas in unam summam colligo, & habeo $a+b$ Radicem tentandam; cujus Quadratum est ipsa quantitas proposita.

60. Quando Radicis detectæ Quadratum a quantitate proposita differt, non potest hujus Radix extrahi.

EXEMPLUM II.

$$aa + ab + bb.$$

Radix tentanda est iterum $a+b$. Cujus Quadratum $aa + 2ab + bb$ a quantitate proposita differt; ideo hujus Radix extrahi non potest.

61. Quomodo signa quantitatum radicalium determinentur, quando non omnes quantitates in Quadrato proposito sunt affirmativæ, in exemplo sequenti explicamus.

EXEMPLUM III.

$$aa + 2ab - 2bc + bb + cc - 2ac.$$

Trium Quadratorum aa, bb, cc, extraho Radices a, b, c. Cum omne Quadratum sit affirmativum (46.), signa adhucdum latent; sed Productum affirmativum $+ 2ab$ indicat quantitatum a & b signa esse similia (46.); b vero & c habere signa diversa demonstrat $- 2bc$ (46). Radix ergo tentanda est $a+b-c$ aut $c-a-b$; utriusque Quadratum est quantitas proposita.

62. Sæpe Quadratum supplendum est, ut in exemplo sequenti.

EXEMPLUM IV.

$$a^4 - 2a^3b - aabb + 2ab^3 + b^4.$$

Continet quantitas hæc tantum Quadrata duo a^4 & b^4, quorum Radices non sufficiunt; sed video Quadratum potuisse tolli quantitate signo contrario affecta; datur enim $- aabb$, quæ quantitas esset Quadratum si affirma-

mativa esset; addo ideo quantitati propositæ $+aabb-aabb$; quo quantitas non mutatur, & est hæc,

$$a^4-2a^3b-2aabb+aabb+2ab^3+b^4$$

Cujus Radix tentanda est

$$aa-ab-bb, \text{ aut } bb+ab-aa,$$

& utriusque Quadratum est quantitas proposita.

Exemplum V.

$$a^4+2a^3b+3aabb+2ab^3+b^4.$$

Continet tantum duo Quadrata, quorum Radices non sufficiunt, sed $3aabb$ potest sic exprimi $2aabb+aabb$, in quo casu datur tertium Quadratum $aabb$, & Radix tentanda est $aa+ab+bb$ quæ vera est.

Methodus similis est, si agatur de Radicibus cubicis; nam ex Cubi formatione constat, dari in Cubo quantitatis compositæ Cubos quantitatum peculiarium quæ in Radice continentur. 63.

Quod autem ad signa attinet, facilius hæc deteguntur, cum Cubus eodem signo cum Radice afficiatur, quod in omni potestate, cujus Index est numerus impar locum habet.

Exemplum.

$$a^3-3aab+3abb-b^3,$$

Radix tentanda est $a-b$, cujus Cubus est quantitas quæsita.

Ubi Radix extrahi non potest, hæc signo peculiari $\sqrt{}$ *designatur.* $\sqrt{ab}$ valet 64.
Radicem quadratam quantitatis ab; $\sqrt{aa+bb}$ est Radix quadrata $aa+bb$.

Radicis cubicæ signum est $\sqrt[3]{}$; Radicis quartæ Potestatis $\sqrt[4]{}$; & sic de cæteris.

Radices signis his expressæ Surdæ quantitates dicuntur. 65.

Caput IV.

De Fractionibus.

Generale hoc Theorema præmittendum: *Quotientem Divisionis non mutari, si Dividendum & Divisor per eandem quantitatem multiplicentur, aut dividantur.* 66.

Po-

Potest ab designare Dividendum quodcunque; a Divisorem quemcunque; & Quotiens erit b. Multiplicatis ab & a per d, & diviso abd per ad, est etiam b Quotiens. Similis est demonstratio ubi de Divisione agitur.

67. In omni Fractione Numerator est Dividendum, Denominator est Divisor, Fractio est Quotiens (38. & seq.); ergo *multiplicatis, aut divisis, Numeratore & Denominatore per eandem quantitatem non mutatur Fractio* (66.)

68. Multiplicando quantitatem per unitatem non mutatur, ergo etiam manet si per unitatem dividatur (31.) Idcirco

69. *Integram quantitatem in Fractionem mutamus, si, dum ipsa in Numeratore ponitur, habeat unitatem in Denominatore:* $a+b$ valet $\frac{a+b}{1}$.

70. *Quantitas integra reducitur in Fractionem cujus Denominator datur*, si Fractionis, per regulam præcedentem detectæ, Numeratorem & Denominatorem per datum Denominatorem multiplicemus (67). Ita $a+b$ reducitur in Fractionem cujus Denominator est d, si Fractionem $\frac{a+b}{1}$ mutemus in hanc $\frac{ad+bd}{d}$.

71. Quæ regula ad ipsam unitatem potest applicari; & $\frac{1}{1}$ valet unitatem ut & $\frac{d}{d}$, etiam $\frac{aa+bb}{aa+bb}$ &c.

Fractio ad simpliciorem reduci potest, si Numerator & Denominator communem habeant Divisorem (67). Et quidem quo major est hic Divisor, eo ad simpliciorem.

72. *Reducitur Fractio ad omnium quam potest simplicissimam, si Numerator & Denominator per maximum communem Divisorem dividantur.*

Methodum idcirco tradam, qua maximus communis Divisor duarum quantitatum investigatur.

De Communi Divisore detegendo.

73. Sint AB & CD lineæ datæ, quarum maxima communis mensura quæritur.
TAB. I. Fig. 1. Si minor exacte mensuret majorem, erit ipsa CD mensura quæsita.

Si non, sed detur reliquum EB, postquam minor quoties hoc fieri potuit subtracta fuit e majori: clarum est mensuram quæsitam, quæ mensurat CD, hanc ipsam repetitam etiam mensurare, id est AE; sed debet quoque mensurare AB; ergo & EB.

Quærenda idcirco est maxima communis mensura reliqui EB & minoris quantitatis CD.

Si

Si reliquum EB exacte mensuret CD, erit EB mensura quæsita; si non mensuret, tolli debet EB ex CD quoties potest, & demonstratione simili præcedenti constabit, quærendam esse maximam communem mensuram reliqui hujus ultimi & reliqui præcedentis EB; operationemque eodem modo esse continuandam, donec reliquum ultimum præcedens reliquum exacte mensuret. Ex his hanc deducimus regulam.

Datis duabus quantitatibus quarum maximus communis Divisor quæritur; 74.
majorem per minorem divido; rejecto Quotiente, minorem per reliquum divido; operationemque continuo, rejiciendo semper Quotientes, & dividendo Divisorem ultimæ Divisionis per reliquum ejusdem, donec ad Divisionem perveniam sine reliquo, estque hujus Divisionis Divisor quantitas quæsita.

Sufficit hæc regula quamdiu de numeris agitur, & ad unitatem conducit, si alium communem Divisorem non habeant.

Si quantitates propositæ algebraicæ fuerint, in singulis Divisionibus hæc duo præterea observanda.

Tentandum an non totus Divisor possit dividi per quantitatem, sive simpli- 75.
cem sive compositam, per quam primus terminus Divisoris hujus dividi potest.

Si primus terminus Divisoris non exacte possit dividere primum terminum 76.
Dividendi, multiplicandum est integrum Dividendum per quantitatem quæ dat hanc Divisionem exactam. Detegitur hæc quantitas simplici consideratione quantitatum, & levi attentione.

E x e m p l u m I.

Quæritur communis maximus Divisor duarum harum quantitatum, quam utramque ordinavi juxta dimensiones litteræ a;

$$\begin{array}{l} a^3 \; * \; + bda + bbd \\ \qquad - bba - bdd \\ \qquad - dda \end{array}$$

&

$$a^3 + daa - bba - bbd$$

D i v i s i o p r i m a.

Divido primam per secundam & Quotiens est 1., quem negligo; reliquum est

$$\begin{array}{l} - daa + bda + 2bbd \\ \qquad - dda - bdd, \end{array}$$

quod divido per d (75), & habeo

$$\begin{array}{l} - aa + ba + 2bb \\ \qquad - da - bd \end{array}$$

DIVISIO SECUNDA.

Per hanc quantitatem divido primum Diviſorem, Quotiens qui negligitur eſt $-a$, & reſtat

$$\begin{array}{l} baa + bba - bbd, \\ \quad - bda \end{array}$$

quo diviſo per b (75), datur

$$\begin{array}{l} aa + ba - bd \\ \quad - da \end{array}$$

DIVISIO TERTIA.

Per hoc ultimum reliquum divido Diviſorem ultimæ Diviſionis, & Quotiens eſt $-1.$; reliquum eſt

$$\begin{array}{l} 2ba + 2bb \\ - 2da - 2bd. \end{array}$$

Quam quantitatem divido per $2b - 2d$, & $a + b$ Quotiens eſt quartæ Diviſionis Diviſor (75).

DIVISIO QUARTA.

Per $a + b$ divido Diviſorem tertiæ Diviſionis, & nullum datur reliquum; eſt ergo $a + b$ maximus communis Diviſor quæſitus.

EXEMPLUM II.

Dantur quantitates ordinatæ juxta dimenſiones litteræ a.

$$\begin{array}{l} aaff + ahdg - ddgg, \\ aafh \end{array}$$

&

$$\begin{array}{l} aahh + afdg - ddgg, \\ aafh \end{array}$$

Harum quæritur maximus communis Diviſor.

DIVISIO PRIMA.

Primum terminum primæ quantitatis divido per primum terminum ſecundæ, & Quotiens eſt $\frac{f}{h}$; mutiplico idcirco primam quantitatem per h (76.) ut Fractio tollatur, & Quotientem tunc habeo f, reliquum eſt

$$\begin{array}{l} ahhdg - ddggh \\ - affdg + ddggf \end{array}$$

Di-

Divisa integra quantitate per dg, datur

$$\begin{matrix} abh - dgh \\ - aff + dgf, \end{matrix}$$

cujus uterque terminus potest dividi per $h-f$, ita ut quantitas reducatur ad hanc

$$ah + af - dg,$$

quæ exacte dividit Divisorem primæ Divisionis, & est communis Divisor quæsitus.

Observandum aliquando communem Divisorem detectum, non esse maximum; quod quando fiat, & quomodo in tali casu ad maximum perveniamus, exemplo illustrabo. 77.

Exemplum III.

Dantur quantitates ordinatæ juxta dimensiones litteræ a.

$$\begin{matrix} adc - dbc \\ afc - fbc \\ add - bdd \\ adf - fbd \end{matrix}$$

&

$$\begin{matrix} agc - bgc \\ agd - bgd \\ alc - blc \\ ald - bld \end{matrix}$$

Quæritur maximus communis Divisor.

Primam quantitatem per secundam debeo dividere (74.)

Sed Divisor hic potest reduci (75.) quia uterque terminus divisibilis est per $gc+gd+lc+ld$, & Quotiens est $a-b$, per quem Divisio primæ quantitatis sine reliquo procedit; non tamen est $a-b$ maximus communis Divisor.

Et nunquam maximus Divisor communis habetur quando, in Divisione quacunque, quantitas per quam reducimus Divisorem, est etiam Divisor Dividendi, aut cum Dividendo communem Divisorem habet; ut in hoc casu in quo 78.

$$gc+gd+lc+ld,$$

potest dividi per $c+d$, per quem divisorem etiam primam ex datis quantitatibus possumus dividere.

Ut ergo perveniamus ad maximum communem Divisorem, *debemus in singulis Divisionibus examinare, an non quantitas, per quam Divisorem reducimus, habeat communem Divisorem cum Dividendo hujus Divisionis; qui si de-* 79.

detur, debemus per hunc ipsum dividere Dividendum ut reducatur, & post integram operationem absolutam debemus per hunc peculiarem Divisorem multiplicare communem Divisorem detectum.

In ultimo exemplo ubi percepi reductionem Divisoris fieri Divisione per $gc+gd+lc+ld$, quæro an non hæc quantitas cum Dividendo, id est, cum prima ex propositis quantitatibus communem Divisorem habeat, & detego $c+d$, per quem primam illam quantitatem divido quæ ad hanc reducitur

$$\begin{array}{l} ad - bd \\ af - bf. \end{array}$$

Antea Divisorem jam reduxi ad $a-b$, & cum Divisio sine reliquo procedat, est ipse maximus harum quantitatum communis Divisor; multiplico ergo $a-b$ per $c+d$, & erit $ac+ad-bc-bd$ maximus communis Divisor quantitatum propositarum.

De Reductione Fractionum ad Communem Denominationem.

80. *Fractiones variæ reducuntur ad communem Denominatorem, multiplicando singularum Numeratores & Denominatores per omnium aliarum Denominatores.* Qua operatione singulæ Fractiones non mutantur (67.)

Exemplum.

Fractiones reducendæ

$$\frac{ab}{f}, \quad \frac{cbd}{hl}, \quad \frac{q}{r},$$

Fractiones reductæ,

$$\frac{abhlr}{fhlr}, \quad \frac{cbdfr}{fhlr}, \quad \frac{qfhl}{fhlr}.$$

81. *Si duo aut plures Denominatores communem Divisorem habeant, hi ante operationem per hunc dividi possunt; si tunc, absoluta operatione, Denominator communis ut & Numerator, illarum Fractionum quarum Denominatores non fuere divisi, multiplicentur per communem Divisorem, simpliciores erunt Fractiones reductæ.*

Exemplum.

Fractiones reducendæ,

$$\frac{l}{s}, \quad \frac{abd}{lh}, \quad \frac{f^3}{mh}:$$

Com-

Communis Divisor duorum Denominatorum est h, &

$$\frac{llmh}{slmh}, \quad \frac{abdsm}{slmh}, \quad \frac{f^3sl}{slmh},$$

sunt Fractiones reductæ. Exemplum ipsum demonstrationem manifestam facit.

De Additione et Subtractione Fractionum.

Reductis Fractionibus ad communem Denominationem, addendi aut subtrahendi sunt Numeratores. 82.

Exempla.

Datis $\frac{ad}{b}, \quad \frac{fs}{h}, \quad \frac{ml}{t},$

Summa est

$$\frac{adht + fsbt + mlbh}{bht}$$

Duarum primarum, facta Subtractione, differentia est,

$$\frac{adh - fsb}{bh}$$

Datis $\frac{afr}{ad + bd}, \frac{l^3 - mb^2}{aa - bb}$

Summa est

$$\frac{aafr - afrb + dl^3 - dmb^2}{aad - bbd}$$

Differentia est

$$\frac{aafr - afrb - dl^3 + dmb^2}{aad - bbd}$$

De Multiplicatione.

Multiplicatio Fractionum hoc nititur Theoremate.

Productum Quotientum detegitur, si Productum Dividendorum per Productum Divisorum dividatur. 83.

Sit ab Dividendum, a Divisor, Quotiens est b. Iterum cd Dividendum, c Divisor, Quotiens d. Possunt quantitates hæ Quotientes, Divisores, & Dividenda omnia possibilia repræsentare. Productum Quotientum est bd; quod etiam detegitur si $abcd$, Productum Dividendorum, per ac, Productum Divisorum, dividatur.

84. *Fractiones* ſunt Quotientes, & *multiplicantur* hæ, *multiplicatis Numeratoribus & Denominatoribus* (38. 83.)

E X E M P L A.

$$\frac{af}{d} \text{ per } \frac{as}{m}, \text{ dat } \frac{aafs}{dm}$$

$$\frac{bm}{a+b} \text{ per } \frac{lm}{a-b}, \text{ dat } \frac{blm^2}{aa-bb}$$

85. Ut Fractio quæ Productum exprimit ſit omnium ſimpliciſſima, non ſufficit Fractiones ante Multiplicationem reduxiſſe ad ſimpliciſſimas; nam, ſi Numerator unius cum alius Denominatore communem Diviſorem habeat, Productum reduci poterit; unde pro Reductione hanc deducimus regulam.

86. *Reductis Fractionibus ad ſimpliciſſimas, permutatis Denominatoribus iterum reducendæ ſunt.* Permutatione hac Fractiones quidem mutantur, ſed Productum non variat.

E X E M P L U M.

Sint Fractiones multiplicandæ

$$\frac{da^4 - db^4}{fgaa + fgbb}, \quad \frac{fl^3}{aal + 2alb + lbb}.$$

Fractiones reductæ erunt

$$\frac{daa - dbb}{fg}, \quad \frac{fl^2}{aa + 2ab + bb}.$$

Sunt eædem permutatis Denominatoribus

$$\frac{daa - dbb}{aa + 2ab + bb}, \quad \frac{fl^2}{fg}.$$

Iterum reductæ ſunt

$$\frac{da - db}{a + b}, \quad \frac{l^2}{g}.$$

Productum eſt

$$\frac{dal^2 - dbl^2}{ag + bg}.$$

87. *Si Fractio multiplicetur per Denominatorem, productum eſt Numerator* (35. 40. 41.)

De

De Divisione.

Divisio Fractionum est Divisio Quotientum duarum Divisionum (38. 39.), *quæ servatis Dividendis & Divisoribus exprimuntur.* 88.

Sit abc Dividendum quodcunque, a Divisor, Quotiens est bc; qui dividi debet per Quotientem hujus alius Divisionis cd per d, cujus Quotiens est c. Diviso Quotiente bc per c, habemus b Quotientem, quem unica divisione etiam detegimus

Dividendum primæ Divisionis multiplicamus per Divisorem secundæ, & Productum abcd *dividimus per Productum* acd *Dividendi secundæ Divisionis ducti in Divisorem primæ, & habemus* b *Quotientem Quotientum.* Divisiones de quibus in his agitur omnes Divisiones possibiles repræsentant. 89.

Sint nunc Fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{d}{c}$, quarum prima dividi debet per secundam; Dividendum primæ Divisionis est a, Divisor b, Quotiens est Fractio $\frac{a}{b}$ (38. 39.); secundæ Divisionis Dividendum d, Divisor c, Quotiens $\frac{d}{c}$.

Si nunc ac dividamus per db habebimus Fractionum Quotientem $\frac{ac}{db}$ (89.).

Hanc *Fractionum Divisionem ad harum multiplicationem reducimus, si Divisoris Numeratorem in Denominatorem mutemus.* 90.

Divisor est $\frac{d}{c}$, facta permutatione est $\frac{c}{d}$, quæ Fractio, si per $\frac{a}{b}$ multiplicetur, dat Quotientem jam detectum $\frac{ac}{db}$.

Omnia quæ de Multiplicatione Fractionum fuere observata (84. 85.) & hic applicari debere, post Numeratoris transpositionem, manifestum est.

De Extractione Radicum.

Quadratum Fractionis $\frac{a}{b}$ est $\frac{aa}{bb}$ (84.); cubus est $\frac{a^3}{b^3}$; unde sequitur,

Radicem Fractionis detegi, si separatim ex Numeratore & Denominatore Radices extrahantur; quare hic referenda sunt quæ superius (58. & seq.) de Radicum Extractione explicata sunt. 91.

Exempla Radicum Quadratarum.

$\frac{aa + 2ab + bb}{bb}$ habet Radicem $\frac{a + b}{b}$.

$\frac{bb}{df}$ habet Radicem $\frac{b}{\sqrt{df}}$

$\frac{fd+gh}{dm}$ habet Radicem $\frac{\sqrt{fd+gh}}{\sqrt{dm}}$ aut $\sqrt{\frac{fd+gh}{dm}}$.

CAPUT V.

De Quantitatibus surdis.

92. S*Urdæ Quantitates sæpe ad simpliciores reduci possunt*, quæ Reductio hoc Theoremate nititur.

93. *Radix Producti habetur, multiplicatis Radicibus Quantitatum multiplicandarum.*

Patet hoc si sint multiplicandæ Quantitates aa & bb, harum radices sunt a & b, & Radicum Productum est ab, Radix Producti $aabb$.

94. Sit nunc $\sqrt{aabd}$, potest hæc reduci; nam est hæc Radix Producti aa per bd, quarum quantitatum Radices sunt a & $\sqrt{bd}$; & harum Productum $a\sqrt{bd}$ valet Radicem propositam (93.) Eodem modo $\sqrt[3]{a^3b}$ valet $a \times \sqrt[3]{b}$.

95. In hoc casu quantitas cujus Radix signo radicali exprimitur, ut in hoc casu b, dicitur SUB SIGNO; alia, ut a, est EXTRA SIGNUM.

96. *Radices, ejusdem Potestatis, quæ, ubi ad simplicissimas sunt reductæ, eandem Quantitatem sub signo habent, dicuntur COMMUNICANTES*, ut $\sqrt{aab}$ & $\sqrt{ccb}$ quæ ad has reducuntur $a\sqrt{b}$, $c\sqrt{b}$.

97. *Potest signum radicale variari, non mutata ipsa Radice quæ exprimitur*; patet enim $\sqrt{aa}$, $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[4]{a^4}$, $\sqrt[5]{a^5}$ &c. eandem Radicem a designare.

98. *Hæc mutatio fit, dum quantitas sub signo elevatur ad Potestatem per cujus Indicem multiplicatur Index signi radicalis*, sic $\sqrt[3]{a^3}$ non mutatur si, dum Index signi multiplicatur per 2 ut fiat $\sqrt[6]{}$, a^3 ad secundam Potestatem elevetur, & mutetur in a^6, $\sqrt[6]{a^6}$ valet $\sqrt[3]{a^3}$.

99. Hinc deducimus regulam qua *variæ Radices ad commune signum radicale reducuntur.*

100. Sed dicendum antea quomodo detegatur *numerus omnium minimus qui exacte per singulos Indices signorum radicalium datorum dividi potest*; nam *est* hic *Index signi quæsiti*, si agatur de reductione omnium simplicissima.

101. *Productum omnium Indicum*, per singulos quidem *exacte dividitur*, *sed si quidam inter hos communem Divisorem habeant*, non est Productum tale nume-

merus minimus, qui per omnes Indices dividitur. In hoc casu Indices *hi omnes*, qui communem Divisorem habent, *uno tantum excepto, per ipsum dividi debent, & Quotientes loco Indicum in Multiplicatione adhibendi sunt.*

Quantitas omnium minima, quæ per has quinque dividitur, ab, df, alm, ln, ag, sic detegitur. Ex tribus quantitatibus ab, alm, ag, quæ communem Divisorem habent a, duæ, ut ab, alm, per a dividuntur, & habemus b, df, lm, ln, ag. Inter has duæ lm, ln, communem Divisorem habent l, quarum una dividitur per l, & datæ quantitates reducuntur ad has b, df, m, ln, ag, quarum Productum $bdfmlnag$ per singulas datas divisibile esse, ex ipsa operatione sequitur.

Ubi commune signum radicale detectum est, singulæ Radices ad hoc reducuntur, si communis Index per Indicem Radicis dividatur, & quantitas sub signo elevetur ad Potestatem cujus Index est Quotiens hujus Divisionis, ut hoc ex ante explicatis (98.) sequitur. 102.

Exemplum.

$$\sqrt{ab},\ \sqrt[3]{ab^2},\ \sqrt[4]{a^3d}.$$

Reducuntur ad

$$\sqrt[12]{a^6b^6},\ \sqrt[12]{a^4b^8},\ \sqrt[12]{a^9d^3}.$$

In operationibus sequentibus ponimus Radices esse reductas ad commune signum radicale, & Multiplicationem Divisionemque, postea Additionem & Subtractionem explicabimus.

De Multiplicatione.

Radicum Multiplicatio hoc Theoremate nititur.

Productum Radicum habetur si Radix ex Producto Potestatum extrahatur. 103.

Quadrata quæcunque designare possunt aa & bb; Radices sunt a & b, & harum Productum est ab, quod detegitur si multiplicatis aa & bb ex Producto $aabb$ Radix quadrata ab extrahatur. Nec diversa est Demonstratio si de alia Potestate agatur.

In Multiplicatione Radicum servatur signum radicale, multiplicatis quantitatibus quæ sunt sub signis. 104.

Exempla.

$$\sqrt{a} \text{ per } \sqrt{b} \text{ dat } \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a+b} \text{ per } \sqrt{a-b} \text{ dat } \sqrt{aa-bb}.$$

Si Radices per quantitates rationales multiplicentur, id est, si quantitates dentur extra signum, *hæ separatim multiplicari debent.* 105.

EXEMPLA.

$a\sqrt{b}$ per $d\sqrt{c}$ dat $ad\sqrt{bc}$

$a\sqrt{b}$ per $e\sqrt{b}$ dat $ae\sqrt{bb}$ aut aeb.

106. *Ubi de quantitatibus compositis agitur, regulæ superius traditæ* (45. 46.) *usu veniunt.*

DE DIVISIONE.

107. Cum Divisione solvatur quod Multiplicatione fuit compositum, patet *in Divisione Radicum, divisis quantitatibus quæ sunt sub signis, signum ipsum servandum esse.*

EXEMPLA.

$\sqrt{ab}$ per $\sqrt{a}$ dat $\sqrt{b}$ (35. 104.)

$ad\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$ dat $d\sqrt{c}$ (35. 105.)

108. *In quantitatibus compositis Divisio fit per partes*, ut hoc superius (55.) explicavimus.

EXEMPLUM.

$$\begin{array}{ll|l} adb + a\sqrt{fghb} - db\sqrt{df} - f\sqrt{dbgh} & & a\sqrt{b} - \sqrt{dbf} \\ -adb \qquad\qquad + db\sqrt{df} & & d\sqrt{b} + \sqrt{fgh} \\ \hline +a\sqrt{fghb} \qquad\quad -f\sqrt{dbgh} & & \\ -a\sqrt{fghb} \qquad\quad +f\sqrt{dbgh} & & \\ \hline 0 \qquad\qquad\qquad 0 & & \end{array}$$

DE RADICUM EXTRACTIONE.

109. *Radicum extractio fit, aut extrahendo Radicem ex quantitate sub signo, aut mutando Indicem signi radicalis, aut adhibito novo signo radicali.*

Radix quadrata $\sqrt[3]{aa}$ est $\sqrt[3]{a}$.

Radix quadrata $\sqrt[3]{ab}$ est $\sqrt[6]{ab}$.

Radix quadrata $a + \sqrt{bd}$ est $\sqrt{a + \sqrt{bd}}$.

Alia quæ circa has Extractiones observari possunt altioris sunt indaginis.

DE ADDITIONE ET SUBTRACTIONE.

110. *In Radicum Additione & Subtractione observanda sunt quæ de quantitatibus simplicibus & compositis fuere dicta* (14. 43. 15. 44.)

No-

Notandum vero, ſummam & aliter poſſe exprimi: nam ſumma Radicum 111.
$\sqrt{d}$ & $\sqrt{f}$ eſt quidem $\sqrt{d}+\sqrt{f}$, ſed hæc eadem ſumma eſt $\sqrt{d+f+2\sqrt{df}}$.

Differentia earundem eſt $\sqrt{d}-\sqrt{f}$, aut $\sqrt{d+f-2\sqrt{df}}$.

Demonſtratio facilis eſt, ſi ad hoc attendamus, ſummam duarum quantitatum dari, ſi Radicem quadratam extrahamus ex quadrato ſummæ. Quadratum autem quantitatis $\sqrt{d}+\sqrt{f}$ eſt $d+f+2\sqrt{df}$.

Eodem modo differentia quantitatum earundem habetur, ſi Radicem extrahamus ex quadrato differentiæ.

Simile quid circa Radices cubicas & alias indicari poſſet; ſed non magni uſus hoc foret.

Summa Radicum communicantium & aliter exprimitur, nam $a\sqrt{b}+d\sqrt{b}$ 112.
valet $\overline{a+d}\sqrt{b}$.

Utrum autem communicantes ſint Radices detegitur Multiplicatione. Si 113.
de quadratis Radicibus agatur, ex Producto quantitatum quæ ſunt ſub ſignis Radix quadrata exacte extrahi poteſt.

Sint $\sqrt{aab}$ & $\sqrt{ddb}$, Productum $aabddb$ habet Radicem quadratam abd.

Si de Radicibus cubicis agatur, quantitas una ad Quadratum elevatur, 114.
& hoc per quantitatem aliam multiplicatur, ex quo Producto Radix cubica extrahi poteſt, quando Radices communicantes ſunt.

Sint $\sqrt[3]{a^3b}$ & $\sqrt[3]{d^3b}$, Quadratum a^6bb multiplico per d^3b, & Productum $a^6d^3b^3$ habet Radicem cubicam $aadb$.

Si de Radicibus quartæ Poteſtatis agatur, ad cubum elevatur quantitas 115.
una, & cubus hic per aliam quantitatem multiplicatur.

Et in genere ſi Radicis Index ſit n, ad Poteſtatem $n-1$ elevandam eſſe 116.
quantitatem unam, ex explicatis ſatis manifeſtum eſt.

CAPUT VI.

De Proportionibus & Progreſſionibus.

Signum Æqualitatis eſt hoc $=$. Obſervavimus in primo Capite omnem 117.
quantitatum comparationem ad Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, aut Diviſionem referri.

Additio & Subtractio opponuntur, ut & Multiplicatio & Diviſio; quare 118.
ad duas claſſes commode *referuntur quæ comparationes quantitatum ſpectant.*

 Nam

Nam in duarum quantitatum comparatione, aut attendimus ad ipsarum differentiam, id est ad quantitatem uni addendam ut formetur alia; aut consideramus quomodo una in alia contineatur, id est, per quem numerum, qui & surdus esse potest, illam debeamus multiplicare, ut hanc habeamus.

Circa ambas has comparationes varia observanda sunt antequam ad generaliores regulas transeamus, quibus veritas investigatur & Problemata solvuntur.

119. *Si datis quatuor quantitatibus primarum duarum differentia æqualis sit differentiæ ultimarum, dicuntur quantitates in Proportione Arithmetica.*

120. Quod tribus punctis ∵ notatur, ut 5,7 ∵ 13,15. aut a, b ∵ c, d.

121. In omni Proportione prima & ultima quantitas vocantur EXTREMA, reliquæ dicuntur MEDIA.

122. *In* hac *Proportione Arithmetica* a, b ∵ c, d, ex natura proportionis $a-b=c-d$ (119.); si utrimque addamus $b+d$ non turbamus æqualitatem, & est $a+d=c+b$, *summa Extremorum æqualis summæ Mediorum.*

123. *Proportio Arithmetica dicitur continua, quando primus terminus cum secundo differt, quantum hic cum tertio,* ut f,g ∴ g,h; quæ proportio etiam sic exprimitur ÷ f, g, h.

124. *Progressio Arithmetica vocatur series quantitatum quarum immediate sequentes æqualiter differunt*; ut 6, 9, 12, 15, 18; hæc designatur hoc eodem signo ÷; ut ÷ a, b, c, d, e, f, g.

125. Hæc eadem Progressio, si differentia inter terminos vicinos sit n, & secundus primum excedat, sic potest exprimi;

÷ a, $a+n$, $a+2n$, $a+3n$, $a+4n$, &c.

& videmus quomodo, *datis duobus primis terminis, terminus quicunque detegitur*; decimus ex gr. est $a+9n$.

In memorata Progressione habemus proportiones has, a,b ∵ f,g, & b,c ∵ e,f ut & c, d ∵ d, e: ex his deducimus $a+g=b+f=c+e=2d$, (122.) ergo $a+b+c+d+e+f+g=3\frac{1}{2} \times \overline{a+g}$: unde generalem formamus regulam.

126. *Summam Progressionis Arithmeticæ valere Productum summæ, primi & ultimi termini, per dimidium numeri terminorum.*

127. Quantitatum comparatio alia de qua loquuti sumus (118.), Divisione determinatur; Quotiens enim exprimit quomodo quantitas in alia quantitate contineatur, & relatio hæc vocatur RATIO.

128. Deteginius rationem quæ datur inter a & b si a per b dividamus, & Quotiens vocatur EXPONENS Rationis.

129. Primam quantitatem per secundam dividimus, ut Ratio determinetur; $\frac{a}{b}$ est Exponens Rationis inter a & b; contra $\frac{b}{a}$ est Exponens Rationis b ad a.

Pri-

Primus terminus Rationis ANTECEDENS vocatur, ſecundus CONSEQUENS dicitur. 130.

Ratio eo major dicitur, quo Exponens majus eſt, & vice verſa. 131.

Rationes æquales dicuntur ſi Exponentia fuerint æqualia; in hoc enim caſu Conſequens utrumque eodem modo in ſuo Antecedente continetur. 132.

Quatuor quantitates, quarum prima habet ad ſecundam eandem rationem, quam habet tertia ad quartam, dicuntur in Proportione Geometrica, aut ſimpliciter Proportionem formare. 133.

Hæc eſt nota :: hujus Proportionis. 134.

$$a, b :: c, d,$$

ſignificat a ſe habere ad b, ut c ad d.

Quare diviſo a per b, Quotiens non differt a Quotiente qui habetur diviſo c per d (127.), id eſt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Si quantitatem utramque multiplicemus per bd, habemus $ad=bc$; unde ſequitur *in omni Proportione Productum Extremorum æquari Producto Mediorum.*

Inverſa hujus Propoſitionis etiam vera eſt; *Quantitates eſſe proportionales ſi Productum Extremorum æquale ſit Producto Mediorum.* 135.

Si $fg=hl$, dico $f, h :: l, g$.

Si enim utramque quantitatem dividamus per gh, habemus $\frac{f}{h}=\frac{l}{g}$, quod æqualitatem Rationum f ad h, & l ad g, demonſtrat.

Ex una Proportione variæ formari poſſunt. 136.

Sit	$a, b :: c, d.$
Invertendo	$b, a :: d, c.$
Alternando	$a, c :: b, d.$
Componendo	$a+b, b :: c+d, d.$
Dividendo	$a-b, b :: c-d, d.$
Convertendo	$a, a\pm b :: c, c\pm d.$

In his agitur ſemper de prima Proportione $a, b :: c, d$.

Proportiones has omnes dari clarum eſt (135.); Productum enim Extremorum valere Productum Mediorum ſimplici multiplicatione patet, ſi ad hoc attendamus dari in prima proportione $ad=bc$ (134.)

Eodem modo probamus, datis duabus Proportionibus quibuscunque, ut 137.

$$a, b :: c, d,$$
$$f, g :: h, l,$$

 hanc

hanc aliam multiplicatione formari

$$af,\ bg :: ch,\ dl.$$

138. Si eadem Ratio locum habeat in utraque Proportione, erit etiam

$$a+f,\ b+g :: c+h,\ d+l.$$

139. *Rationem inter duas quantitates non mutari, multiplicatis aut divisis his per eandem quantitatem*, ex Theoremate ante demonstrato sequitur (66.)

140. *Si dentur variæ Rationes æquales, summa Antecedentium se habet ad summam Consequentium, ut Antecedens unum ad suum Consequens.*

Sint $a,\ b :: c,\ d :: e,\ f :: g,\ h :: i,\ l.$
Altern. $a,\ c :: b,\ d.$
Comp. $a+c,\ c :: b+d,\ d.$
Alt. $a+c,\ b+d :: c,\ d :: e,\ f.$
Alt. $a+c,\ e :: b+d,\ f.$
Comp. $a+c+e,\ e :: b+d+f,\ f.$
Alt. $a+c+e,\ b+d+f :: e,\ f.$

Eodem modo continuando patebit

$$a+c+e+g+i,\ b+d+f+h+l :: i,\ l, \text{ aut } a \text{ ad } b.$$

141. *Si sint duo Ordines quantitatum; & prima sit ad secundam in primo Ordine, ut prima ad secundam in secundo Ordine; & ut secunda ad tertiam in primo, sic secunda ad tertiam in secundo Ordine; & sic de reliquis: erit summa omnium quantitatum in primo Ordine ad summam secundi Ordinis, ut quantitas quæcunque in primo ad respondentem in secundo.*

Sit $a,\ b,\ c,\ d,$ primus Ordo.
$f,\ g,\ h,\ i,$ secundus.
$a,\ b :: f,\ g;$
$b,\ c :: g,\ h;$
$c,\ d :: h,\ i;$

Ergo Alternando

$$a,\ f :: b,\ g :: c,\ h :: d,\ i;$$

&

$$a+b+c+d,\ f+g+h+i, :: a,\ f,\ (140.)$$

Ratio dicitur inversa alius, quando Antecedens unius se habet ad suum Consequens, ut alterius Consequens ad suum Antecedens; & quantitas mutabilis inversam alius sequi Rationem dicitur, quando minuitur illa ut augetur hæc, & vice versa.

142. *Datis variis quantitatibus, aliæ quæ sunt inverse ut hæ deteguntur, si ea-*

I dem

dem quantitas per singulas dividatur; $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, sunt respective inverse ut a, b, c: nam $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ :: b, a (135.); ut patet, facta Extremorum & Mediorum multiplicatione.

Tres quantitates in continua Proportione dicuntur, si prima se habeat ad secundam, ut hæc ad tertiam. 143.

Hæc est hujus Proportionis nota $\div\!\!\!\cdot\,$. 144.

$\div\!\!\!\cdot\ a, b, c$, significat $a, b :: b, c$, &
$\div\!\!\!\cdot\ a, b, c, d, e, f, g$, designat
$a, b :: b, c :: c, d :: d, e :: e, f :: f, g$.

Quæ quantitates dicuntur in PROGRESSIONE GEOMETRICA. 145.

Hujus hæc est proprietas, *summam omnium terminorum, demto ultimo, se habere ad eandem summam, demto primo termino, ut primus terminus ad secundum* (140). 146.

Ratio ex aliis Composita dicitur si hæ simul locum habeant. Ex. gr. si a sit dupla ipsius b, & c tripla d; si nunc f sit & dupla & tripla g, id est, bis tripla, aut ter dupla, nempe sextupla, erit Ratio hæc ultima composita ex præcedentibus. 147.

Exponens Rationis compositæ est Productum Exponentium Rationum componentium. 148.

Unde deducimus *datis Rationibus*, ut a ad b, c ad d, & f ad g, *quantitates detegi in Ratione composita ex his, si Antecedentia & Consequentia multiplicentur*; Rationis acf ad bdg Exponens est $\frac{acf}{bdg}$, Productum trium Exponentium præcedentium Rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$. 149.

Ratio composita ex duabus Rationibus æqualibus, duplicata dicitur. 150.

Triplicata Ratio est quæ componitur ex tribus Rationibus æqualibus, & sic de cæteris. 151.

CAPUT VII.

Generalia de Problematibus.

Problemata sunt Quæstiones solvendæ (11).

SOLUTIO Problematis est responsum ad quæstionem, aut *determinatio quantitatum quæsitarum.* 152.

Idem

153. Idem Problema varias sæpe habet Solutiones, unde distinctio Problematum.

154. *Indeterminata sunt quorum Solutiones innumeræ sunt.*

Ex. gr. si quærantur duo Numeri quorum Productum sit 24. Problema erit indeterminatum; quia non determinatur Solutionum numerus; si enim 24. per numerum quemcunque ad libitum dividamus, habebimus in Quotiente numerum, qui cum Divisore Quæstioni respondet.

155. *Determinata Problemata sunt, quæ determinatum numerum Solutionum habent.*

156. *Illa quorum unica est Solutio unius dimensionis dicuntur.*

Tale est hoc.

Quæruntur duo numeri quorum summa est 22. & differentia 6. Resp. 14. & 8. & nulla alia datur Solutio.

157. *Duarum dimensionum dicuntur Problemata quando Solutiones dantur duæ.* Ex. gr.

Quæritur numerus, cujus quadratum plus sex, valeat ipsum numerum quæsitum, multiplicatum per 5. Resp. 2. vel 3. & nulla datur Solutio alia.

158. *Trium dimensionum est Problema* hoc.

Quæritur numerus quo multiplicato per 11., *si* Producto addatur Cubus *ipsius* numeri, summa valeat sexies Quadratum numeri quæsiti plus sex. *Tres* hujus Problematis *sunt Solutiones*, & numerus quicunque ex his 1. 2. 3. conditionibus Problematis satisfacit, & nullus alius.

159. Eodem modo altiores *dimensiones ex numero Solutionum determinantur.*

De Problematibus unius & duarum dimensionum tantum agam.

160. *Problemata omnia æquationibus solvuntur.*

161. Duæ *Quantitates æquales signo æqualitatis junctæ vocantur Æquatio.* Hæc tot dicitur dimensionum, quot dimensiones habet Potestas altissima incognitæ in hac ipsa.

162. Regulis, quas in capite sequenti indicamus, Problemata determinata reducuntur ad unicam Æquationem, quæ unicam incognitam habet; vocatur hæc ÆQUATIO SOLITARIA.

163. In indeterminatis Problematibus Æquatio hæc ultima duas aut plures continet incognitas, quæ, unica excepta, ad libitum determinantur, ita ut unica incognita tantum in Æquatione Solitaria supersit.

164. In Æquatione Solitaria incognita a cognitis ita separari debet, ut sola detur illa in uno membro Æquationis, id est ad unam partem signi æqualitatis, dum in alio membro solæ cognitæ dantur. Vocatur hoc REDUCTIO Æquationis, si agatur de Æquatione unius dimensionis; in aliis casibus SOLUTIO Æquationis vocatur.

165. *Æquatio Solitaria tot habet dimensiones quot* dimensiones aut *Solutiones habet Problema:* ipsam Propositionem, & in quibus casibus exceptio detur, in sequentibus demonstrabimus.

Quan-

Quantum tamen ad Solutionem Problemata quædam, in quibus in Æquatione Solitaria incognita duas habet Dimensiones, ad Problemata unius Dimensionis, & alia in quibus incognita quatuor habet Dimensiones, ad Problemata duarum Dimensionum, referuntur. 166.

Sit x incognita, dentur a & b, $xx + bb = dx$ est Æquatio duarum Dimensionum, & duo valores ipsius x conditionibus hujus Æquationis satisfaciunt. 167.

Sed $xx = ab$ ad Problemata unius Dimensionis refertur, & simplici Extractione Radicis detegitur valor ipsius x; nam $x = \sqrt{ab}$. Problema autem quod ad hanc reducitur Æquationem $xx = ab$, duas tamen habere Solutiones clarum est; nam non modo habemus $x = \sqrt{ab}$; sed & $x = -\sqrt{ab}$.

Problemata autem talia ad primam Dimensionem referuntur, quia iisdem regulis cum his solvuntur, & casus hic semper extat quando eadem quantitas affirmata & negata conditionibus Problematis respondet. 168.

De Æquationibus quatuor Dimensionum, quæ ad duas referuntur, agam in Capite X.

CAPUT VIII.

De Regulis quibus Problemata solvuntur.

Reductio Æquationis est separatio quantitatis unius a reliquis ita, ut sola in uno membro detur; in quo casu necessario valor ipsius, aliis quantitatibus expressa, in alio membro continetur. 169.

Observandum autem æqualitatem non tolli multiplicatis, aut divisis ambobus membris per eandem quantitatem, etiam addita aut subtracta utrimque eadem quantitate.

Unde sequitur, *quantitatem quamcunque ex uno membro in aliud mutato signo posse transferri*, tollendo utrimque quantitatem affirmatam, & contra addendo quantitatem negatam. 170.

De Reductione Æquationum.

Regula I.

Si quantitas separanda in Fractione detur, per Denominatorem hujus integra Æquatio multiplicari debet. 171.

Quod etiam ad plures Fractiones applicari debet.

REGULA II.

172. *Omnes quantitates in quibus quantitas ſeparanda datur, in unum membrum colligendæ ſunt, tranſlatis omnibus aliis in membrum oppoſitum.*

Tranſlatio ut obſervavimus fit mutatis ſignis (170).

REGULA III.

173. *Per quantitatem, aut ſimplicem aut compoſitam, quæ ſeparandam quantitatem multiplicat, membrum utrumque dividi debet.*

Hæ tres Regulæ in Æquationibus unius Dimenſionis, de quibus hic agimus, plerumque ſufficiunt; aliquando tamen hæc quarta uſu venit.

REGULA IV.

174. *Si ſeparanda quantitas ſigno radicali involuta ſit, ante omnia hoc tollendum eſt, ſeparando per Regulas præcedentes quantitatem, quæ ſigno radicali afficitur, ab aliis ita ut ſola in uno membro detur, & elevando utrumque membrum ad Poteſtatem, de cujus Radice agitur.*

REGULA V.

175. *Si non ipſa quantitas, ſed Poteſtas aliqua ipſius ſeparata fuit, ex utroque membro Radix hujus Poteſtatis extrahenda eſt.*

EXEMPLUM.

$$a + \frac{\sqrt{axx + fxx + d^3}}{\sqrt{g}} = b$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{axx + fxx + d^3}}{\sqrt{g}} = b - a \\ \dfrac{axx + fxx + d^3}{g} = bb - 2ba + aa \end{array}\right\} \text{Reg. 4.}$$

$$axx + fxx + d^3 = gbb - 2gab + gaa. \qquad \text{Reg. 1.}$$

$$axx + fxx = gbb - 2gab + gaa - d^3. \qquad \text{Reg. 2.}$$

$$xx = \frac{gbb - 2gab + gaa - d^3}{a + f}. \qquad \text{Reg. 3.}$$

$$x = \frac{\sqrt{gbb - 2gab + gaa - d^3}}{\sqrt{a + f}}. \qquad \text{Reg. 5.}$$

DE

DE REDUCTIONE VARIARUM ÆQUATIONUM AD UNICAM, AUT DE QUANTITATUM EXTERMINATIONE.

REGULA VI.

Duas Æquationes ad unicam reducimus cum unius quantitatis ſublatione, ſeparando per Regulas præcedentes hanc ita in una Æquatione, ut ſola in uno membro detur, & ſubſtituendo valorem in alia Æquatione. 176.

EXEMPLUM.

Dentur Æquationes

$$ax + dy = fg$$
$$afx + ddx = ffy.$$

Prima reducitur ad hanc

$$y = \frac{fg - ax}{d}$$

ſubſtituendo in ſecunda Æquatione pro y valorem $\frac{fg - ax}{d}$, habemus Æquationem hanc, in qua y non datur,

$$afx + ddx = \frac{f^3g - ffax}{d}:$$

quæ ad hanc reducitur

$$dafx + d^3x = f^3g - ffax.$$

REGULA VII.

Etiam *tollitur quantitas conferendo ejusdem valores duos.* 177.

EXEMPLUM.

Sint eædem Æquationes

$$ax + dy = fg$$
$$afx + ddx = ffy.$$

Separando y per Regulas Reductionis habemus

$$y = \frac{fg - ax}{d}$$

$$y = \frac{afx + ddx}{ff}$$

$$\text{Ergo } \frac{afx + ddx}{ff} = \frac{fg - ax}{d}$$

quæ Æquatio multiplicatione per ffd dat eandem, quam per Regulam VI. habuimus

$$dafx + d^3x = f^3g - ffax.$$

Regula VIII.

178. *Quando plures dantur Æquationes, utraque methodo Reg.* VI. *&* VII. *numerus Æquationum unitate minuitur, & quantitas una tollitur.*

Per Reg. VI. Quærendo valorem quantitatis exterminandæ in una Æquatione, & ipsum in aliis loco ejusdem quantitatis substituendo.

Per Reg. VII. Quærendo valorem ejusdem quantitatis in omnibus Æquationibus in quibus datur, & hos valores conferendo.

Regula IX.

179. *Minuendo iterum atque iterum Æquationes superstites, hac eadem Methodo, tandem ad unicam proveniemus Æquationem.*

Exemplum.

$$
\begin{array}{ll}
x + y + z = a & x = a - y - z \\
x + y + u = b & \\
x + z + u = c & \\
y + z + u = d & \\
\hline
a - z + u = b & z = a + u - b \\
a - y + u = c & \\
y + z + u = d & \\
\hline
a - y + u = c & y = a + u - c \\
y + a + 2u - b = d & \\
\hline
2a + 3u - c - b = d &
\end{array}
$$

Applicationem Methodi secundæ huic eidem Exemplo adjicimus.

$$
\begin{array}{ll}
x + y + z = a & x = a - y - z \\
x + y + u = b & x = b - y - u \\
x + z + u = c & x = c - z - u \\
y + z + u = d & \\
\hline
a - z = b - u & z = a - b + u \\
a - y = c - u & \\
y + z + u = d & z = d - y - u \\
\hline
a - b + u = d - y - u & y = d - 2u - a + b \\
a - y = c - u & y = a - c + u \\
\hline
d - 2u - a + b = a - c + u. &
\end{array}
$$

Me-

Methodi expositæ locum tantum habere possunt, quando quantitates exterminandæ unicam tantum habent dimensionem; adjiciam idcirco Regulas sequentes duas.

REGULA X.

Ex Æquationibus, in quibus exterminanda quantitas plures Dimensiones habet, aliæ Æquationes formantur ex diversis valoribus inter se comparatis altissimæ Potestatis quantitatis tollendæ. 180.

Hi valores ope Regularum, circa Reductiones traditarum, eliciuntur.

REGULA XI.

Quando vero Potestas altissima in duabus Æquationibus non eadem est, per quantitatem exterminandam, aut aliquam ejusdem Potestatem, Æquatio una multiplicari debet. 181.

EXEMPLUM.

Quæruntur duæ Æquationes in quibus x non habetur, datis,

$$axx + byx = yyz.$$
$$dxx + fzx = aaz.$$
$$cxx + ddy = ffz.$$

$$xx = \frac{yyz - byx}{a}$$
$$xx = \frac{aaz - fzx}{d}$$
$$xx = \frac{ffz - ddy}{e}$$

Ex hisce tribus valoribus quadrati xx, duas elicimus Æquationes

$$\frac{yyz - byx}{a} = \frac{aaz - fzx}{d}.$$
$$\frac{aaz - fzx}{d} = \frac{ffz - ddy}{e}.$$

Tertia enim, quæ ex his duabus formari potest, non pro nova Æquatione haberi debet.

Tribus tamen indigemus Æquationibus; quia duæ desiderantur superstites post exterminatam quantitatem x.

Adhibita una ex his ultimis Æquationibus, quæro valorem xx, & ipsum comparo cum uno ex tribus præcedentibus valoribus.

Prima Æquatio ex duabus ultimis dat

$$x = \frac{dyyz - a^3z}{dby - afz}.$$

Multiplicando per x Æquationem, datur

$$xx = \frac{dyyzx - a^3zx}{dby - afz} = \frac{ffz - ddy}{e}$$

Sublatis multiplicatione Fractionibus, habemus has tres Æquationes, ex quibus Methodis explicatis (176. 177.) tollitur x, ipsas ad duas reducendo.

$$dyyz - dbyx = a^3z - afzx$$
$$ea^2z - efzx = dffz - d^3y.$$
$$edy^2zx - ea^3zx = dbfyz - d^3byy - af^3z^2 + afddzy$$

De Problematum Solutionibus.

Regula XII.

182. *Problema abstracte considerandum est.*

Omnem Quæstionem, quæ de quantitatibus peculiaribus proponi potest, & ad alias quantitates posse applicari, clarum est; ideoque & solutionem in aliis illis casibus locum habere patet: hac de causa ex Quæstione removendum omne quod in solutione non necessario considerari debet. Ex. gr. hæc proponitur Quæstio.

Aliquis interrogatus quot annos haberet, respondet: si ex triplicato annorum numero subtraham sedecim, numerus supra centum excrescet, quantum infra centum subsistit annorum numerus.

In hoc Problemate non considero utrum quis interrogatus sit nec ne; non quæro an agatur de annis, aut de aliis quantitatibus; sed juxta hanc Regulam 1. reduco Problema ad hoc.

Quæritur numerus ex cujus triplo si subtrahatur sedecim, reliquum superet centum, quantum centum excedit ipsum numerum quæsitum.

Regula XIII.

183. *Quod aliunde notum est circa Quæstionem, in subsidium vocandum.*

Exemplo illustrabo Regulam. Rex Syracusius Hiero Archimedem rogavit quantum argenti daretur permixtum in Corona aurea; pertractari hæc & examinari quidem potuit; sed integra servanda erat.

Quis non videt ni quid aliunde in subsidium vocetur, Problema solvi non posse. Sed volumen coronæ cum voluminibus ponderum æqualium Auri & Ar-

Argenti comparavit, immergendo corpora hæc aquæ, & aquam effluentem, repleto ante immersionem vase, mensurando. Ex notis voluminibus computationem inivit. Aliam ejusdem Problematis solutionem damus. Vide Prob. 39.

Regula XIV.

Quantitates quæ in conditionibus Problematis memorantur, litteris exprimi debent. 184.

Observandum magni usus esse, quod superius notavimus de distinctione litterarum, quibus cognitæ & incognitæ designantur (13.)

Regula XV.

Conditiones Problematis ad Æquationes revocandæ sunt. 185.

Conditiones Problematis continent aut æqualitatem inter quantitates, id est, Æquationem; aut quantitatum relationes, ex quibus etiam Æquationes formantur (122. 134.)

Ut Problema sit determinatum, desideratur determinatio omnium incognitarum, id est, tot requiruntur determinationes, quot dantur incognitæ. In singulis conditionibus unica continetur determinatio, & singulæ conditiones dant Æquationem. Ergo Problema determinatum non est nisi tot dentur conditiones, ideoque Æquationes, quot dantur incognitæ.

Recula XVI.

Regulis præcedentibus Æquationes ad Solitariam revocandæ sunt; quæ ipsa reducenda aut solvenda est. 186.

CAPUT IX.

De usu Regularum in Problematibus unius Dimensionis, & vitandis difficultatibus quibusdam, quæ in Solutionibus sæpe occurrunt.

Explicatis Regulis, quibus veritas in Mathematicis detegitur, ipsarum usus exemplis illustrari debet.

Cum etiam difficultates sæpe occurrant, quarundam causas indicabo, & quomodo aliquando vitari possint dicam.

PRO-

PROBLEMA I.

187. *Mercatores duo singuli æqualem summam expendunt; lucratur primus 126 fl. secundus amittit 87 fl & est nunc summa primi dupla summæ secundi. Quæritur summa, quam singuli expenderunt.*

Abstracte si juxta Reg. 12. (182.) consideretur Problema, ad hoc reducitur.

Detegere numerum cui si addatur 126., si ex eodem numero primo tollatur 87., summa Additionis dupla sit residui Subtractionis.

Dicatur x summa quæsita, conditio Problematis est hæc $x + 126$. valet bis $x - 87$; ergo

$$x + 126 = 2x - 174.$$
$$300 = x.$$

Si autem universalissimam desideremus solutionem, dicatur a lucrum, & b damnum.

$$x + a = 2x - 2b$$
$$a + 2b = x$$

Unde videmus quomodocunque mutetur lucrum, aut damnum, summam lucri & duplicati damni valere summam primam.

PROBLEMA II.

188. *Operarius accepta mercede quinque septimanarum cum florenis 6., continuat opus per septimanas duas, percipit se tantum acceptæ pecuniæ quartam partem superstitem habere, accepta autem mercede duarum ultimarum septimanarum numerat in reposito florenos 21. Quæritur merces unius septimanæ.*

Per Reg. 12. (182.) Problema ad hoc reducitur. *Detegere numerum quo multiplicato per 5. & producto addito 6. summaque divisa per 4. si quoto bis addatur ipse numerus, aggregatum sit 21.*

Dicatur x numerus quæsitus, hoc multiplicato per 5. dat $5x$, addito 6. habemus $5x + 6$, dividatur per 4, $\frac{5x + 6}{4}$, addatur bis x, & summa valebit 21. id est

$$\frac{5x + 6}{4} + 2x = 21.$$
$$5x + 6 + 8x = 84.$$
$$13x = 78.$$
$$x = 6.$$

PRO-

Problema III.

Quinque ulnæ panni conſtant fl. $17\frac{1}{2}$. *Quær. quantum conſtant ulnæ* 14. 189.

Dicatur x pretium quæſitum; clarum eſt 5. ſe habere ad 14., ut $17\frac{1}{2}$. ad numerum florenorum quæſitum: ergo.

$$5,\ 14 :: 17\tfrac{1}{2},\ x.$$
$$5x = 14 \times 17\tfrac{1}{2}.\ (134.)$$
$$x = \frac{14 \times 17\frac{1}{2}}{5} = 49.$$

Ex hac ſolutione generalem ducimus regulam; *datis tribus terminis primis Proportionis geometricæ, quartum detegi, ſi ſecundus per tertium multiplicetur, & productum per primum dividatur.* Quæ Regula, propter uſum ſuum maximum, aurea dicta fuit; etiam vocatur Regula trium, aut Regula Proportionum. 190.

Problema IV.

Mercator mutuam accepit pecuniam & pollicitus eſt uſuras 5. per annum ad centum. Quær. quantum debeat pro uſuris poſt ſeptem menſes, ſi acceperit ſummam 665. 191.

Clarum eſt uſuras ſequi rationem temporis, ut & ſummæ, id eſt uſuræ ſunt in ratione compoſita ex his. Idcirco

Quæritur numerus qui ſit ad 5, in ratione compoſita ſeptem menſium ad duodecim menſes, id eſt in ratione 7 ad 12, & in ratione 665 ad 100. Ergo ſi x ſint uſuræ quæſitæ,

$$12 \times 100, 7 \times 665 :: 5,\ x\ (149.)$$
$$x = \frac{5 \times 7 \times 665}{12 \times 100} = 19\tfrac{19}{48}.$$

Problema V.

Mercatores tres in ſocietate lucrati ſunt 1560. *flor. Primus contulerat* 2000. *flor. & poſt annum nummos recuperavit; ſecundus contulit* 660. *flor. per ſeptem menſes, & tertius* 1255. *per menſes quinque. Dividendum eſt lucrum.* 192.

Manifeſtum eſt lucrum pro ratione temporis & pecuniæ collatæ dividendum eſſe; idcirco problema ad hoc reducitur.

Dividere 1560. in tres partes, quæ ſint inter ſe ut 2000×12, 660×7, 1255×5,

Sint partes hæ x, y, z. Habemus duos ordines quantitatum, quarum illæ, quæ in primo ordine ſunt, ſequuntur rationem illarum quæ ſecundum ordinem formant. Habemus præterea ſummas utriuſque ordinis, nam $x + y + z = 1560.$ &

$$2000 \times 12 + 660 \times 7 + 1255 \times 5 = 34895.$$

Ergo (141.)

$$34895,\ 1560 :: \begin{cases} 2000 \times 12 = 24000, x \\ 660 \times 7 = 4620, y \\ 1255 \times 5 = 6275, z; \end{cases}$$

& tribus regulis proportionum incognitæ determinantur.

PROBLEMA VI.

193. *Dato primo secundo & ultimo termino Progressionis geometricæ; Quæritur summa.*

Sit a terminus primus; b secundus; d ultimus; x summa: habemus

$$a, b :: x - d, x - a \text{ (146.)}$$
$$bx - bd = ax - aa.$$
$$x = \frac{bd - aa.}{b - a.}$$

PROBLEMA VII.

194. *Summa annorum Johannis, Jacobi, Petri, & Pauli est 98. annorum. Anni Pauli habentur, si ex summa annorum Petri & Johannis tollamus undecim. Anni Pauli, demtis annis Jacobi, additis tribus, æquant Annos Petri. Tandem anni Johannis tribus deficiunt a semisse summæ annorum Petri & Pauli. Quær. Quot annos singuli vixerint.*

Sit u numerus annorum Johannis; x Jacobi; y Petri; z Pauli.

Conditiones Problematis abstracte consideratæ, & algebraice expressæ, dant æquationes has

$$u + x + y + z = 98.$$
$$u + y - 11. = z.$$
$$z - x + 3. = y. \qquad x = z - y + 3.$$
$$y + z = 2u + 6.$$

$$u + 2z = 95.$$
$$u + y - 11. = z. \qquad y = z - u + 11.$$
$$y + z = 2u + 6.$$

$$u + 2z = 95. \qquad 2z = 95. - u$$
$$2z + 5. = 3u.$$

$$100. = 4u. \qquad u = 25.$$

Ergo

$$2z = 95 - u = 70. \qquad \& \ z = 35.$$
$$y = z - u + 11 = 21.$$
$$x = z - y + 3 = 17.$$

O B.

OBSERVATIO I.

Sæpe autem Æquationes Problematis ad unicam facilius reducuntur quam Methodis N°. 178. & 179. Sed cum hoc pendeat a peculiari Æquationum relatione, quæ in infinitum variari potest, faciliores, aut magis simplices & elegantiores, Problematum solutiones, quæ a peculiari hac relatione pendent, ad regulas fixas revocari non possunt. Notare tamen debemus Additione aut Subtractione duarum Æquationum sæpe formari Æquationem simpliciorem; ad quam in multis occasionibus etiam pervenimus, si valores duos ejusdem quantitatis compositæ inter se conferamus; sæpe hisce solis operationibus incognitæ quædam exterminantur, ut in exemplis duobus sequentibus. 195.

PROBLEMA VIII.

Duæ quæruntur quantitates quarum summa & differentia dantur. 196.

Sint quantitates x & y; summa dicatur a, differentia b. Æquationes sunt

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$

Additis Æquationibus habemus

$$2x = a + b$$

Subtracta secunda ex prima datur

$$2y = a - b$$

PROBLEMA IX.

Trianguli rectanguli datur Peripheria 80; *& area* 240. *Qu. Hypotenusa.* 197.

Sint latera x, y, z; Hypotenusa est x; Æquationes datæ sunt

$$x + y + z = 80.$$
$$yz = 480.$$

Quibus quia de Triangulo rectangulo agitur addenda hæc tertia est,

$$yy + zz = xx.$$

Si Æquatio secunda multiplicetur per 2. & tertiæ addatur, habemus

$$yy + 2yz + zz = xx + 960.$$

Prima Æquatio dat

$$y + z = 80 - x$$

Quadrata membrorum sunt æqualia

$$yy + 2yz + zz = 6400 - 160x + xx.$$

Ergo

$$xx + 960 = 6400 - 160x + xx$$
$$160x = 5440$$
$$x = 34.$$

OBSERVATIO II.

198. Sæpe operationes longæ & difficiles vitari possunt; quærendo non ipsas quantitates, quæ desiderantur, sed alias quarum ope illæ deteguntur.

Hoc in omnibus illis occasionibus locum habet in quibus duæ incognitæ eodem modo sese habent in omnibus Æquationibus, in quibus dantur.

Ex gr. Quæruntur duo numeri quorum summa sit a & productum b. Si numeri dicantur x & y, Æquationes probl. sunt

$$z + u = a$$
$$zu = b$$

Clarum est, in hisce Æquationibus z non magis designare majorem numerum quam minorem; ideò duplicem in solutione necessario habebit valorem. Eodem modo si dato producto etiam summa detur quadratorum, & in innumeris aliis problematibus. In hisce omnibus occasionibus, quamvis problema unicam tantum habeat solutionem, ad hanc non possumus pervenire nisi problema duarum dimensionum solvatur.

199. In omnibus tamen occasionibus in quibus ex hac sola causa problema ad duas dimensiones adscendit, ut plerumque quando in hisce casibus Æquationes non admodum sunt compositæ, problema ad unicam dimensionem revocatur, quærendo summam & differentiam illarum incognitarum quæ eandem relationem habent, quibus datis ipsas quantitates dari vidimus (196.). Incidimus tamen semper in casum n. 166., quantum ad incognitam quæ differentiam exprimit; quia incognitæ valorem possunt habere negativum, sed necessario hic æqualis est positivo.

Si Ex. gr. summa duarum quantitatum dicatur $2x$, & differentia $2y$: major quantitas erit $x+y$ & minor $x-y$, si y sit quantitas positiva; contrarium obtinet si y sit quantitas negativa. Ponamus $x=7$ & $y=3$ tunc $x+y=10$, & $x-y=4$; sed si $y=-3$, erit $x+y=4$, & $x-y=10$. Ergo in solutione problematis y habet duos valores 3. & -3. sed agitur de eadem quantitate affirmata & negata; ergo de n. 166.

Eodem modo aliquando x habebit duos valores, qui eadem quantitate affirmata & negata exprimuntur, si eædem quantitates & negatæ conditionibus problematis satisfaciant. Ut in problemate hoc.

Datis duorum numerorum producto & summa quadratorum, Quær. numeri.

In hoc problemate si numeri dicantur u & z, cum u non magis unum numerum exprimat quam alium, habet u in solutione valores duos diversos, quos eosdem valores negativos habet; quare post solutionem problematis duarum dimensionum adhucdum versamur in casu n. 166. in quem, solutione problematis unius dimensionis, incidimus, si quantitas una dicatur $x+y$, & alia $x-y$.

PROBLEMA X.

Quæruntur quantitates duæ quarum summa & productum dantur. 200.

Sit summa data $2a$; productum b; differentia sit $2y$.

Quantitates quæsitæ sunt $a+y$ & $a-y$ (199.) quarum productum est $aa-yy$.

$$b = aa - yy$$
$$yy = aa - b$$
$$y = \sqrt{aa-b}$$

PROBLEMA XI.

Quæruntur quantitates duæ quarum productum, & summa Quadratorum datur. 201.

Sit productum $2a$, & summa Quadratorum $4b$.

Dicantur quantitates $x+y$; $x-y$. Productum est $xx-yy$; quadrata sunt $xx+2xy+yy$ & $xx-2xy+yy$. Ergo

$$xx - yy = 2a.$$
$$xx + yy = 2b.$$

Additis Æquationibus, & subtracta prima ex secunda, habemus.

$$2xx = 2a + 2b$$
$$2yy = 2b - 2a$$
$$x = \sqrt{a+b}$$
$$y = \sqrt{a-b}$$

PROBLEMA XII.

Quæruntur tres quantitates in continua Proportione, quarum summa & summa Quadratorum datur. 202.

Summa quantitatum est a; summa Quadratorum b.

Sint quantitates $\div s, u, z$.

Conditiones sunt

$$s + u + z = a.$$
$$ss + uu + zz = b.$$
$$sz = uu, \text{ propter continuam Proportionem}$$

In hisce s & z eodem modo reperiuntur in omnibus Æquationibus; ideo ut ad unicam Dimensionem revocemus Problema, dicuntur hæ $x+y=s$ & $x-y=z$ (199.), & hæc est Proportio quæsita;

$$\div x+y,\ u,\ x-y.$$

Et Æquationes ſunt

$$1^a.\quad 2x + u = a.$$
$$2^a.\quad 2xx + 2yy + uu = b.$$
$$3^a.\quad xx - yy = uu.$$

Si in ſecunda Æquatione pro uu ſcribatur ipſius valor, habemus

$$3xx + yy = b.$$

Addita Æquatione tertia

$$4xx = b + uu$$
$$\text{in } 1^a.\quad 2x = a - u$$
$$\text{Idcirco } 4xx = aa - 2au + uu = b + uu$$
$$aa - 2au = b$$
$$u = \frac{aa - b}{2a} = \tfrac{1}{2}\, a - \frac{b}{2a}$$
$$\text{Ergo in } 1^a.\quad 2x = a - u = a - \frac{aa + b}{2a}$$
$$x = \frac{aa + b}{4a} = \tfrac{1}{4}\, a + \frac{b}{4a}$$
$$\text{in } 3^a.\quad yy = xx - uu = \frac{a^4 + 2aab + bb}{16aa} - \frac{a^4 + aab - bb}{4aa}$$
$$yy = \tfrac{10}{16}\, b - \tfrac{3}{16}\, aa - \frac{3bb}{16aa}$$
$$y = \tfrac{1}{4} \sqrt{10b - 3aa - \frac{3bb}{aa}}$$

OBSERVATIO III.

203. Magna difficultas in ſolutione Problematum ſæpe occurrit, quæ ſpectat formationem Æquationum ex conditionibus datis.

Notavimus quidem ſupra (185.) omnem conditionem Problematis dare Æquationem; ſed ſæpiſſime æqualitates, aut relationes, quæ Æquationes formare debent, non exprimuntur, quamvis in ipſis conditionibus contineantur.

In hoc caſu examinandum an non aliæ in Problemate conſiderentur quantitates, ſive cognitæ, ſive incognitæ, quæ in ipſo Problemate non exprimuntur; ſi tales dentur, litteris deſignari debent & harum ope Æquationes formari, exprimendo incognitarum inter ſe, aut cum cognitis relationes.

204. Si tales non dentur, aut non ſufficiant, examinandum an cognitæ, aut incognitæ, memoratæ in Problemate, non partes habeant, quarum relationes inter ſe, aut cum aliis quantitatibus, ex conditionibus Problematis elici poſ-

possunt. Si dentur, partes hæ, sive cognitæ, sive incognitæ, litteris exprimendæ sunt, & ex relationibus Æquationes formari debent.

PROBLEMA XIII.

Pes cubicus aquæ marinæ ponderat a; *pes cubicus aquæ pluviæ* c *pondo est; tandem pes cubicus aquæ alius salsæ pondus habet* b, *medium inter* a & c. *Quær. Pondus aquæ pluviæ addendæ pedi cubico aquæ marinæ, ut mixta æque salsa sit cum ultimum memorata.* 205.

Sit Pondus quæsitum x. Notandum volumen memorari aquæ marinæ, quæ in permixtione adhibenda est, nempe pedem cubicum; quod volumen etiam memoratur ubi determinantur pondera. Percipio etiam ejusdem aquæ volumina esse inter se ut pondera.

Ut ergo facilius ad Æquationes perveniam, dico z volumen aquæ pluviæ cujus pondus est x; voco etiam p pedem cubicum.

Habeo nunc, cum de aqua pluvia agatur,

$$p, z :: c, x.$$

Quia aquæ permixtæ pes cubicus ponderat b, datur eadem ratio inter volumen p & integrum volumen $p + z$ mixturæ, quæ datur inter pondus b & integrum pondus $a + x$ ejusdem mixturæ.

$$p, p + z :: b, a + x.$$

Unde duæ formantur Æquationes quibus Problema solvitur.

Possunt etiam hæ duæ Proportiones ad unicam reduci, & Problema ad regulam Proportionum, si attendamus ex ultima Proportione hanc deduci (136.),

$$p, z :: b, a - b + x,$$

quæ cum prima collata dat

$$c, x :: b, a - b + x.$$

Altern. Invert. & Divid. habemus (136.)

$$b - c, c :: a - b, x.$$

PROBLEMA XIV.

Tria dantur prata, æque bona, a, b, c, *in quibus herba uniformiter accrescit; boves* d, *in tempore,* e, *depascunt pratum* a; *boves* f, *in tempore* g, *depascunt pratum* b. *Quær. quot boves depascent pratum* c, *in tempore* h. 206.

Sint boves quæsiti x.

Conditiones Problematis non exprimunt relationes, ex quibus Æquationes

nes formari possunt; sed quia agitur de herba quæ est in pratis, dum boves ipsa intrant, & de herba accrescente, distinguo boves pro singulis pratis in duas partes.

Pono $d = y + z$; boves qui primam herbam depascunt sunt y, & qui herbam accrescentem depascunt, dum crescit, dicuntur z. Eodem modo pono $f = t + u$; & $x = s + r$.

Quo majus est pratum, eo major, cæteris paribus, est numerus boum. Sed quo majus est tempus, eo minor numerus boum desideratur, si de eodem gramine agatur. Ergo, seposita herba accrescente, boves sunt inter se directe ut prata, & inverse ut tempora: id est, y, t, s, sunt inter se directe ut a, b, c, & inverse ut e, g, h.

Boves qui depascunt herbam accrescentem, dum accrescit, sunt inter se ut prata, & tempus non considerandum est; id est z, u, r, sunt inter se ut a, b, c.

Hisce positis formatio Æquationum & solutio facilis est.

$$d = y + z, \ \frac{a}{e}, \ a$$

$$f = t + u, \ \frac{b}{g}, \ b$$

$$x = s + r, \ \frac{c}{h}, \ c$$

$$\frac{a}{e}, \ \frac{b}{g} :: y, \ t = \frac{eby}{ag}$$

$$\frac{a}{e}, \ \frac{c}{h} :: y, \ s = \frac{ecy}{ah}$$

$$a, \ b :: z, \ u = \frac{bz}{a}$$

$$a, \ c :: z, \ r = \frac{cz}{a}$$

Septem nunc dantur Æquationes cum septem incognitis. Substitutis in secunda & tertia pro t, s, u, r, valoribus qui in quatuor ultimis habentur, hæc tres Æquationes supersunt

$$\begin{aligned} d &= y + z \qquad\qquad y = d - z \\ agf &= eby + gbz \\ ahx &= ecy + hcz \end{aligned}$$

$$agf = ebd - ebz + gbz \qquad z = \frac{agf - ebd}{gb - eb}$$

$$ahx = ecd - ecz + hcz \qquad z = \frac{ahx - ecd}{hc - ec}$$

$agf -$

$$\frac{agf - ebd}{gb - eb} = \frac{ahx - ecd}{hc - ec}$$

$$x = \frac{acgfh - acgfe - bcedh + gbecd}{ahbg - ahbe}$$

Observatio IV.

Aliquando contingit conditiones, quibus Problema determinatur, quidem continere Æquationes, ſed in variis Æquationibus non incognitas dari. In tali caſu Æquationes uſum in exterminatione incognitarum non habent, & ſolutioni inſervire nequeunt. 207.

In his occaſionibus ante omnia ex Æquationibus datis novæ formandæ ſunt, quibus operationibus memoratæ (176. & *ſeq.*) applicari poſſunt; Æquationes ex datis neceſſario elici poſſunt, ſi, ut ponimus, contineant Problematis determinationem.

Problema XV.

Ex variis Mixtis datis novum determinatum componere Mixtum. 208.

Dentur mixta tria ex auro, argento & cupro; quantitas auri in primo eſt a, in ſecundo b, in tertio c; quantitas argenti in primo eſt d, in ſecundo e, in tertio f; quantitas cupri in primo eſt g, in ſecundo h, in tertio i. Componendum eſt mixtum in quibus aurum eſt l, argentum m, & cuprum n. Determinandum quantum ex ſingulis mixtis ſumendum.

Dicatur aurum A; argentum B; cuprum C; mixtum primum M; ſecundum N; tertium O; quantitas quæſita primi mixti x; ſecundi mixti y; tertii mixti z.

Etiam, ut ſimpliciores ſint Æquationes, pono

$$a + d + g = o$$
$$b + e + h = p$$
$$c + f + i = q$$

Conditiones Problematis in Æquationibus ſequentibus continentur

$$aA + dB + gC = oM$$
$$bA + eB + hC = pN$$
$$cA + fB + iC = qO$$
$$lA + mB + nC = xM + yN + zO$$

Sola Æquatio ultima incognitas continet; aliæ ergo ſolutioni inſervire nequeunt, niſi ex his novæ formentur.

Eo potero pervenire, ſi ad hoc attendam; lA valere aurum quod datur in tota mixtura, id eſt, in xM, in yN, & in zO; quod aurum & aliter

poſſet exprimi, ſi non M, N, & O, in ſecundo membro quartæ æquationis darentur, ſed A, B, C.

Subſtituo ideo in quarta Æquatione pro M, N, & O, valores, quos ex tribus primis deduco, in quibus A, B, & C. habentur; & comparo aurum, argentum & cuprum in primo membro, cum eisdem metallis in ſecundo, unde pro tribus incognitis tres formo Æquationes.

Tres primæ Æquationes dant

$$\frac{aA + dB + gC}{o} = M$$

$$\frac{bA + eB + hC}{p} = N$$

$$\frac{cA + fB + iC}{q} = O$$

Et ultima mutatur in hanc

$$lA + mB + nC = \frac{xaA + xdB + xgC}{o} + \frac{ybA + yeB + yhC}{p} + \frac{zcA + zfB + ziC}{q}$$

Ex qua hæ tres eliciuntur,

$$l = \frac{xa}{o} + \frac{yb}{p} + \frac{zc}{q},\ x = \frac{opql - yboq - zcop}{apq}$$

$$m = \frac{xd}{o} + \frac{ye}{p} + \frac{zf}{q},\ x = \frac{opqm - yeoq - zfop}{dpq}$$

$$n = \frac{xg}{o} + \frac{yh}{p} + \frac{zi}{q},\ x = \frac{opqn - yhoq - ziop}{gpq}$$

Hi tres valores incognitæ x duas dant Æquationes, quæ ſimpliciores ſunt, ſi ſingulæ per pq multiplicentur & dividantur per o.

$$\frac{pql - ybq - zcp}{a} = \frac{pqm - yeq - zfp}{d}$$

$$\frac{pql - ybq - zcp}{a} = \frac{pqn - yhq - zip}{g}$$

$$y = \frac{dpql - apqm + zafp - zdcp}{dbq - aeq}$$

$$y = \frac{gpql - apqn + zaip - zgcp}{gbq - ahq}$$

Mul-

Multiplicatis his valoribus per q, & divisis per p, habemus

$$\frac{dql - aqm + zaf - zdc}{db - ae} = \frac{gql - aqn + zai - zgc}{gb - ah},$$

$$z = \frac{ahmq - aenq + dbnq - dhlq + gelq - gbmq}{ahf - aei + dbi - dhc + gec - gbf}$$

Habetur y, si in valore ipsius z, pro q scribatur p; pro c, b; pro f, e; & pro i, h.

Sed si pro q ponamus o; pro c, a; pro f, d; pro i, g; detegimus x. Si enim attente valorem ipsius z examinemus, haud difficulter percipimus solas quantitates q, c, f, i, distinguere valorem z a valoribus y & x; cum quantitates a, d, g, b, e, h, eodem modo sese habeant in valore memorato.

CAPUT X.

De Natura & Solutione Æquationum duarum Dimensionum.

Problema duarum Dimensionum duas habet solutiones (157.) & incognita duos valores; in Æquatione ergo solitaria, quæ solutionem Problematis continet, non potius unum valorem habet incognita quam alium; idcirco utrumque simul.

Ut naturam nunc determinemus Æquationum, in quibus eadem littera duas quantitates diversas designat, inquirendum in formationem talis Æquationis. 209.

Quod ut fiat considerandum omnes quantitates in Æquatione ad eandem partem signi æqualitatis posse transferri. Æquatio hæc $xx + 6 = 5x$, translatione $5x$ in hanc mutatur $xx - 5x + 6 = 0$. 210.

In hoc casu si pro x ponamus valorem ipsius, quantitates Æquationis sese mutuo destruent, quia æquales sunt 0. 211.

Demonstrandum ergo quomodo formetur Æquatio, cujus termini omnes, si ponantur ad eandem partem signi æqualitatis, sese mutuo destruant, substitutione alterutrius duarum quantitatum.

Sit $x = a$ & $x = b$, ut hos valores unica Æquatione comprehendam, pono $x - a = 0$, & $x - b = 0$. Multiplicatione nova formatur Æquatio, 212.

$$\begin{array}{r} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline -bx + ba \\ +xx - ax \\ \hline xx - bx + ba = 0 \\ -ax \end{array}$$

Si in hac Æquatione pro x ponam a aut b, termini ſeſe mutuo deſtruent. Ut hoc demonſtretur obſervandum non intereſſe, utrum poſt multiplicationem in producto pro x ponam valorem, an ante multiplicationem in quantitatibus quæ multiplicantur: clarum etiam eſt, ſeſe mutuo deſtruere quantitates producti cujuscunque formati multiplicatione per eandem quantitatem affirmatam & negatam, per $+a - a$ aut $+b - b$; tollitur enim quantitas quæ per o. multiplicatur.

Si nunc in ambabus quantitatibus $x - a$ & $x - b$ pro x ponamus a aut b, deinde multiplicemus $b - a$ per $b - b$, aut $a - b$ per $a - a$, in utroque caſu quantitates producti ſeſe mutuo deſtruent; ergo & in ipſa Æquatione.

213. Valor incognitæ vocatur RADIX *Æquationis*; & Æquationem duarum Dimenſionum duas habere Radices clarum eſt.

214. Cum autem quantitas negativa etiam littera deſignari poſſit, Radix aliquando negativa eſt; poſſunt ergo extare caſus quatuor.

1. Ambæ Radices ſunt affirmatæ. 2. Una affirmata altera negata eſt, affirmata ſuperante negatam. 3. Negata ſuperat affirmatam. 4. Ambæ negatæ ſunt.

Ut formas Æquationum determinem in hiſce quatuor caſibus, pono a ſuperare b, & $a + b = d$, & $a - b = c$, habeoque haſce quatuor formulas.

$$\begin{array}{l} x = a \\ x = b \\ \hline x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline xx - ax + ab = 0 \\ \quad - bx \\ \hline xx - dx + ab = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = a \\ x = -b \\ \hline x - a = 0 \\ x + b = 0 \\ \hline xx - ax - ab = 0 \\ \quad + bx \\ \hline xx - cx - ab = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = -a \\ x = b \\ \hline x + a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline xx + ax - ab = 0 \\ \quad - bx \\ xx + cx - ab = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = -a \\ x = -b \\ \hline x + a = 0 \\ x + b = 0 \\ \hline xx + ax + ab = 0 \\ \quad + bx \\ xx + dx + ab = 0 \end{array}$$

Vi-

Videmus quomodo, data Æquatione quacunque, possimus ex solis signis determinare, an Radices ambæ sint affirmativæ, an una affirmativa altera negata, & majorem ex his a minore distinguere. 215.

Liquet etiam in omni Æquatione duarum Dimensionum, in qua ab omnibus cognitis est separatum Quadratum incognitæ, quæ ad unam partem signi Æqualitatis tota datur, & quæ etiam disposita est juxta dimensiones incognitæ, incognitam in secundo termino multiplicari per summam Radicum mutato signo, ut & terminum ultimum continere productum Radicum servato signo. 216.

Quantitas cognita, quæ secundum terminum multiplicat, dicitur Coeficiens secundi termini.

De Solutione Æquationum duarum Dimensionum.

Regula qua ex data Æquatione Radices extrahuntur est hæc.

Posita cognita sola ad partem unam signi Æqualitatis, utrimque addatur quadratum dimidii Coeficientis secundi termini, & extrahatur Radix quadrata ex utroque membro. 217.

Totum artificium regulæ hoc est, formatur ex membro Æquationis in quo incognita datur Quadratum cujus Radix exacte potest extrahi.

E x e m p l u m.

$$xx - dx + ab = 0$$
$$xx - dx = - ab$$
$$xx - dx + \tfrac{1}{4}dd = \tfrac{1}{4}dd - ab$$
$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{1}{2}d \\ \tfrac{1}{2}d - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - ab}$$
$$x = \left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{2}d + \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - ab} \\ \tfrac{1}{2}d - \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - ab} \end{matrix}\right.$$

Clarum est ambas hasce Radices esse positivas, nam $\sqrt{\tfrac{1}{4}dd - ab}$ semper minor est $\tfrac{1}{2}d$.

Etiam liquet Radices Æquationis esse impossibiles quando ab superat $\tfrac{1}{4}dd$, tunc enim $\tfrac{1}{4}dd - ab$ est quantitas negativa, quæ Radicem quadratam habere non potest (46.) 218.

De Problematibus quæ ad Æquationes duarum Dimensionum conducunt.

Superius quædam de his Problematibus indicavimus (165.)

Extra omne dubium est in omni Problemate, quod duas habet solutiones, has contineri in Æquatione duarum Dimensionum (209. 212.) 219.

220. Etiam neceſſario in talem incidimus Æquationem, quando Problema quidem unicam tantum habet quam quærimus ſolutionem, ſed quando negata quædam quantitas, de qua minime ſolliciti ſumus, etiam conditionibus ſatisfacit; nam non potius ad poſitivam ſolutionem, quam ad hanc aliam, nos conducit Algebra; utramque ergo detegimus; ſed Radicem negativam in hoc caſu negligimus.

221. Si Problema duas tantum habeat ſolutiones negativas, quas non quærimus, perveniemus ad Æquationem duarum Dimenſionum, quamvis quantitas nulla propoſito noſtro ſatisfaciat.

222. Poſſumus etiam in Problemate omnino impoſſibili pervenire ad ſimilem Æquationem. Impoſſibilem quantitatem algebraice poſſe exprimi vidimus (218.) Si tales quantitates conditionibus Problematis algebraice expreſſis ſatisfaciant, ad Æquationem cujus Radices impoſſibiles ſunt perveniemus.

223. Caſus peculiaris datur notatu dignus; in hoc Problema unicam tantum habet ſolutionem poſitivam, ipſius tamen ſolutio conducit ad Æquationem quæ duas habet Radices poſitivas.

Contingit hoc quando Problema præter ſolutionem poſitivam & aliam negativam habet, ſed quantitas negata illa non eſt quæ habetur in Æquatione memorata.

224. Ex. gr. unicam quidem ſolutionem poſitivam habet Problema hoc; *Quæritur proportio continua, cujus primus terminus eſt* 4. *& differentia tertii & ſecundi* 3. ſolutio poſitiva hæc eſt. ∴ 4, 6, 9. Sed & datur præterea alia hæc negativa ∸ 4, — 2, 1, quam non quærimus, ſed ad quam tamen Algebra nos conducit.

225. Si ſecundum terminum dicamus y, & tertium x. Clarum eſt quando quæritur y, duos hoſce valores 6, & — 2. dari, quorum negativus rejicitur. Sed ſi quæramus x, habebimus valores 9. & 1. quorum ultimus rejiciendus eſt, quia pertinet ad proportionem, in qua datur terminus negativus, quam non quærimus.

226. *Si dato primo termino* 4 *proportionis continuæ*, *ſumma ſecundi & tertii termini eſt* 3. Ubi *tertius terminus quæritur*, eaſdem quantitates poſitivas detegimus 9. & 1. Sed nunc 9. rejici debet, qui pertinet ad proportionem quæ habet terminum negativum; ſunt enim proportiones ∸ 4, 2, 1, & ∸ 4, — 6, 9,

227. In ſolutione utriusque Problematis, ſi tertius terminus dicatur x, & hic quæratur, habemus hanc Æquationem $xx - 10x + 9 = 0$, ita ut unum Problema non poſſit ſolvi, quin & aliud ſolvamus; utraque tamen ſolutio mathematice loquendo ad utrumque Problema pertinet, ſaltem ad Problema algebraice enuntiatum.

228. In ſolutione hujus Æquationis $xx - 10x + 9 = 0$, diſtinguimus Radi-

dicem servandam a rejicienda, si ad operationes, quibus ad Æquationem hanc pervenimus, attendamus. Hæc Æquatio ut solvatur in hanc mutatur

$$xx - 10x + 25 = 16 \ (217.)$$

Extractis Radicibus quadratis habemus

$$x - 5 = 4.$$
$$5 - x = 4.$$

Prima ex his Æquationibus servanda est, si in operationibus formatum fuit Quadratum quantitatis x affirmatæ, ut hoc fit quando solvitur Problema n. 224. 229.

Secunda contra usu veniet, si, ut in solutione Problematis n. 226, Quadratum fuit formatum quantitatis ex qua x subtracta fuit: nam in hoc ultimo casu in Æquatione non est xx Quadratum Radicis $+ x$, sed Radicis $- x$; & Radix $+ x$ pertinet ad casum de quo non solliciti sumus, quamvis rem abstractius considerando ad solutionem Problematis pertineat. 230.

In iis autem occasionibus in quibus operationes non determinant utrum Quadratum incognitæ habeat Radicem affimativam an negativam, utraque Radix Æquationis duarum Dimensionum solutionem dat Problematis; quod duas tunc solutiones habet positivas. 231.

Dixi superius (166.), aliquando Problemata quatuor Dimensionum ad duas reduci; quia nempe ut Problema duarum Dimensionum solvuntur. 232.

Casus hic semper contingit si eædem duæ quantitates affirmatæ, & negatæ Problemati satisfaciant. Ex. gr. Si $+ a$, $- a$, $+ b$, $- b$ respondeant conditionibus Problematis, quatuor habet Problema solutiones. Æquatio qua solvitur ad quatuor Dimensiones adscendit; sed quæ per regulas traditas pro Æquationibus duarum Dimensionum solvitur, quærendo non incognitæ ipsius valorem, sed valorem Quadrati hujus. 233.

Clarum enim est in hoc exemplo si x dicatur quantitas quæsita, $x = + a$ & $x = - a$ hac sola Æquatione exprimi $xx = aa$; & eodem modo $xx = bb$ demonstrat $x = b$ & $x = - b$.

Multiplicatis nunc Æquationibus

$$xx - aa = 0$$
$$xx - bb = 0$$

$$\text{Æquatio } \begin{array}{l} x^4 - aaxx + aabb = 0 \\ - bbxx \end{array} \text{ continebit}$$

quatuor valores ipsius x (212.) qui, data hac Æquatione, deteguntur per regulas superius traditas (217.); quærendo primo valores duos Quadrati xx, & ex his Radices extrahendo.

Aliquando tamen incidimus in talem Æquationem, quamvis Problema 234.

uni-

unicam tantum habeat ſolutionem affirmativam, & æqualem negativam. Tunc Quadratum incognitæ duos quidem habet valores, ſed negativus eſt alter qui rejiciendus eſt (218.)

Algebra neceſſario dat omnes algebraicas ſolutiones; cum vero impoſſibiles quantitates algebraice exprimantur, ſi hæ conditionibus Problematis reſpondeant, neceſſario ſolutiones tales Æquatione, quæ valores exprimit incognitæ, continentur.

235. Caſus etiam datur analogus cum caſu memorato in n. 223; & in Problemate quod unicam habet ſolutionem affirmativam & huic æqualem negativam alteram, aliquando incognita quatuor habet valores veros; ſed horum duo ad caſus impoſſibiles pertinent, quamvis ipſi valores impoſſibiles non ſint.

EXEMPLUM.

236. Quæruntur x, y, z, poſitis his tribus proportionibus,

$$\div \quad x, \quad y, \quad z$$
$$\div \quad z - y, \quad 20, \quad z + y.$$
$$\div \quad 34 - 2y, \quad z - x, \quad 34 + 2y.$$

Problema hoc unicam habet affirmativam ſolutionem, nempe $x = 9$, $y = 15$, $z = 25$, qui numeri ſi omnes negativi fuerint etiam proportiones dant memoratas; id eſt $x = -9$, $y = -15$, $z = -25$, nullaque alia ſolutio hujus Problematis datur: ſi autem quæram z, habeo Æquationem hanc

$$z^4 - 689\, zz + 40000 = 0,$$

quæ hos quatuor dat valores z,

$$z = 25.$$
$$z = -25.$$
$$z = 8.$$
$$z = -8.$$

Qui duo ultimi valores ad ſolutiones pertinent impoſſibiles, in quibus

$$x = -42;\ y = \sqrt{-336};\ z = 8.$$

aut

$$x = 42;\ y = -\sqrt{-336};\ z = -8.$$

237. Diſtinguendus autem eſt valor hic $z = 25$ ab omnibus reliquis, qui rejiciendi ſunt, hac methodo

So-

Solutione Æquationis (217.)

$$z^4 - 689zz + 40000 = 0$$

detego

$$\left.\begin{matrix} zz - 344\tfrac{1}{2} \\ 344\tfrac{1}{2} - zz \end{matrix}\right\} = 280\tfrac{1}{2}.$$

Seligo valorem in prima Æquatione detectum, rejecto alio juxta regulam superius traditam (229, 230.) quia in operationibus, quibus ad Æquationem solitariam perveni, formavi quadratum $zz - 20$; & z^4 formatum fuit multiplicando $+ zz$ per se ipsum, non $- zz$. Ubi nunc habeo $zz = 625$, detego $z = 25$, & $z = - 25$, quem ultimum valorem rejicio quia negativus est.

Problemata sæpissime quæ unicam tantum, aut duas solutiones, habent, 238.
non possunt resolvi nisi Æquationibus trium aut quatuor Dimensionum aut etiam altioribus, sed in hisce casibus Problemata stricte loquendo tot habent solutiones quot dimensiones Æquationes habent, quarum solutiones quædam rejiciuntur.

C A P U T XI.

Problemata duarum Dimensionum.

Pauca tantum hic Problemata proponam. Illa quæ in Capite præcedenti explicata sunt, illis quæ antea de Problematibus in genere tradita sunt addi tantum debent, & solutio Problematum duarum Dimensionum non difficilis erit.

P R O B L E M A XVI.

A & B, *simul debent* 208. A *singulis diebus persolvit* 9. B *primo die* 239.
solvit 1, *secundo* 2, *tertio* 3. *&c. Quær. quot diebus integrum debitum persolvant, & quantum quisque debeat.*

Sit debitum A, x; debitum B, y; numerus dierum z.

$$x + y = 208.$$
$$9z = x.$$

y valet summam progressionis arithmeticæ cujus primus terminus est 1, ultimus z, numerus terminorum z; quæ summa valet $\overline{1 + z} \times \tfrac{1}{2}z$ (126.) Ergo

$$\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}zz = y$$

Quæ tres Æquationes ad hanc unicam reducuntur, additis duabus ultimis & collatione facta cum prima.

$$x + y = \tfrac{1}{2}zz + 9\tfrac{1}{2}z = 208.$$
$$zz + 19z = 416.$$
$$zz + 19z + 90\tfrac{1}{4} = 506\tfrac{1}{4}.$$
$$z + 9\tfrac{1}{2} = 22\tfrac{1}{2}.$$
$$z = 13.$$
$$x = 117.$$
$$y = 91.$$

PROBLEMA XVII.

240. *Quidam emit equum, quem rursus divendit pro a; lucratur ad centum quantum ipsi constitit equus. Quær. quantum ipsi constiterit.*

Sit x pretium equi.

$$100,\ 100 + x :: x,\ a.$$

PROBLEMA XVIII.

241. *Quæruntur duo, numeri quorum productum est 12; & differentia Quadratorum 7.*

Sint numeri x & y.

$$xy = 12.,\ y = \frac{12}{x},\ yy = \frac{144}{xx}.$$
$$xx - yy = 7.,\ xx - \frac{144}{xx} = 7.$$
$$x^4 - 144 = 7xx.$$

Solvitur hæc Æquatio, ut Æquatio duarum Dimensionum (217.), si quæramus valorem Quadrati xx.

$$x^4 - 7xx = 144.$$
$$x^4 - 7xx + 12\tfrac{1}{4} = 156\tfrac{1}{4}.$$
$$\left.\begin{array}{l} xx - 3\tfrac{1}{2} \\ 3\tfrac{1}{2} - xx \end{array}\right\} = 12\tfrac{1}{2}.$$
$$xx = \left\{\begin{array}{l} +16. \\ -9. \end{array}\right.$$
$$x = 4.\quad y = 3.$$

Secundum valorem $xx = -9$ negligo, quia impossibilis est (218.).

Necessario detego valorem Quadrati xx in solutione Problematis, quia non modo $x = 4$, $y = 3$, Problema solvunt, sed & $x = -4$, $y = -3$.

Duos etiam alios valores Quadrati xx detego; quia Problema duas præterea

terea habet solutiones impossibiles, quæ algebraice exprimi possunt. Sunt hæ $x = \sqrt{-9}$, $y = \sqrt{-16}$; & $x = -\sqrt{-9}$, $y = -\sqrt{-16}$.

PROBLEMA XIX.

Quæritur numerus, cui si addatur radix quadrata ipsius numeri multiplicati per decem, summa valeat viginti. 242.

Sit numerus x.

$$x + \sqrt{10x} = 20$$
$$\sqrt{10x} = 20 - x$$
$$10x = 400 - 40x + xx$$
$$xx - 50x = -400$$
$$xx - 50x + 625 = 225$$
$$\left.\begin{matrix} x - 25 \\ 25 - x \end{matrix}\right\} = 15$$
$$x = 40$$
$$x = 10$$

Clarum est valorem primum qui superat 20, non quæri; secundum ergo tantum servo.

Mathematice tamen loquendo 40. respondet quæstioni; nam multiplicato hoc numero per decem habemus 400., cujus radix quadrata -20 si addatur 40, summa $40 - 20$. valebit 20.

Observandum $25 - x = 15$, non $x - 25 = 15$, dare radicem quam quærimus; quia Quadratum $20 - x$ fuit formatum, (230.).

OBSERVATIO V.

Notavimus supra (198.) ambages in solutione vitari sæpissime, si non 243.
ipsæ quærantur quantitates desideratæ, sed aliæ quarum ope ad desideratas pervenimus, regulamque quæ in multis occasionibus usu venit explicavimus (199). Sed hisce nunc addendum ipsas operationes aliquando indicare quantitates, quæ ipsis propositis facilius deteguntur, & quæ ad quæsitas conducunt; quod exemplo clarius patebit.

PROBLEMA XX.

Data summa & summa Quadratorum, quatuor numerorum in Progressione 244.
geometrica, detegere numeros.

Sit summa numerorum a; summa Quadratorum b.

Dicantur numeri $\div\!\!\div\ u, x, y, z$.

 Æqua-

Æquationes ſunt,

$$u + x + y + z = a$$
$$uu + xx + yy + zz = b$$
$$xx = yu \qquad u = \frac{xx}{y}$$
$$yy = zx \qquad z = \frac{yy}{x}$$

Quatuor hæ Æquationes ad has duas reducuntur

$$\frac{xx}{y} + x + y + \frac{yy}{x} = a.$$
$$\frac{x^4}{yy} + xx + yy + \frac{y^4}{xx} = b.$$

Sublatis fractionibus habemus

$$x^3 + x^2y + yyx + y^3 = axy.$$
$$x^6 + x^4y^2 + y^4x^2 + y^6 = bxxyy.$$

In quibus x & y eodem modo ſeſe habent; quare potius quæro ſummam & differentiam harum quantitatum (199.). Sed cum percipiam inita computatione operoſam admodum hanc futuram; antequam ulterius pergam, ad Æquationes, in quibus x & y eodem modo ſe habent, redeo & has perpendo, ut ſi poſſibile ſit ex ipſis eliciam quantitates, quæ facilius detegi queant & ex quibus datis, x & y inveſtigari poſſint.

Æquationes memoratæ ita poſſunt exprimi

$$\overline{xx + yy} \times \overline{x + y} = axy$$
$$\overline{x^4 + y^4} \times \overline{xx + yy} = bxxyy.$$

Quæ in has mutantur

$$xx + yy = \frac{axy}{x + y}$$
$$x^4 + y^4 = \frac{bxxyy}{xx + yy}$$

Quæ ultima, ſubſtituendo pro $xx + yy$ valorem, mutatur in hanc

$$x^4 + y^4 = \frac{bxy \times \overline{x + y}}{a}$$

Ut Æquationem ſimpliciorem habeam, formo Quadrata membrorum primæ,

$$x^4 + y^4 + 2yyxx = \frac{aaxxyy}{\overline{x + y}^2}$$

&

& habeo

$$x^4 + y^4 = \frac{\overline{axy}^2}{\overline{x+y}^2} - \overline{2xy}^2 = \frac{bxy \times \overline{x+y}}{a}$$

Quam Æquationem iterum ſimpliciorem futuram video, ſi pro xy incognitam unam ponam, & aliam pro $x+y$; id eſt ſi ſummam & productum incognitarum quæram, quibus datis ipſæ incognitæ facile determinantur (200.)

Examinandum nunc an aliam Æquationem detegere poſſim, quæ etiam ſimplicior evadat ſimili mutatione; duæ enim Æquationes deſiderantur, ut duas incognitas determinemus.

Datur Æquatio hæc

$$xx + yy = \frac{axy}{x+y}.$$

Additis utrimque $2xy$, mutatur in hanc,

$$\overline{x+y}^2 = \frac{axy}{x+y} + 2xy$$

Ponamus nunc $xy = s$, & $x+y = t$; facta ſubſtitutione dantur hæ duæ Æquationes

$$tt = \frac{as}{t} + 2s.$$

$$\frac{aass}{tt} - 2ss = \frac{bst}{a}.$$

Quæ in has mutantur

$$t^3 = as + 2st.$$

$$a^3s - 2atts = bt^3, \quad t^3 = \frac{a^3s - 2atts}{b}.$$

Unde

$$as + 2st = \frac{a^3s - 2atts}{b}.$$

$$ba + 2bt = a^3 - 2att.$$

$$tt + \frac{b}{a}t = \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}b.$$

Qua Æquatione ſoluta, datur t; ideoque s, nam

$$s = \frac{t^3}{a + 2t}$$

Deteguntur etiam x & y.

$$x = \tfrac{1}{2}t \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}tt - s}.$$

$$y = \tfrac{1}{2}t \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}tt - s}.$$

CAPUT XII.

De Problematibus indeterminatis.

Problemata indeterminata ut determinata resolvi, superius notavimus (163.).

Dantur autem indeterminata Problemata, in quibus quamvis plures sint incognitæ quam Æquationes, nulla tamen ad libitum potest adsumi.

Talia sunt omnia Problemata, in quibus quantitates Quadratis aut Cubis æquari debent.

In his quantitates aliæ quædam ad libitum adsumuntur, & ex his indeterminatæ Problematis determinantur.

Ubi quantitas, cujus conditiones determinantur, Quadrato aut Cubo æquari debet, totum artificium in eo situm est, ut quantitas, quæ Quadrato æquari debet, algebraice exprimatur & Quadrato æqualis ponatur; & quidem tali, quo Æquatio hæc reducatur ad unam dimensionem respectu incognitæ Problematis.

Quamdiu agitur de Problematibus unius & duarum Dimensionum, sequentes Regulæ sufficiunt in iis casibus, in quibus Problemata universaliter solvi possunt. Quando hisce Regulis ad solutionem pervenire non possumus, Problema tantum in casu peculiari ex proprietate numerorum, qui in Problemate exprimuntur, possibile est: de hisce non agam; quia hic non perpendo singulares peculiarium numerorum proprietates.

REGULA I.

245. *Quando determinanda quantitas unicam dimensionem habet, ad libitum Radix Quadrati adsumitur.*

EXEMPLA.

ax æquari debet Quadrato, & x est quantitas determinanda. Sumto ad libitum numero v; pono $ax = vv$ & potest determinari x.

Eodem modo x determinari potest in Æquationibus his

$$b + ax = vv$$
$$b + cx + ax = vv.$$

RE-

REGULA II.

Quando determinanda quantitas duas habet dimensiones, sed Quadratum affirmatur & per unitatem tantum multiplicatur, Radix Quadrati est differentia inter numerum ad libitum sumtum, & ipsam quantitatem determinandam. 246.

EXEMPLA.

Sit $a + xx$ quantitas quæ Quadrato æquari debet, & x quantitas determinanda; v numerus ad libitum: Radix Quadrati est $v - x$, & habemus Æquationem

$$a + xx = vv - 2vx + xx$$
$$a = vv - 2vx.$$

In qua x determinari potest.

Eodem modo poterit determinari x, si habeamus

$$a - bx + xx = vv - 2vx + xx$$
$$a - bx = vv - 2vx$$

REGULA III.

Quando Quadratum quantitatis determinandæ subtrahitur in quantitate proposita, aut quando multiplicatur hoc per aliam quantitatem, Problema universaliter solubile non est, nisi in casibus in quibus quantitas, quæ Quadrato æquari debet, constat ex Quadrato & quantitatibus in quibus quantitas determinanda datur; tunc Radix Quadrati quæsiti est differentia Producti quantitatis determinandæ per numerum ad libitum sumtum, & Radicis Quadrati quod datur in quantitate proposita. 247.

EXEMPLA.

$aa - xx$ æquari debet Quadrato, x est determinanda quantitas; v ad libitum sumitur & Radix Quadrati quæsiti est $vx - a$.

$$aa - xx = vvxx - 2avx + aa$$
$$- x = vvx - 2av,$$

in qua Æquatione x determinari potest.

Eodem modo in hac Æquatione,

$$aa + dx + exx = vvxx - 2avx + aa$$
$$d + ex = vvx - 2av$$

Observandum o. pro Quadrato haberi posse. Regula ergo & huic quantitati applicari potest $dx + exx$, & Radix Quadrati quæsiti erit vx. 248.

Ob-

249. Observandum ulterius ad hanc tertiam Regulam posse revocari quantitates, in quibus ex duobus Quadratis junctis subtrahitur Quadratum quantitatis determinandæ, ut in hac quantitate $aa + bb - xx$, in qua determinanda quantitas est x.

Ponimus $x = z - b$; ergo $xx = zz - 2zb + bb$, & proposita quantitas in hanc mutatur $aa + 2zb - zz$, quæ ad tertiam Regulam pertinet; detecto valore z, si ex hoc subtrahatur b, habemus x.

250. Regulæ memoratæ etiam applicari possunt quantitatibus quæ fractiones continent; sit talis quantitas $aa + \frac{bx - dxx}{c}$, reducitur hæc ad hanc $\frac{aacc + bcx - dcx^2}{cc}$ (70. 67.) quæ Quadrato æqualis fiet si numerator Quadrato æquatur.

251. Quando variæ quantitates Quadratis æquari debent, una seligitur, hæc Quadrato æquatur, & adhibito valore determinandæ quantitatis exterminatur hæc ex aliis quantitatibus; & in hisce usu veniunt Regulæ quæ in aliis Problematibus locum habent, ut hoc in Problematibus Capitis sequentis patebit.

CAPUT XIII.

Problemata indeterminata.

PROBLEMA XXI.

252. *Detegere duo Quadrata quorum differentia datur.*

Sit differentia data a, & Quadrata quæsita xx & yy.

$$a = xx - yy$$
$$a + yy = xx$$

Id est $a + yy$ Quadrato æquari debet. Adsumto v ad libitum, per Reg. 2. (246.) habemus

$$x = v - y$$
$$a + yy = yy - 2vy + vv$$
$$2vy = vv - a$$
$$y = \frac{vv - a}{2v}$$
$$x = \frac{vv + a}{2v}.$$

PRO-

PROBLEMA XXII.

Quadratum datum in duo Quadrata resolvere. 253.

Sit Quadratum datum aa; Quadrata quæsita xx, yy.

$$aa = xx + yy$$
$$aa - yy = xx$$

Ergo $aa - yy$ Quadrato æquari debet; nunc sumto v ad libitum, habemus per 3. Reg. (247.),

$$x = vy - a$$
$$aa - yy = vvyy - 2avy + aa$$
$$- y = vvy - 2av$$
$$y = \frac{2av}{vv + 1}$$
$$x = \frac{avv - a}{vv + 1}$$

PROBLEMA XXIII.

Summam duorum Quadratorum datorum in duo alia Quadrata resolvere. 254.

Sint Quadrata data aa, bb; Quadrata quæsita xx, yy.

$$aa + bb = xx + yy$$
$$aa + bb - yy = xx$$

ergo $aa + bb - yy$ Quadrato æquari debet; quem casum ad Reg. 3. revocari posse demonstravimus (249.): pono

$$y = z - b$$
$$yy = zz - 2zb + bb.$$

Idcirco

$$aa + 2zb - zz = xx$$

Per 3. Reg. (247.) si v ad libitum sumatur,

$$x = vz - a.$$
$$aa + 2zb - zz = vvzz - 2avz + aa$$
$$2b - z = vvz - 2av$$
$$\frac{2b + 2av}{vv + 1} = z$$
$$y = \frac{b + 2av - bvv}{vv + 1}$$
$$x = \frac{2bv + avv - a}{vv + 1}$$

PROBLEMA XXIV.

255. *Invenire numerum qui ex duobus numeris datis seorsim subtractus relinquit Quadrata.*

Numeri dati sunt a, b; numerus quæsitus est x; & Quadrata in Problemate memorata yy, zz.

$$a - x = yy \qquad x = a - yy$$
$$b - x = zz$$
$$\overline{}$$
$$b - a + yy = zz$$

Ergo $b - a + yy$ Quadrato æquari debet. Sumto numero v ad libitum per Reg. 2. (246.).

$$v - y = z$$
$$b - a + yy = vv - 2vy + yy$$
$$b - a = vv - 2vy$$
$$y = \tfrac{1}{2}v + \frac{a - b}{2v}$$
$$x = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}vv - \frac{\overline{a - b}^2}{\overline{2v}^2}$$

PROBLEMA XXV.

256. *Invenire duos numeros quorum si unus addatur Quadrato alterius, summa sit Quadratum.*

Sint numeri quæsiti x & y; Quadrata in Problemate memorata uu, zz.

$$xx + y = uu$$
$$yy + x = zz$$

In prima Æquatione $xx + y$ Quadrato æquari debet, & valor quantitatis x in secunda Æquatione pro x substitui debet.

Si t ad libitum sumatur

$$u = t - x \ (246.)$$
$$xx + y = tt - 2tx + xx$$
$$x = \frac{tt - y}{2t}$$
$$yy + x = yy + \frac{tt - y}{2t} = zz$$
$$4ttyy + 2t^3 - 2ty = 4ttzz \ (250.)$$

Su-

Sumatur s ad libitum, & per 3. Reg. (247.)

$$2tz = 2ty - s$$
$$4ttyy + 2t^3 - 2ty = 4ttyy - 4tsy + ss$$
$$2t^3 - 2ty = 4tsy - ss$$
$$y = \frac{ss - 2t^3}{4ts - 2t}$$
$$x = \frac{4t^3s - ss}{8tts - 4tt}$$

PROBLEMA XXVI.

Invenire tres numeros quorum summa sit Quadratum, & ut bini juncti faciant Quadratum. 251.

Sint numeri quæsiti x, y, z; Quadrata in Problemate memorata rr, ss, tt, vv.

$$x + y = rr. \qquad y = rr - x \ (245.)$$
$$x + z = ss.$$
$$y + z = tt.$$
$$x + y + z = vv.$$

$$x + z = ss. \qquad x = ss - z \ (245.)$$
$$rr - x + z = tt.$$
$$rr + z = vv.$$

$$rr - ss + 2z = tt.$$
$$rr + z = vv. \qquad z = vv - rr \ (245.)$$

Seligo secundam ex his Æquationibus quia simplicior est, & prima in hanc mutatur,

$$2vv - rr - ss = tt$$

Quadrato nunc æquari debet $2vv - rr - ss$; quæ operatio ad secundam Reg. referri potest, si per explicata in n. 249. tollamus vv, ponendo

$$r = q - v$$
$$2vv - rr - ss = vv - qq + 2qv - ss = tt.$$

Nunc cum v numerus sit indeterminatus, adsumto q ad libitum, quæro v; quæ operatio ad Reg: 2. (246.) pertinet: adsumto ergo p, pono

$$t = p - v$$
$$vv - qq + 2qv - ss = pp - 2pv + vv$$
$$v = \frac{pp + qq + ss}{2q + 2p}$$

Determinatis ad libitum p, q, s, datur v, ergo & r; nam $r = q - v$; idcirco etiam deteguntur x, y, z; habemus enim

$$z = vv - rr$$
$$x = ss - z$$
$$y = rr - x$$
aut
$$z = vv - rr$$
$$x = ss + rr - vv$$
$$y = vv - ss$$

PROBLEMA XXVII.

258. *Invenire tria Quadrata in Proportione continua arithmetica.*

Sit xx Quadratum primum; y differentia terminorum vicinorum in progressione.

$$xx$$
$$xx + y$$
$$xx + 2y$$

sunt tria Quadrata; id est duæ ultimæ quantitates Quadratis æquari debent; sint hæc uu, zz.

$$xx + y = uu \qquad uu - xx = y$$
$$xx + 2y = zz$$
$$\overline{2uu - xx = zz}$$

Æquatio hæc ad tertiam Regulam revocari potest (249.) si ponamus

$$x = t - u$$
$$2uu - xx = uu - tt + 2tu = zz$$

Cui Æquationi quærendo t tertiam Regulam possumus applicare; sed quia etiam indeterminata est u, ad 2. Reg. (246.) refero quantitatem, & pono

$$z = u - s$$
$$uu - tt + 2tu = ss - 2su + uu$$
$$u = \frac{ss + tt}{2s + 2t}$$

Si nunc ad libitum sumantur s & t, datur u; & ideo x, quia $x = t - u$; quibus datis Radices trium Quadratorum notæ sunt, nempe x, u, $s - u$, aut

$$\frac{2st + tt - ss}{2s + 2t},\ \frac{ss + tt}{2s + 2t},\ \frac{2st + ss - tt}{2s + 2t},$$

Com-

Communis Denominator negligi poteſt in hoc caſu.

In hac ſolutione demonſtravi, Problema hoc reſolvi poſſe ſine ullo artificio peculiari per Regulas ante traditas; minui autem operatio poteſt, adſumtis his quantitatibus, quæ ſunt in progreſſione arithmetica,

$$tt + uu - 2tu.$$
$$tt + uu.$$
$$tt + uu + 2tu.$$

Prima & ultima ſunt Quadrata, quorum Radices ſunt $t - u$, $t + u$; ſola media ergo Quadrato æquari debet, & pertinet ad Reg. 2. (246.); ergo

$$tt + uu = ss - 2su + uu$$
$$u = \frac{ss - tt}{2s}.$$

Sumtis s & t ad libitum datur u, & notæ ſunt Radices tres $t - u$, $s - u$, $t + v$

$$\frac{2st + tt - ss}{2s}, \quad \frac{ss + tt}{2s}, \quad \frac{2st + ss - tt}{2s}.$$

CAPUT XIV.

De Problematibus Geometricis, & horum Conſtructione.

In ſolutione Problematum geometricorum, ante omnia figura delineanda eſt, in qua Problema ſolutum ponitur. In hac lineæ ducendæ ſunt, quibus, quantum fieri poteſt, triangula ſimilia, aut rectangula, aut figuræ aliæ, quarum proprietates nobis notæ ſunt, formentur. 259.

Lineæ litteris deſignari debent, diſtinguendo lineas cognitas & incognitas (13). Relationes ex notis figurarum proprietatibus exprimendæ ſunt; & ex his Æquationes formandæ; dein ut in aliis Problematibus operandum. 260.

Solutiones geometricorum Problematum ſunt aut arithmeticæ aut geometricæ. 261.

Arithmeticæ ſunt ſolutiones, quando relationes cognitarum linearum numeris exprimuntur, in quibus Problematibus incognitæ etiam numeris exprimuntur, & computatio non differt ab illis quas ſuperius vidimus. 262.

Ubi de geometricis ſolutionibus agitur lineæ cognitæ dantur in plano ductæ, & incognitæ in ipſo plano duci & determinari debent, hæcque determinatio vocatur Problematis conſtructio. 263.

264. Lineæ ut aliæ quantitates ſunt affirmativæ & negativæ.

TAB. I. Fig. 2. Sit AB linea, cujus principium ſit A, id eſt quæ augeri aut minui debet in extremitate B; ſubtrahatur BC major ipſa AB, erit AC exceſſus; ſed in ſubtractione majoris quantitatis ex minori exceſſus eſt negativus; ergo AC eſt linea negativa; & in linea indefinita DE puuctum A ſeparat affirmativas lineas, quæ ad partem D dantur, a negativis quæ E verſus ſumendæ ſunt.

265. Simili methodo demonſtramus lineam pro prima haberi poſſe, & omnes, quæ ad unam partem hujus ductæ erunt, affirmativas eſſe, reliquas negativas.

TAB. I. Fig. 3. Si AB ſit hæc linea prima, quæ ſuperficiem affirmativam ad partem D a negativa ad partem E ſeparat, omnium linearum FCG, HCI, KCL, MNO, PQR, &c. partes CG, CI, CL, NO, QR, ſunt affirmativæ lineæ: negativæ ſunt CF, CH, CK, NM, QP.

266. Conſtructio Problematis eſt conſtructio Æquationis ſolitariæ qua Problema ipſum ſolvitur.

Ut autem Æquationes hæ conſtruantur, Problemata quædam ſimpliciora, in Elementis Euclidis tradita, indicanda erunt.

Ex Primo Libro.

267. *PROP.* 9. *Angulum rectilineum datum in duas partes æquales ſecare.*

268. *PROP.* 11. *Ex dato puncto lineæ rectæ ad hanc perpendicularem ducere.*

269. *PROP.* 12. *Idem, ſi datum punctum extra lineam fuerit.*

270. *PROP.* 23. *Angulum rectilineum æqualem angulo dato rectilineo formare.*

271. *PROP.* 31. *Lineæ datæ per punctum datum parallelam ducere.*

272. *PROP.* 36. *Dato latere formare Quadratum.*

Ex Libro Tertio.

273. *PROP.* 1. *Dati circuli centrum inveſtigare.*

274. *PROP.* 17. *Ex dato puncto ad datum circulum tangentem ducere.*

Ex Libro Sexto.

275. *PROP.* 10. *Datam lineam non ſectam ſecare, ut data ſecta eſt.*

276. Sumtis ad libitum partibus æqualibus in linea quacunque, *poterit* hac propoſitione *linea alia in quot libuerit partes æquales ſecari.*

277. *PROP.* 11. *Datis duabus lineis tertiam proportionalem invenire.*

278. *PROP.* 12. *Datis tribus lineis quartam proportionalem detegere.*

279. *PROP.* 13. *Datis duabus lineis mediam proportionalem invenire.*

Hiſce Problematibus ſequentia ſunt addenda.

280. *PROBL. Invenire latus Quadrati æqualis duobus Quadratis datis.*

Duo-

Duorum Quadratorum datorum latera ad angulos rectos jungenda sunt (268.) ut formetur triangulum rectangulum, cujus hypotenusa est linea quæsita. *Vide 47. prop. libr. I. El.*

Quadratum lineæ AB, valet summam Quadratorum AC & BC. *TAB. I. Fig. 4.*

PROBL. Invenire latus Quadrati quod æquale sit differentiæ duorum Quadratorum datorum. 281.

Sint latera data AB & DE, *TAB. I. Fig. 5.*

Latus majoris Quadrati in duas partes æquales secandum est in C (276.), ut semicirculus describatur cujus latus hoc sit diameter; ex B in semicirculo applicanda est chorda BF æqualis DE; erit FA linea quæsita. *Vide 31. prop. lib. III. ut & 47. prop. lib. I. El.*

Auxilio memoratorum Problematum Æquationes unius dimensionis, ut & duarum dimensionum, si solutæ fuerint (217.), satis facile construuntur.

Cum vero duarum dimensionum Æquationum solutio pro constructione non sit necessaria, dicam quomodo singulæ formulæ construantur.

Detur Æquatio hæc, 282.

$$xx + ax - bb = 0$$

aut

$$xx - ax - bb = 0$$

Sit AB $= b$; erigatur in A perpendicularis AC æqualis $\frac{1}{2}a$; centro C radio CA describatur circulus; si CB ducta fuerit, erunt BE, BD, radices quæsitæ; quarum altera negativa est (215.): in primo casu negativa est BE, in secundo BD. *TAB. I. Fig. 6.*

Demonstratio.

Dicimus in primo casu BE $= -x$; ergo BC $= -x - \frac{1}{2}a$, cujus Quadratum valet Quadrata CA & AB, id est $\frac{1}{4}aa + bb$; ergo $xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$; unde $xx + ax - bb = 0$.

In eodem casu dicimus BD $= x$; ergo CB $= x + \frac{1}{2}a$, & iterum $xx + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$; id est $xx + ax - bb = 0$.

Si ponamus BD $= -x$ & EB $= x$, simili ratiocinio in utroque casu pervenimus ad formulam hanc $xx - ax - bb = 0$.

Dentur nunc 283.

$$xx + ax + bb = 0$$

aut

$$xx - ax + bb = 0$$

Sit iterum AB $= b$; perpendicularis ad hanc AC $= \frac{1}{2}a$; & centro C radio CA circulus descriptus; si in B ad BA erigatur perpendicularis, quæ circulum secat in D & E, erunt BD & BE radices quæsitæ, quæ in pri- *TAB. I. Fig. 7.*

ma

ma ex his formulis ambæ sunt negativæ, in secunda ambæ affirmativæ (215.).

DEMONSTRATIO.

Ductis Dd, Ee, parallelis ad AB, sunt æquales Ae, BE, ut & Ad, BD, & sunt proportionales Ae, eE, eF; & Ad, dD, dF: id est, pro prima formula $\div - x,\ b,\ a + x$. pro secunda $\div\ x,\ b,\ a - x$, unde ipsæ Æquationes formularum deducuntur.

CAPUT XV.

Problemata Geometrica.

PROBLEMA XXVIII.

284. *In dato Triangulo inscribere Quadratum.*

TAB. I. Fig. 8. Sit Triangulum datum ACB; Quadratum describendum EFHG; & a vertice C ad AB sit ducta perpendicularis CD.

Sint nunc

$$AD = a$$
$$AB = b$$
$$CD = d$$
$$AF = y$$
$$FE = x$$

In Triangulis similibus AFE, ADC, AF (y), FE (x) :: AD (a), DC (d).

$$ax = yd$$

In Triangulis BHG, BDC, similibus

$$BH = BA - AF - FE\ (b-y-x),\ HG = FE\ (x) :: BD\ (b-a),\ DC\ (d).$$
$$bx - ax = db - dy - dx.$$

Ponendo pro dy valorem ax, habemus

$$bx + dx = db,$$
$$b + d,\ b :: d,\ x\ (135.).$$

Detecta x (278.), si in perpendiculari DC ipsi æqualis sumatur DI, & per punctum I ad basim parallela ducatur, determinabit hæc puncta E & G.

PRO-

PROBLEMA XXIX.

Sit AB diameter semicirculi cujus centrum C; D, E, puncta duo ab hoc æquidistantia. Quær. punctum F in circumferentia, a quo si ductæ fuerint lineæ FD, FE, radius sit media proportionalis inter summam & differentiam harum linearum. 285. TAB. I. Fig. 9.

Concipiamus ex F perpendicularem FG ad diametrum, & sint

$$DC = CE = a$$
$$FC = b$$
$$FD = x$$
$$FE = y$$
$$CG = z$$

Conditio Problematis est hæc

$$\div\ x + y,\ b,\ x - y;$$

ergo

$$1^{a}.\quad bb = xx - yy$$

In Triangulo FDC, dat 12. lib. II. El.

$$2^{dam}.\quad xx = aa + bb + 2az$$

In Triangulo FCE, dat 12. lib. II. El.

$$3^{am}.\quad yy = aa + bb - 2az$$

Subtracta Æquatione 3^{a}. ex 2^{a}. datur

$$xx - yy = 4az.$$

Unde propter 1^{am}. Æquationem deducimus

$$bb = 4az.$$
$$\div\ 4a,\ b,\ z.$$

Detecta linea z (277), datur punctum G, ex quo si perpendicularis ad AB erigatur, determinatur F.

OBSERVATIO VI.

In hoc Problemate quærimus z, non autem x aut y, quia lineæ CG valor unicus est, non autem aliarum linearum. De x sola agam; est hæc major ex lineis x & y, & licet ex puncto D unica talis linea major duci queat in semicirculo AFB, potest linea huic æqualis Df in semicirculo opposito duci, lineæque Df, Ef etiam problemati satisfaciunt, sed sunt hæ negativæ (265.); habet ergo x duos valores DF, Df, æquales, quorum unus affirmativus alter negativus est; ideo non possumus detegere x, nisi 286.

 in

in Æquatione quæ dat valorem Quadrati xx. Detegitur hæc Æquatio additione trium Æquationum,

$$\begin{aligned} xx - yy &= bb \\ xx &= aa + bb + 2az \\ yy &= aa + bb - 2az \\ \hline 2xx &= 2aa + 3bb \\ xx &= aa + \tfrac{3}{2}bb. \end{aligned}$$

287. Universaliter observandum, quando linea datur, quæ respectu duarum linearum, quibus Problema solvitur, eandem relationem habet, ut hic DG respectu DF, Df, talem lineam quærendam esse, si modo hujus determinatio det Problematis solutionem.

PROBLEMA XXX.

288. *Iisdem positis detegere punctum* F *tale, ut radius sit media proportionalis*
TAB. II. *inter lineas* FD, FE,
Fig. 1.

Designatis lineis iisdem litteris ac in Problemate præcedenti, habemus Æquationes has

$$\begin{aligned} xy &= bb \\ xx &= aa + bb + 2az \\ yy &= aa + bb - 2az. \end{aligned}$$

In hisce Æquationibus nihil datur ex quo sequatur x potius majorem quam minorem designare lineam, debet ergo utramque designare; nam in duabus ultimis Æquationibus y major erit, si z sit negativa. Idcirco x aut y habebunt duos affirmativos valores; habent etiam in opposito semicirculo duos respondentes negativos; quare Quadrata xx, & yy, duos valores habent. Si ergo quæramus x, necessario incidimus in Æquationem quatuor Dimensionum, quæ, si quæramus valorem Quadrati xx, solvitur ut Æquatio duarum Dimensionum propter duos valores hujus Quadrati.

Si autem determinetur z, Problema etiam solutum est, quia dato G, determinabitur F. Duos vero valores tantum habet z, & æquales, sed affirmativum unum CG, negativum alterum Cg. Quæro ergo z, quia perveniam ad Æquationem quæ dabit valorem Quadrati zz.

Prima Æquatio dat

$$xx = \frac{b^4}{yy}.$$

Secunda mutatur in hanc,

$$\frac{b^4}{yy} = aa + bb + 2az.$$

Unde

Unde in subsidium vocata tertia Æquatione,

$$yy = \frac{b^4}{aa + bb + 2az} = aa + bb - 2az.$$

Quæ ultima Æquatio facta reductione (171. & *seq.*) in hanc mutatur

$$zz = \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}bb.$$

Duplicetur Quadratum $\frac{1}{4}bb$ (280.) cujus Radix $\frac{1}{2}b$, tunc habemus Radicem Quadrati $\frac{1}{2}bb$, & quærendo Quadratum æquale duobus Quadratis (280.) Problema construitur.

PROBLEMA XXXI.

Dato Quadrato ABCD, *ex angulo* A *ducere lineam ita, ut pars* FE *intercepta inter latus* CD *&* *latus* BC *continuatum, æqualis sit lineæ datæ.* 289. *TAB. II. Fig. 2.*

Considerando hoc Problema remotis restrictionibus, quæ in solutione considerari non possunt, patet Problema reduci ad hoc, ex puncto A ducere lineam ita; ut pars intercepta angulo, quem efficiunt lineæ DC, BC, æqualis sit lineæ datæ.

Et facile videmus Problema habere quatuor solutiones; lineæ enim AFE, *AEF* *eAf*, eAf, in quibus FE, *EF*, *ef*, ef, singulæ æquales sunt lineæ datæ, requisito satisfaciunt.

Si nunc quæramus AF, Æquatio etiam dabit A*F*, Af, & A*f*, eritque Æquatio quatuor Dimensionum.

Si quæramus DF, detegimus præter hanc lineam etiam D*F*, Df, D*f*.

Observandum autem FE, *FE*, similiter positas esse ut & *fe*, fe; ideo variæ lineæ dantur quæ eodem modo sese habent respectu FE, & *FE*; inter has talis seligenda est, qua nota Problema solutum est (287.).

Si concipiamus puncta media L, *L* linearum FE, *FE* jungi per lineam, secabit hæc in M productam diagonalem AC Quadrati dati, & AM aut CM eodem modo sese habet respectu utriusque lineæ; dato autem puncto M, Problema solvitur; quia ML perpendicularis est ad AC, & quia CL æqualis est LE quæ datur.

Quærenda igitur est AM aut CM, quæ singulæ duos tantum habent valores AM, A*m*, aut CM, C*m*.

Examinata figura, video computationem simpliciorem fore, si quæratur CM; hanc igitur dico x, & pono.

$$\begin{aligned} CM &= x \\ FE &= 2a \\ AB = AD &= b \\ AC &= c \\ AF &= y \\ FD &= z. \end{aligned}$$

Triangula ABE, AFD ſunt ſimilia, & AE ($y + 2a$), AB (b) :: AF (y), FD (z).

In Triangulo rectangulo AFD, Quadratum AF (yy) valet Quadrata $zz + bb$.

Tandem in Triangulo ACL, propter LM perpendicularem ad AC, Quadratum AL ($\overline{y + a}^2$) valet Quadrata laterum AC, CL, & bis rectangulum ACM, id eſt $cc + aa + 2xc$; & dantur pro tribus incognitis hæ tres Æquationes.

$$1^a.\quad by = zy + 2za, \text{ aut } z = \frac{by}{y + 2a}$$

$$2^a.\quad yy = zz + bb.$$

$$3^a.\quad yy + 2ya = cc + 2xc.$$

Subſtitutione valoris z, ſecunda Æquatio in hanc mutatur.

$$yy = \frac{bbyy}{yy + 4ay + 4aa} + bb.$$

$$y^4 + 4ay^3 + 4aayy = 2bbyy + 4bbay + 4bbaa$$

Hujus primum membrum eſt Quadratum primi membri tertiæ Æquationis, unde novam deducimus Æquationem

$$c4 + 4c3x + 4ccxx = 2bbyy + 4bbay + 4bbaa.$$

Propter Triangulum rectangulum ABC eſt

$$cc = 2bb.$$

Ideo

$$c^4 + 4c^3x + 4ccxx = ccyy + 2ccay + 2ccaa.$$

$$cc + 4cx + 4xx = yy + 2ay + 2aa.$$

Pro $yy + 2ay$ pono valorem qui datur in tertia Æquatione, & habemus,

$$xx + \tfrac{1}{2}cx - \tfrac{1}{2}aa = 0.$$

Cujus conſtructio facilis (282.)

Observatio VII.

290. Non tamen ſemper numerus ſolutionum geometricarum determinat Æquationis, qua Problema ſolvitur, dimenſiones; triplici ex cauſa hujus Æquationis dimenſiones ſuperant numerum ſolutionum poſſibilium.

Quando conditiones Problematis, algebraice expreſſæ, ſolutiones habent algebraicas, quæ ad Problema geometrice conſideratum applicari non poſſunt.

Præ-

Præterea ex duabus causis antea explicatis (220. 223. 235.); circa quod tamen observandum explicata in n. 229. non ad Problema geometricum posse applicari, nisi Problema non patiatur affirmativam Radicem etiam esse negativam, & vice versa; nam in Geometricis affirmatio aut negatio sæpe pendet a figura, quæ & aliter potuisset delineari. Sequentia duo Problemata exemplis tres hosce casus illustrant.

PROBLEMA XXXII.

Formare Quadratum, data differentia inter diagonalem & latus. 291.

Sit Quadratum DCEF; dicatur latus x; differentia data AB $= a$. TAB. II. Fig. 3.
Quadratum diagonalis DE $= x + a$ valet Quadrata DC, CE, id est $2xx$; ergo

$$xx + 2ax + aa = 2xx$$

aut

$$xx - 2ax - aa = 0.$$

Æquatio hæc duas habet Radices quarum affirmativa sola Problemati satisfacit; negativam etiam detegimus; quæ valet latus demtis $2a$; quia si hæc differentia dicatur $-x$, ad eandem Æquationem $xx - 2ax - aa = 0$ pervenimus: sed de hac minime agitur in Problemate nostro geometrice considerato, quod ipsa figura demonstrat.

PROBLEMA XXXIII.

Detur semicirculus AEB, *& ad* AB *continuatam indeterminata perpendicularis* DF; *ducenda est* AF *ita ut* ÷ EF, DF, AE. 292. TAB. II. Fig. 4.

Primo intuitu liquet posse continuari FD infra AD, circulumque posse absolvi, nullamque ex lineis EF, DF, AF posse detegi, nisi æqualem valorem negativum detegamus; Æquatio ergo necessario dabit Quadratum quantitatis quæsitæ.

$$\text{EF} = x$$
$$\text{DF} = y$$
$$\text{AE} = z$$
$$\text{AB} = a$$
$$\text{AD} = b$$

Æquationes ex his proportionibus deducuntur

÷ EF (x), DF (y), AE (z).
AB (a), AE (z) :: AF $(z+x)$, AD (b).
AFq $(\overline{z + x}^2)$ = FDq (yy) + ADq $(bb.)$

Ergo

$$1^a.\quad xz = yy$$
$$2^a.\quad zz + zx = ba$$
$$3^a.\quad zz + 2zx + xx = yy + bb.$$

Tertia Æquatio subductione primæ & secundæ ad hanc reducitur

$$xx = bb - ba.$$

Sed quamvis nunc detur x, Problema nondum solutum est; quia non possum ducere AF nisi detur AE aut DF, id est, z aut y. Quæro z quia facilius detegitur.

Secunda Æquatio in hanc mutatur

$$zx = ba - zz$$
$$zzxx = bbaa - 2bazz + z^4$$
ergo
$$zzbb - zzba = bbaa - 2bazz + z^4.$$
id est
$$z^4 - abzz + bbaa = 0$$
$$- bbzz$$

Quæ Æquatio quatuor habet Radices, duas positivas, & hisce æquales duas negativas, id est Quadratum zz duos habet valores, sed unus rejiciendus est (230.); quia z^4 est Quadratum Radicis $-zz$, non hujus $+zz$, & hoc non a linea ad arbitrium ducta, sed ex natura Problematis sequitur.

Possumus etiam ad duas reducere dimensiones Æquationem hanc; si ponamus

$$bb - ba = dd,$$

tunc x valet $+d$ & $-d$: pro x in Æquatione $zx = ba - zz$ substituo hos valores, & habeo duas has Æquationes

$$zz + dz - ba = 0$$
$$zz - dz - ba = 0$$

Quæ singulæ Æquationes Radicem unam habent affirmativam, alteram negativam.

Rejicio ambas Radices ultimæ Æquationis; quia non agitur de x negativa.

In prima Radicem seligo positivam, rejecta negativa.

293. Observandum hanc Radicem negativam, cum affirmativa Æquationis $zz - zx - ba = 0$, pertinere ad casus impossibiles (235. 236.): si enim quæramus y, videmus Problema duas habere solutiones, quæ quidem algebraice exprimi possunt, sed re vera impossibiles sunt.

Prima Æquatio mutatur in hanc

$$y^4 = zzxx = bbzz - bazz.$$

Se-

Secunda mutatur in hanc

$$zz = ba - yy$$
ergo
$$y^4 = \overline{bb - ba} \times \overline{ba - yy}$$
aut
$$\begin{aligned} y^4 + bbyy - ba^3 &= 0 \\ - bayy + bbaa & \end{aligned}$$

Æquatio hæc duos dat valores Quadrati yy, quorum unus negativus est; & indicat duos habere valores impossibiles y (218.)

Observatio VIII.

Aliquando contingit numerum solutionum superare dimensiones Æquationis qua Problema solvitur, quod paradoxum est, quia ex ante explicatis (212.) manifestum est, non plures incognitam habere posse valores, quam ipsa in Æquatione solitaria habet dimensiones. 294.

Casus etiam de quo agimus in Geometricis tantum locum habet, & contingere potest, quia numerus solutionum geometricarum superare potest numerum solutionum algebraicarum. Hoc in iis occasionibus obtinet, in quibus plures lineæ æquales positivæ, aut negativæ Problema solvunt; algebraice enim varii valores æquales sunt idem valor.

Notandum autem, non semper in talibus occasionibus ad Æquationem simpliciorem perveniri: nam algebraica Æquatio potest continere duos valores æquales ejusdem incognitæ, id est, algebraice rem considerando, bis eundem valorem. In hac Æquatione $xx - 2ax + aa = 0$, habet x duos valores æquales a; quod, si de Geometricis non agatur, nihil aliud significat præter hoc x valet a; & in Problematibus in quibus $x = a$ possumus pervenire ad Æquationem hanc $x - a = 0$, aut ad hanc $xx - 2ax + aa = 0$, aut etiam ad magis compositam. Sed non semper pervenimus ad illam quæ exprimit numerum solutionum æqualium geometricarum. Observatio hæc sequenti Problemate illustratur. 295.

Problema XXXIV.

In circumferentia semicirculi ADB; *cujus centrum* C; *quæritur punctum* D, *ex quo si dimittatur perpendicularis* DE, *in diametrum* AB, *rectangulum* CE *per* ED *æquale sit Quadrato lineæ* FH. 296. *TAB. II. Fig. 7.*

Ponimus

$$CD = a$$
$$CE = x$$
$$DE = y$$
$$FH = b$$

&

& habemus has Æquationes

$$xy = bb, \qquad y = \frac{bb}{x}.$$
$$aa = xx + yy.$$

Facta substitutione

$$aa = xx + \frac{b^4}{xx}.$$
$$x^4 - aaxx + b^4 = 0$$

Quæ Æquatio, si solvatur (217.), duos dat valores Quadrati xx, qui singuli habent Radicem positivam & æqualem negativam; habet ergo x (CE) duos valores ad partem utramque centri, & quatuor puncta E, E, e, e, hac solutione determinari possunt.

Singulis ex punctis E, E, e, e, duæ respondent solutiones, affirmativa una supra lineam AB, negativa altera, infra lineam; y ergo quatuor habet valores affirmativos, & totidem negativos. Sed in Æquationibus datis si quæramus y, habemus

$$y^4 - aayy + b^4 = 0.$$

quæ Æquatio duos tantum dat valores positivos & totidem negativos; sed propter æquales ED, eD, & ED, eD, ratio hujus manifesta est (294. 295.).

297. Hæc autem Æquatio $x^4 + aaxx + b^4 = 0$ ut construatur, primo solvenda est (217.), ut ad duas simpliciores reducatur, & habemus

$$xx = \tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - b^4},$$
$$xx = \tfrac{1}{2}aa - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - b^4}.$$

Lineis a & b quæro tertiam proportionalem (277.), quam dico d, estque

$$bb = ad, \text{ \& } b^4 = aadd;$$

unde

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - b^4} = a\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - dd} \text{ (194.)}.$$

Potest nunc determinari $\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - dd}$ (281.), & pono

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - dd} = e.$$

Facta substitutione habemus Æquationes

$$xx = \tfrac{1}{2}aa + ae$$
$$xx = \tfrac{1}{2}aa - ae$$

quarum constructio non est difficilis (279.).

Potuisset huc referri n. 199. Vide Prob. XI. quod cum hoc non differt.

O B-

OBSERVATIO IX.

Vidimus in quibusdam Problematibus geometricis quomodo negativæ solutiones aliquando rejiciantur; hoc plerumque fit ubi ad unam partem lineæ quærimus constructionem, quæ ad aliam partem eodem modo obtinet. De cætero, raro in Geometricis Radices rejiciuntur quia negativæ sunt. Negativa enim linea situ tantum a positiva differt (264. 265.); quare sæpe solutiones positivæ in negativas mutantur, & vice versa, sola variatione cognitarum, possuntque casus varii determinari sola consideratione Æquationis qua Problema solvitur. Quod exemplo illustrabimus. 298.

PROBLEMA XXXV.

Ducere Circulum, qui per datum punctum transeat, & tangat lineam positione datam, ut & circulum magnitudine & positione in eodem plano datum. 299.

Sit A punctum datum; BD linea indeterminata data; EF circulus datus cujus centrum C. *TAB. III. Fig. 1.*

Quæro centrum circuli desiderati, & pono hoc esse N. Ducta NC, erit E punctum contactus circuli quæsiti & circuli dati; ducta NI perpendiculari ad BD, erit I punctum contactus circuli quæsiti & lineæ datæ: sunt ergo radii ejusdem circuli, ideoque æquales NA, NI, NE.

Duco ad BD perpendicularem AB, quam in duas partes æquales divido in M, & duco ML parallelam ad BD; concipio AI ductam, quam secat ML in O, & quidem in duas partes æquales, propter æquales AM, MB. Idcirco in Triangulo Isoscele ANI, NO perpendicularis est ad AI, & est NOI Triangulum rectangulum, in quo OL perpendicularis est ad hypotenusam, &

$$\div NL, LO, LI.$$

Si NI producta concipiatur in H ita, ut IH æqualis sit EC, & ductam fingamus CH, Triangulum CNH erit Isosceles. Ducatur nunc CD perpendicularis ad BD, sitque hæc producta ad G usque ita, ut DG & IH aut EC æquales sint, id est HG parallela ad BD; secetur CG in Q in duas partes æquales, ductaque QR parallela ad BD secabit hæc CH æqualiter in P, & erit NP perpendicularis ad HC; quare Triangulum NPH rectangulum est, ad cujus hypotenusam perpendicularis est PK, unde sequitur

$$\div NK, KP, KH.$$

Ponamus nunc

$$BD = 2a$$
$$CQ = QG = KH = b$$
$$AM = MB = LI = c.$$
$$MR = LK = d$$
$$MO = OL = x$$
$$NL = y$$

est ergo
$$PQ = KP = a - x$$

Duas tantum habemus incognitas x & y, quibus datis determinari poterit N; habemus etiam duas Proportiones continuas, quæ, algebraice expressæ, sunt,

$$\div\, y,\ x,\ c.$$
$$\div\, d + y,\ a - x,\ b.$$

Hæ dant Æquationes

$$xx = yc \text{ aut } y = \frac{xx}{c}$$
$$aa - 2ax + xx = db + by$$

Facta substitutione

$$aa - 2ax + xx = db + \frac{bxx}{c}$$

unde

$$xx - \frac{2cax}{c - b} + \frac{aac - dbc}{c - b} = 0.$$

CASUS I.

300. Si c superet b, id est, si AB major fuerit CG, secundus terminus Æquationis negativus est; si in eodem casu aa superet db, id est, si BD excedat duplicatam mediam proportionalem inter MR & CQ, erit affirmativus ultimus terminus, & Æquatio habet duas Radices affirmativas (215.) id est, circuli duo proprietatem requisitam habent, quorum centra dantur ad illam partem lineæ AB ad quam datur linea CD, sed centrum unum inter hasce lineas, alterum ultra CD detegitur.

CASUS II.

301. Si, manente c majori b, rectangulum db superet aa, negativus erit tertius terminus, & Radix una negativa est, altera affirmativa (215.); id est, linea AB dabitur inter centra amborum circulorum quibus Problema solvitur.

C A-

CASUS III.

Hoc etiam continget si b superet c, & aa excedat db (215.); nam tunc affirmativus est secundus terminus & tertius negativus. 302.

CASUS IV.

Sed si dum b superat c, rectangulum db excedit aa, omnes termini affirmativi sunt, & ambæ Radices negativæ (215.): quare ambo centra ad eandem partem dantur lineæ AB, quæ inter ipsa & lineam CQ posita est. 303.

CASUS V.

Si $aa = bd$, Æquatio mutatur in hanc, $xx - \frac{2cax}{c-b} = 0$, cujus Radices sunt 304.

$$x = 0.$$
$$x = \frac{2ca}{c-b}.$$

Id est, centrum unum datur in ipsa linea AB, alterum datur ad eandem partem hujus lineæ ad quam datur CD, si c superet b, secus si b excedat c.

CASUS VI.

Si $c = b$, Æquatio multiplicata per $c - b$ est 305.

$$xx \times \overline{c - b} - 2acx + aac - dbc = 0.$$

Sed $c - b = 0$; ergo habemus

$$2ax = aa - db$$
$$x = \frac{aa - db}{2a},$$

unicamque habet Problema solutionem, alio centro in infinitum abeunte.

Quod autem spectat constructionem hujus Æquationis 306.

$$xx - \frac{2acx}{c-b} + \frac{aac - bdc}{c-b} = 0,$$

quærenda est quarta proportionalis hisce tribus $c - b$, c, a, quam dicimus f; & alia hisce tribus a, b, d, quam dico g; ideo

$$c - b, c :: a, f = \frac{ac}{c-b},$$
$$a, b :: d, g, \text{ \& } ag = bd.$$

 Æqua-

Æquatio nunc mutatur in hanc

$$xx - 2fx + \overline{a - g} \times f = 0.$$

Detecta nunc media proportionali inter $a - g$ & f, sitque hæc h, pervenimus ad hanc Æquationem

$$xx - 2fx + hh = 0,$$

cujus constructionem explicavimus (217.)

Quando b superat c, datur $+ 2fx$, contra $- 2fx$ quando c excedit b. Quando a major est g habemus $+ hh$, contra $- hh$ quando g magnitudine vincit a.

Observatio X.

307. In Problematibus geometricis non semper necesse est eo usque continuare computationem, donec ad solitariam perveniamus Æquationem. Ubi pervenimus ad Æquationem, quæ dat Proportionem inter duas incognitas, si hæ duæ tantum supersint, figura examinanda est, quia sæpissime ex tali Æquatione constructionem deducimus, ut hoc patebit in Problemate sequenti & in Problemate 41.

Problema XXXVI.

308. *Describere Circulum, qui Circulum, positione & magnitudine datum, contingat, & per duo Puncta data, in eodem Plano cum Circulo, transeat.*

TAB. III. Fig. 2. Sint puncta data A & B; circulus datus est DE, cujus centrum C.

Ducta AB, sit hæc æqualiter secta in F, & in hoc puncto perpendicularis erecta FG ad AB.

Clarum est centrum circuli quæsiti dari in hac perpendiculari. Fingamus hoc esse N, & concipiamus lineas ductas NA, NC, quarum hæc secat circulum datum in E; erunt æquales NA, NE.

Ex C ad FG dimittatur perpendicularis CH, & sint

$$FH = a$$
$$FA = b$$
$$CH = c$$
$$CE = d$$
$$NH = x$$
$$NE = NA = y.$$

In Triangulis rectangulis NCH & NFA habemus

$$NC^q = CH^q + NH^q, \ \& \ NA^q = AF^q + FN^q$$

id est

$$yy + 2dy + dd = cc + xx$$
$$yy = bb + aa + 2ax + xx.$$

Sub-

Subtraho ſecundam Æquationem ex prima,

$$2dy + dd = cc - bb - aa - 2ax$$
$$2dy = cc - bb - aa - dd - 2ax.$$

Quæro Quadratum æquale $cc - bb - aa - dd$ (280. 281.); ſit hoc ee.

Quæro tertiam proportionalem his duabus quantitatibus $2a$, e, quam dico f; &

$$2af = cc - bb - aa - dd.$$

Ergo

$$dy = af - ax,$$

unde

$$y, f - x :: a, d.$$

Si nunc ſumatur $HI = f$, eſt $NI = f - x$, & erit

$$NE, NI :: a, d.$$

Concipiamus ductam IE, & ad hanc parallelam CL, erit etiam

$$a, d :: EC (d), IL = \frac{dd}{a}.$$

Unde hanc deducimus conſtructionem. Poſitis, ut ante dictum, jam ductis lineis AB, FG, CH, quæ dantur, ſumo $HI = f$, quæ datur; & $IL = \frac{dd}{a}$ quæ etiam datur; duco LC, & per I ad hanc parallelam IE, quæ circulum DE ſecat in E & e; per C & E duco lineam, quæ producta ſecat FG in N, quod eſt centrum quæſitum, ut ex explicatis ſequitur.

Punctum e indicat & aliam Problematis ſolutionem dari, & productam eC, interſectione ſua cum linea FL, ſecundi circuli centrum determinare.

Quando N cadit ad aliam partem Puncti H negativa eſt x, ſed eo conſtructio non mutatur.

Quando $bb + aa + dd$ ſuperat cc, ponimus $bb + aa + dd - cc = ee$, & in hoc caſu f negativa eſt; quare Punctum I ad aliam partem puncti H notatur (264.).

OBSERVATIO XI.

Explicatis, quæ in ſolutione algebraica Problematum geometricorum 309.
obſervanda ſunt, addendum non tamen ſemper Algebram neceſſariam eſſe; in multis enim occaſionibus conſtructio quam facillime ex vulgo notis figurarum proprietatibus deducitur; quare hoc primum tentandum ante computationem initam.

PROBLEMA XXXVII.

310. *Circulum describere, qui duas datas Lineas tangat, & per Punctum, in eodem Plano datum, transeat.*

TAB II. Fig. 6. Sit A punctum datum; & BD, EF, lineæ datæ; sint hæ productæ donec sese mutuo secent in G; ducatur GN, quæ angulum DGE in duas partes æquales dividit (267.); clarum est, centrum circuli quæsiti dari in hac linea. Ex A ad hanc ipsam lineam sit AI perpendicularis (269.): clarum iterum est, si hæc fuerit producta, & IH sit æqualis AI, etiam H esse in circumferentia circuli quæsiti.

Hisce positis, fingamus N esse centrum quæsitum, & NM perpendicularem esse ad EF; erit NM radius hujus circuli, & M punctum contactus.

Hæc omnia consideranda forent ante computationem, quam inutilem esse statim percipimus, si continuemus lineam AH donec in K secet FE; nam clarum est KM esse mediam proportionalem inter notas lineas KA, KH (36. El. III.); quare datur M (279.); in quo puncto si ad EF erecta fuerit perpendicularis, secabit hæc in N lineam GI, & determinabit centrum circuli quæsiti.

OBSERVATIO XII.

311. Dantur aliquando conditiones in Problematibus geometricis quæ minime algebraice exprimi possunt, in quibus occasionibus ex solis considerationibus geometricis solutio deducenda est.

PROBLEMA XXXVIII.

312. *Datis, in eodem Plano, Puncto & Parallelogrammo, per Punctum hoc ad Lineam, in eodem Plano datam positione, ducere Parallelam, sine Circuli operatione.*

TAB. III. Fig. 3. Per punctum A ad BF ducenda est parallela, ductis tantum rectis; dato in eodem plano parallelogrammo IL.

Algebram inutilem in hoc Problemate esse sola ipsius consideratione patet. Algebraica enim solutio omnis ad Æquationes conducit, quarum nulla sine circuli operatione construi potest. Ex geometricis considerationibus solutio ergo deducenda est.

Produco tria parallelogrammi latera donec lineæ datæ occurrant in B, C, F, quam etiam in E secat diagonalis producta KM; latus quartum IK, indeterminatim producitur.

His positis hæc est constructio. Ex A duco lineas ad B & C, quarum prima secat latus IK, aut ipsius continuationem, in D; ex quo du-

co

co DE, secantem AC in G; per quod punctum duco FG, quæ continuata lateri IK, aut ipsius continuationi, occurrit in H; erit AH parallela ad BF.

DEMONSTRATIO.

Ex C ad N, intersectionem linearum FL & ED, duco rectam CN. Propter parallelas KB, MC,

EC, EB :: EM, EK.

Propter parallelas DK, NM,

EN, ED :: EM, EK.

Ergo

EC, EB :: EN, ED.

Quare parallelæ sunt ADB & NC; unde sequitur similia esse Triangula CGN, AGD; & est

GN, GD :: GC, GA.

Sed propter parallelas NF, DH, similia sunt Triangula FGN; & HGD, &

GN, GD :: GF, GH.

Idcirco

GC, GA :: GF, GH,

& sunt similia Triangula CGF, AGH (6. El. VI.); nam anguli FGC, HGA, oppositi ad verticem sunt æquales; ergo æquales anguli CFG, AHG, & parallelæ FC, AH (27. El. I.).

Casus diversi dari possunt hujus Problematis; sed omnium solutio facilis est hac ipsa tradita constructione, quæ in hac figura locum habet ubicunque concipiatur punctum A.

Sed quando propter parallelogrammi situm, respectu lineæ BF, determinari non possunt puncta omnia B, C, E, F, aliud parallelogrammum delineandum est, quod facile fit cum unum detur.

Sit IKLM parallelogrammum datum, cujus diagonalis sit KM. Ducantur lineæ duæ rectæ ad libitum RS, PQ, quæ sese mutuo secent in O, puncto quocunque diagonalis, quarum prima in R & S occurrit lateribus IK, ML parallelogrammi dati, cujus latera alia linea PQ, in P & Q, secat. Junctis R, Q, & P, S, erunt hæ parallelæ, & continuatis his, ut & lateribus KL, MI, novum habebimus parallelogrammum TQVP. 313. *TAB. III. Fig. 4.*

DEMONSTRATIO.

Propter parallelas KR, MS, similia sunt Triangula MOS, ROK.

Etiam

Etiam similia sunt POM, KOQ, propter parallelas MP, KQ. Ergo

SO, OR :: MO, OK
PO, OQ :: MO, OK
ideo
SO, OR :: PO, OQ

Quare Triangula PSO & ROQ similia sunt, & PS, RQ parallelæ.

CAPUT XVI.

De Problematibus Physicis.

314. Problemata Physica ut alia solvuntur, si ad hoc attendamus, juxta regulam n. 183. aliunde nota in subsidium vocari ut Æquationes formentur.

PROBLEMA XXXIX.

315. *Data altitudine Mercurii in Barometro, determinare Mercurii altitudinem in tubo cylindrico, cujus longitudo datur, & in quo nota datur Aeris quantitas.*

Detur altitudo Mercurii in Barometro a; longitudo alterius tubi cylindrici verticalis, supra Mercurii superficiem, b; hunc ponimus in superiori parte clausum, & in eo dari Aeris quantitatem, quæ in statu Aeris exterioris in tubo occuparet spatium c; determinanda est altitudo ad quam Mercurius in hoc tubo pressione Atmosphæræ sustineri possit: altitudinem hanc dicimus x.

Non potest Problema hoc solvi nisi lex juxta quam Aer sese expandit nota sit, & est hæc, *spatia occupata ab Aere esse inter se inverse ut vires comprimentes.*

Quando Aer in tubo contentus occupat spatium c, a tota Atmosphæra comprimitur, & vis comprimens potest sustinere columnam Mercurii cujus altitudo est a.

Sed Aer in tubo est dilatatus, occupatque spatium $b - x$; pressio autem Atmosphæræ duos edit effectus; sustinet Mercurium ad altitudinem x, & reliqua sua vi, qua nempe posset sustinere columnam Mercurii $a - x$, Aerem in tubo comprimit.

Ergo quando spatia ab Aere occupata sunt c & $b - x$, vires comprimentes, quæ sunt inverse ut spatia, sunt inter se ut a ad $a - x$. Idcirco

$$c, b - x :: a - x, a,$$
$$ca = ba - bx - ax + xx,$$
$$xx - ax + ba = 0.$$
$$- bx - ca$$

Quæ

Quæ Æquatio duas habet Radices positivas (215.), quarum una tantum usu venit, quæ ab alia distinguitur (230.) si ad hoc attendamus, xx in Æquatione habere Radicem $-x$.

PROBLEMA XL.

Dato Mixto ex duobus metallis notis, determinare quantum ex utroque metallo contineat. 316.

Ut Problema hoc solvatur satis est notum habere metalla diversa, pondere æqualia, inæquales partes ponderis amittere quando in aqua ponderantur.

Detur nunc Mixtum ex Auro & Argento, sitque mixturæ pondus a; dentur præterea duo frusta quæcunque, unum ex Auro puro, alterum ex Argento puro, hæc ut & ipsa mixtura, in aqua ponderanda sunt.

Singula hæc corpora ex pondere amittent; sit b pondus amissum a mixtura a; sit ulterius pondus Auri c, & pondus ab hoc amissum in aqua d; tandem sit pondus Argenti e, & pondus amissum f.

Dicatur x pondus Auri in mixtura, eritque pondus Argenti $a-x$; dicatur y, pondus ab Auro in mixtura in aqua amissum; erit $b-y$ pondus ab Argento in eadem mixtura in aqua amissum.

Clarum est pondus Auri c ad pondus Auri x, ut pondus a c amissum ad pondus quod amisit x; quod & ad Argentum e & $a-x$ etiam applicari debet. Ergo

$$c, x :: d, y.$$

$$e, a-x :: f, b-y.$$

Unde deducimus

$$dx = cy, \text{ aut } y = \frac{dx}{c}.$$

$$e, a-x :: f, b-\frac{dx}{c}.$$

$$fa - fx = be - \frac{dex}{c}$$

$$x = \frac{cfa - cbe}{cf - de}$$

PROBLEMA XLI.

Ex puncto dato A, *data velocitate, corpus projicere in punctum datum* B. 317. TAB. III. Fig. 5.

Quando velocitas datur potest determinari altitudo a qua corpus cadendo hanc potest acquirere: sit hæc DA, quam lineam verticalem ponimus.

Hoc in Physicis notum est, corpus projectum dum juxta lineam projectionis motu uniformi movetur cadendo interea percurrere spatia, quæ sunt

ut quadrata temporum; hosque duos motus se mutuo non turbare. Præterea notum est corpus velocitate cadendo a certa altitudine acquisita, motu uniformi, in tempore æquali tempori casus, percurrere spatium æquale duplo altitudinis memoratæ.

Hisce positis sit AE directio quæsita, juxta quam corpus motu projectitio percurrit AE, in tempore in quo cadendo percurrit EB, posita hac linea verticali.

Ponamus

$$AB = a.$$
$$AD = b.$$
$$AE = x.$$
$$EB = y.$$

In tempore in quo corpus potest cadere per y, motu projectitio percurrere potest x.

In tempore in quo corpus cadit per b, motu projectitio posset percurrere $2b$.

Spatia motu uniformi eadem velocitate percursa sunt ut tempora; spatia cadendo percursa sunt ut quadrata temporum. Ergo.

$$xx, 4bb :: y, b,$$
$$4by = xx,$$
$$\div 4b, x, y.$$

Produco AD in F, & est AF = 4AD; video nunc lineam AE ita esse ducendam ut AF, AE, EB sint in continua proportione; quod continget, si ducta EF Triangula AEF, AEB, fuerint similia, positis æqualibus angulis AFE, EAB; unde sequitur Problema esse solutum, si per punctum F describatur circulus qui in puncto A tangit AB, quod facile est; secabit enim hic in puncto E lineam verticalem per B transeuntem (32. El. III.). Cum vero linea hæc a circulo in duobus punctis secetur, sequitur, per duas directiones corpus projici posse. Vide observ. 10. n. 307.

Simplex admodum & universalissima est hæc Problematis celeberrimi constructio, ad quam methodo, hic exposita, perveni, quam eandem postea vidi explicatam à Professore Cantabrigiensi Rogerio Cotes.

Si quærendo secundam Æquationem solutio algebraica fuisset absoluta, constructio Æquationis quæ Problematis solutionem dedisset magis fuisset composita; & considerationes solæ geometricæ difficilius ad hanc constructionem deducere potuissent.

FINIS.

SPECIMEN

COMMENTARII

IN

ARITHMETICAM

UNIVERSALEM

NEWTONI.

PRÆFATIO.

Non omnes Auctores Tironibus ſcribunt, neque æquum foret hoc ab iis petere. Dum quæ in Mathematicis & Phyſicis ſubtiliora ſunt, Philoſophis impertitur Newtonus, quis ab eo exſpectabit primorum Algebræ Elementorum tractationem? Matheſeos olim Cantabrigiæ Profeſſor Juventuti Academicæ hæc quidem Elementa explicavit; prælectionesque in ſcriptis ex lege Academica huic ipſi tradidit; ſed ſcripta hæc non prælo deſtinaverat auctor; & theſaurus hic abſconditus adhucdum lateret, niſi invito auctore cum publico fuiſſet communicatus. Factum non probamus; Matheſeos cultoribus tamen gratulamur, non diutius in tenebris hærere librum, celeberrimo ſuo auctore certiſſime dignum.

Operis hujus uſus latius pateret, ſi multa, concinne & pulcherrime quidem dicta, ad captum tironum magis eſſent aptata; ſi alia, tantum indicata, clarius eſſent explicata. Scripta talia, quæ paucis verbis magnam materiam complectuntur, Mathematicis quidem magis grata ſunt, ſed non omnibus, qui animum hiſce ſcientiis applicant, utilia.

Defectus hicce corrigitur, neque Mathematici illius quod ipſis placet jacturam patiuntur, ſi ſcripta talia illuſtrentur

commentario, qui ab his negligi poterit, qui tali non indigent.

Primi ordinis Mathematici præcedenti ſeculo, non indignam Carteſii Geometriam dijudicarunt, quam commentariis ſuis illuſtrarent, & talem operam non minus Newtonus in Arithmetica meretur. Optandumque eſt inter tot magni nominis Mathematicos, qui hoc tempore vigent, aliquem opus hoc in ſe ſuſcepturum.

Nos autem, ut Mathematicorum attentionem excitemus circa neceſſitatem talis commentarii, ſpecimen hoc damus, in quo duo loca non inter difficillima illuſtrare conamur.

SPECIMEN COMMENTARII IN ARITHMETICAM UNIVERSALEM *NEWTONI.*

NEWTONI ARITHMETICA UNIVERSALIS, Pag. 42. 37. (*a*)

De Inventione Divisorum.

„ Huc ſpectat inventio diviſorum per quos quantitas aliqua dividi poſſit.
„ *Si quantitas ſimplex eſt divide eam per minimum ejus diviſorem, & quotum per minimum diviſorem ejus, donec quotus reſtet indiviſibilis, & omnes quantitatis diviſores primos habebis. Dein horum diviſorum ſingulos binos, ternos, quaternos, &c. duc in ſe, & habebis etiam omnes diviſores compoſitos.* Ut ſi numeri 60 diviſores omnes deſiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, & quotum 15 per 3, & reſtabit quotus indiviſibilis 5. Ergo diviſores primi ſunt 1, 2, 2, 3, 5: ex binis compoſiti 4, 6, 10, 15: ex ternis 12, 20, 30, ex omnibus 60. Rurſus ſi quantitatis $21abb$ diviſores omnes deſiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a, & quotum bb per b, & reſtabit quotus primus b. Ergo diviſores primi ſunt 1, 3, 7, a, b, b; ex binis compoſiti 21, $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; ex ternis $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, abb; ex quaternis $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; ex quinis $21abb$. Eodem modo ipſius $2abb - 6aac$ diviſores omnes ſunt 1, 2, a, $bb - 3ac$, $2a$, $2bb - 6ac$, $abb - 3aac$, $2abb - 6aac$.

„ *Si*

(*a*) Prior numerus indicat paginam Editionis Cantabrigienſis, an. 1707; poſterior vero refertur ad Editionem quæ prodiit Lugduni Batavorum, anno 1732.

2. „ *Si quantitas postquam divisa est per omnes simplices divisores manet com-*
„ *posita, & suspicio est eam compositum aliquem divisorem habere, dispone eam*
„ *secundum dimensiones litteræ alicujus quæ in ea est, & pro littera illa sub-*
„ *stitue sigillatim tres vel plures terminos hujus progressionis arithmeticæ* 3, 2,
„ 1, 0, — 1, — 2, *ac terminos totidem resultantes una cum omnibus eo-*
„ *rum divisoribus statue e regione correspondentium terminorum progressionis,*
„ *positis divisorum signis tam affirmativis quam negativis. Dein e regione*
„ *etiam statue progressiones arithmeticas quæ per omnium numerorum divisores*
„ *percurrunt, pergentes a majoribus terminis ad minores eodem ordine quo ter-*
„ *mini progressionis* 3, 2, 1, 0, — 1, — 2 *pergunt, & quarum termini*
„ *differunt, vel unitate vel numero aliquo qui dividit altissimum terminum*
„ *propositæ quantitatis. Si qua occurrit ejusmodi progressio, iste terminus ejus*
„ *qui stat e regione termini* 0 *progressionis primæ, divisus per differentiam ter-*
„ *minorum, & cum signo suo annexus litteræ præfatæ, componet quantitatem*
„ *per quam divisio tentanda est.*

3. „ Ut si quantitas sit $x^3 - xx - 10x + 6$, pro x substituendo sigil-
„ latim terminos progressionis 1. 0. — 1, orientur numeri — 4, 6, + 14
„ quos cum omnibus eorum divisoribus colloco e regione terminorum pro-
„ gressionis 1. 0. — 1, hoc modo.

1	4	1. 2. 4.	+ 4.
0	6	1. 2. 3. 6	+ 3.
— 1	14	1. 2. 7. 14	+ 2.

„ Dein quoniam altissimus terminus x^3 per nullum numerum præter uni-
„ tatem divisibilis est, quæro in divisoribus progressionem cujus termini
„ differunt unitate, & a superioribus ad inferiora pergendo decrescunt per-
„ inde ac termini progressionis lateralis 1. 0. — 1. Et hujusmodi pro-
„ gressionem unicam tantum invenio nempe 4. 3. 2. cujus itaque terminum
„ + 3 seligo qui stat e regione termini 0 progressionis primæ 1. 0. — 1,
„ tentoque divisionem per $x + 3$. Et res succedit, prodeunte $xx - 4x + 2$.

4. „ Rursus si quantitas sit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$; pro y sub-
„ stituo sigillatim 2, 1, 0, — 1, — 2, & numeros resultantes 30, 7,
„ 20, 3, 34, cum omnibus eorum divisoribus e regione colloco, ut se-
„ quitur.

2	30	1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30	+ 10.
1	7	1. 7	+ 7.
0	20	1. 2. 4. 5. 10. 20.	+ 4.
— 1	3	1. 3	+ 1.
— 2	34	1. 2. 17. 34	— 2.

„ Et in divisoribus hanc solam esse animadverto decrescentem progres-
„ sionem arithmeticam + 10, + 7, + 4, + 1, — 2. Hujus termi-
„ norum

„ norum differentia 3 dividit altiſſimum quantitatis terminum $6y^4$. Quare
„ terminum + 4 qui ſtat e regione termini 0, diviſum per differentiam
„ terminorum 3, adjungo litteræ y, tentoque diviſionem per $y + \frac{4}{3}$, vel
„ quod perinde eſt per $3y + 4$, & res ſuccedit prodeunte $2y^3 - 3yy$
„ $- 3y + 5$.

„ Atque ita ſi quantitas ſit $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140aa + 64a$ 5.
„ + 30: operatio erit ut ſequitur.

2	42	1. 2. 3. 6. 7. 14. 21. 42.	+ 3. + 3. + 7
1	23	1. 23.	+ 1. − 1. + 1
0	30	1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30.	− 1. − 5. − 5
− 1	297	1. 3. 9. 11. 27. 33. 99. 297.	− 3. − 9. − 11

„ Tres occurrunt hic progreſſiones quarum termini − 1. − 5. − 5.
„ diviſi per differentias terminorum 2. 4. 6, dant tres diviſores tentan-
„ dos $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$ & $a - \frac{5}{6}$. Et diviſio per ultimum diviſorem
„ $a - \frac{5}{6}$, ſeu $6a - 5$, ſuccedit prodeunte $4a^4 - 5a^3 + 4aa - 20a - 6$.

COMMENTARIUS.

Ut demonſtremus Auctoris methodo neceſſario detegi diviſorem ut $6a-5$, 6.
ponimus hunc notum eſſe. Si in diviſore hoc $6a-5$ pro a ſubſtituamus numerum quemcunque, Ex. cauſ. 2., erit numerus inde oriundus diviſor numeri, qui prodit ex ſubſtitutione ejusdem numeri 2. in quantitate propoſita; nam a poteſt repræſentare numerum quemcunque, & eundem in quantitate & diviſore deſignat.

Subſtituendo in hoc diviſore $6a-5$ ſucceſſive pro a numeros 2. 1. 0. − 1. − 2. &c. habemus progreſſionem arithmeticam, cujus termini habentur inter diviſores numerorum, qui dividendam exprimunt quantitatem, ſi ſucceſſive in hac pro a iidem numeri ſubſtituantur.

Hujus progreſſionis differentia eſt 6; quæ differentia eſt diviſor numeri 24; aliter $6a$ non divideret $24\,a^5$, quod deſideratur dum ponimus $6a - 5$ dividere quantitatem propoſitam. Datur ergo pro diviſore $6a - 5$, in diviſoribus numeralibus, ab Auctore memoratis, progreſſio arithmetica, quæ habet proprietates quas exigit Auctor.

Terminus − 5. reſpondet 0.; quia habetur ſubſtituendo 0. pro a.

Hæc demonſtratio poteſt ad ſingulos diviſores quantitatis propoſitæ ap- 7.
plicari; unde ſequitur omnes hac methodo detegi, quia ſinguli progreſſionem ſibi reſpondentem habent. Cum vero non conſtet illas tantum detegi poſſe progreſſiones, quæ diviſori cuidam reſpondent, obſervat Auctor diviſionem per quantitatem detectam tentandam eſſe.

PERGIT NEWTONUS.

8. „ Si nullus occurrit hac methodo divisor, vel nullus qui dividit propositam quantitatem, concludendum erit quantitatem illam non admittere divisorem unius dimensionis. Potest tamen fortasse, si plurium sit quam trium dimensionum, divisorem admittere duarum. Et si ita, divisor ille investigabitur hac methodo. *In quantitate illa pro littera substitue, ut ante, quatuor vel plures terminos progressionis hujus* 3. 2. 1. 0. − 1. − 2. − 3. *Divisores omnes numerorum resultantium sigillatim adde & subduc quadratis correspondentium terminorum progressionis illius ductis in divisorem aliquem numeralem altissimi termini quantitatis propositæ, & summas differentiasque e regione progressionis colloca. Dein progressiones omnes collaterales nota quæ per istas summas differentiasque percurrunt. Sit* ∓ C *terminus istiusmodi progressionis qui stat e regione termini* 0 *progressionis primæ,* ∓ B *differentia quæ oritur subducendo* ∓ C *de termino proxime superiori qui stat e regione termini* 1 *progressionis primæ,* A *prædictus termini altissimi divisor numeralis, & l littera quæ in quantitate proposita est; & erit* A *ll* ± B *l* ± C *divisor tentandus.*

9. „ Ut si quantitas proposita sit $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$, pro x scribo successive 3. 2. 1. 0. − 1. − 2. & prodeuntes numeros 39. 6. 1. − 6. − 21. − 26, una cum eorum divisoribus e regione dispono, addoque & subduco divisores terminis progressionis illius quadratis ductisque in divisorem numeralem termini x^4 qui unitas est, *videl.* terminis 9. 4. 1. 0. 1. 4, & summas differentiasque e latere pariter dispono. Dein progressiones, quæ in iisdem obveniunt, e latere etiam scribo, ut sequitur.

3	39	1.3.13.39	9	− 30. − 4.6.8.10.12.22.48.	− 4.6.
2	6	1.2. 3. 6	4	− 2.1.2.3.5.6.7.10.	− 2.3.
1	1	1.	1	0. 2.	0.0.
0	6	1.2. 3. 6	0	− 6. − 3. − 2. − 1.1.2.3.6.	2. − 3.
− 1	21	1.3. 7.21	1	− 20. − 6. − 2.0.2.4.8.22.	4. − 6.
− 2	26	1.2.13.26	4	− 22. − 9.2.3.5.6.17.30.	6. − 9.

„ Harum progressionum terminos 2 & − 3, qui stant e regione termini 0 progressionis illius quæ in columna prima est, usurpo successive pro ∓ C. Differentias quæ oriuntur subducendo hos terminos de terminis superioribus 0 & 0, nempe − 2 & + 3, usurpo respective pro ∓ B; unitatem item pro A, & x pro l. Et sic pro A ll ± Bl ± C habeo divisores duos tentandos $xx + 2x - 2$ & $xx - 3x + 3$, per quorum utrumque res succedit.

„ Rur-

„ Rurſus ſi proponatur quantitas $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8yy - 14y + 14$, operatio erit ut ſequitur. Primo rem tento addendo & ſubducendo diviſores quadratis terminorum progreſſionis .2. 1. 0. 1. uſurpato 1 pro A, ſed res non ſuccedit. Quare pro A uſurpo 3, 10.

3	170		27		− 7.	17
2	38	1.2.19.38	12	− 26. − 7.10.11.13.14.31.50.	7.	11
1	10	1.2.5.10	3	− 7. − 2. 1. 2. 4. 5. 8. 13.	− 7.	5
0	14	1.2. 7.14	0	− 14. − 7. − 2. − 1. 1. 2. 7. 14.	− 7.	− 1
− 1	10	1.2. 5.10	3	− 7. − 2. 1. 2. 4. 5. 8. 13.	− 7.	− 1
− 2	190		12		− 7.	− 13

„ alterum nempe termini altiſſimi $3y^5$ diviſorem numeralem, & quadratis iſtis multiplicatis per 3, hoc eſt numeris 12. 3. 0. 3, addo ſubducoque diviſores; & progreſſiones in terminis reſultantibus haſce duas invenio − 7. − 7. − 7. − 7. & 11. 5. − 1. − 7. Expeditionis gratia neglexeram diviſores extimorum numerorum 170 & 190. Quare continuatis progreſſionibus ſumo proximos earum hinc inde terminos, *videl.* − 7 & 17 ſuperius, & − 7 & − 13 inferius, ac tento ſi ſubductis his de numeris 27 ac 12, qui ſtant e regione in quarta columna, differentiæ dividunt iſtos 170 & 190, qui ſtant e regione in columna ſecunda. Et quidem differentia inter 27 & − 7, id eſt 34, dividit 170; & differentia 12 & − 7 id eſt 19 dividit 190. Item differentia inter 27 & 17, id eſt 10, dividit 170; ſed differentia inter 12 & − 13, id eſt 25, non dividit 190. Quare poſteriorem progreſſionem rejicio. Juxta priorem ∓ C eſt − 7, & ∓ B nihil; terminis progreſſionis nullam habentibus differentiam. Quare diviſor tentandus $All \pm Bl \pm C$, erit $3yy + 7$. Et diviſio ſuccedit, prodeunte $y^3 - 2yy - 2y + 2$.

COMMENTARIUS

Demonſtratio hujus methodi a demonſtratione præcedente vix differt.

Sit in primo Exemplo (9.) $xx - 3x + 3$ diviſor quantitatis propoſitæ $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$. 11.

Si diviſor hic ex quadrato xx ſubtrahatur, reliquum eſt $+ 3x - 3$. Si in hac quantitate pro x ſucceſſive ſubſtituamus 2. 1. 0. − 1. − 2. &c. habemus progreſſionem arithmeticam cujus differentia adſcendendo eſt + 3, & cujus terminus, quando 0. ſubſtituitur, eſt − 3. Ex qua progreſſione memoratus diviſor per regulas Auctoris elicitur.

Subſtituendo in ipſa quantitate data pro x unum ex iiſdem numeris, Ex. gr. 2. dabitur inter diviſores numeri ex ſubſtitutione provenientis, numerus oriundus ſubſtituendo 2. in diviſore $xx - 3x + 3$; & ſubtrahendo omnes

 mo-

memoratos divisores ex quadrato numeri substituti 2., nempe 4., dabitur necessario, inter differentias detectas, numerus ille progressionis memoratæ qui eidem numero 2. respondet.

Ex his sequitur, progressionem memoratam necessario dari inter illos numeros inter quos Auctor ipsam quærendam dicit, divisoresque singulos quantitatis propositæ similem dare progressionem.

Non modo divisores numerales ex quadratis numerorum substitutorum subtrahit Auctor; sed & etiam his eosdem addit; quia hæc additio est subtractio divisoris negativi.

Ante additionem & subtractionem divisorum, quadratum numeri substituti multiplicandum dicit Auctor per unum ex divisoribus primi termini, ut in secundo Exemplo per 3.; cujus operationis ratio manifesta fit, si datam demonstrationem applicemus divisori ejusdem Exempli secundi $3yy+7$.

Pergit Newtonus

12. „ Si nullus inveniri potest hoc pacto divisor qui succedit, concluden-
„ dum est quantitatem propositam non admittere divisorem duarum dimen-
„ sionum. Posset eadem methodus extendi ad inventionem divisorum di-
„ mensionum plurium, quærendo in prædictis summis differentiisque pro-
„ gressiones, non arithmeticas quidem, sed alias quasdam quarum terminorum
„ differentiæ primæ, secundæ, tertiæ, &c. sunt in arithmetica progres-
„ sione: at in his Tiro non est detinendus.

Commentarius

13. Neque tales detexisse progressiones satis esset, nam quomodo ex his divisores eliciantur, non ita facile apparet; solis etiam progressionibus arithmeticis divisores trium dimensionum deteguntur.

14. Sit quantitas data, cujus divisores trium dimensionum quæruntur,

$$x^6 + 12x^3 + 4xx + 4x + 3.$$

Formo primam columnam ex novem aut decem terminis progressionis arithmeticæ hujus

$$4.\ 3.\ 2.\ 1.\ 0. -1 -2 -3 -4.$$

In secundam refero numeros oriundos ex substitutione horum in quantitate proposita.

In tertiam divisores numerorum secundæ columnæ.

Hæc communia sunt divisoribus quarumcunque dimensionum.

Quarta columna formatur ex cubis numerorum respondentium in prima, multipicatis per divisorem quemdam numeralem primi termini quantitatis pro-

propoſitæ, quibus productis additur, aut ex quibus ſubtrahitur, numerus quicunque in tertia columna e regione o. poſitus.

Ex gr. cubos 64. 27. 8. 1. 0. — 1. — 8. — 27. — 64. multiplico per unitatem, diviſorem unicum numeralem termini primi x^6.

1a.	2da.	3a.	4ta.	5ta.	6ta.	
4.	4947.	— — —	67.	— — — — — — —	4.	
3.	1104	— — —	30.	— — — — — — —	2.	6.
2.	187.	1.11.17.187. —	11.	-88.-30. 5. 6. 11.14 99. — — —	0.-3.6.	
1.	24.	1.2.3.4 6.8.12 24.	4.	-20.-8.-4.-2.0.1.2.3.5.6.7.8.10.12.16.28.	- 2.-2.6.	
0.	3.	1.3. — —	3.	— — — 0. — — —	- 4.-1.6.	
-1.	8.	1.2.4.8. — —	2.	-6.-2.0.1.3.4.6.10. — — —	- 6.-0.6.	
-2.	21.	1.3.7.21. —	-5.	13.6.4.3.2.1.-1.-8. — — —	- 8.	1.6.
-3.	432.	— — —	-24.	— — — — — — —	-10.	2.6.
-4.	3379.	— — —	-61.	— — — — — — —	-12.	

Productis addo, aut ex his ſubtraho, numerum quemcunque ex his 1. 3., qui in tertia columna ponuntur e regione o. primæ. Addendo 3. formo columnam qua in hoc exemplo utor, 67. 30. 11. 4. 3. 2. - 5. - 24. - 61.

Eodem modo tres haſce alias quartas columnas formare potuiſſem.

61. 24. 5. — 2. — 3. — 4. — 11. — 30. — 67.
65. 28. 9. 2. 1. 0. — 7. — 26. — 63.
63. 26. 7. 0. — 1. — 2. — 9. — 28. — 65.

Cum hiſce quatuor columnis quartis ſeparatim operationes ſequentes inſtituendæ ſunt, quas nos primæ ex his quatuor applicamus.

Ex ſingulis numeris quartæ columnæ ſubtraho, & his addo, diviſores reſpondentes in tertia columna, ſummasque & differentias, diviſas per numerum reſpondentem in prima columna, & e regione hujus, in quintam columnam refero.

Nullum autem ſcribo numerum e regione o. in prima columna, ſed concipio omnes numeros poſitivos & negativos in hac linea dari.

Satis erit quatuor aut quinque ſeligere numeros ex minoribus columnæ ſecundæ in formatione tertiæ & quintæ columnæ, relictis reliquis locis vacuis, ut in hoc noſtro exemplo.

Quæro nunc, percurrendo numeros quintæ columnæ, an non dentur progreſſiones arithmeticæ. Tales quinque detego, quas in ſextam columnam refero; (tres tantum hic notantur) & examino an ſurſum & deorſum poſſint continuari, explorando an harum termini darentur in lineis reſpondentibus quintæ columnæ, ſi hæc continuata foret; quo longam computationem vitamus, quæ in continuatione hujus quintæ columnæ deſideraretur.

Tentamina hæc fiunt operationibus, iis contrariis quibus quinta columna 15.
formatur. Si progreſſio detecta — 2. — 4. — 6. — 8. deſcendendo conti-

nuetur, terminus qui respondet — 3. in prima columna est — 10.; qui numerus in quinta columna desideratur, ut possit progressio continuari. Sed si hic in hac quinta columna detur, & per — 3. multiplicetur, productum 30. subtrahendo hoc ex numero respondente in quarta columna, dabit numerum tertiæ columnæ, id est divisorem numeri respondentis in secunda. Idcirco si 6. exacte dividat 432. continuatio progressionis procedit; si non dividat exacte, interrumpitur progressio, & rejicienda est.

Satis est in paucis terminis continuationem tentare, ne operationes plus temporis desiderent, quam ex hac progressione determinatio divisoris, & hujus examen; singulæ enim progressiones divisorem dant tentandum.

Continuatis progressionibus sextæ columnæ, omnes excepta prima interrumpuntur; sola ergo hæc 4. 2. 0. — 2. — 4. &c. usu venit.

16. Hujus ope sequentibus regulis divisorem tentandum elicio.

1°. Multiplico x^3 per divisorem primi termini quantitatis propositæ, per quem multiplicavi cubos numerorum primæ columnæ ubi quartam formavi. Divisor hic in nostro exemplo est 1. & productum

$$x^3$$

est terminus primus divisoris.

2°. Differentia progressionis adscendendo est + 2. Muto signum, &

$$-2xx$$

est terminus secundus divisoris.

3°. Terminus progressionis e regione 0. in prima est — 4. Muto signum, &

$$+4x$$

est terminus tertius divisoris.

4°. Tandem in formatione quartæ columnæ addidi 3. cubis numerorum primæ, &

$$+3$$

est ultimus terminus divisoris.

Est idcirco divisor tentandus

$$x^3 - 2xx + 4x + 3,$$

cum quo divisio procedit.

Observandum in primo & ultimo termino signa servari, in mediis mutari.

DEMONSTRATIO.

17. Demonstratio hujus methodi eodem fundamento nititur cum præcedentibus.

Substituendo in divisore quocunque quantitatis propositæ, ut $x^3 - 2xx + 4x + 3$, pro x numerum quemcunque, ut 2, habetur numerus qui exacte

acte dividit numerum detectum ex substitutione ejusdem numeri 2. in quantitate proposita. Divisor talis reperitur in tertia columna e regione numeri substituti, qui in prima columna datur.

Primus-terminus Divisoris est (cum agatur de divisore trium dimensionum) x^3 multiplicatum per divisorem numeralem primi termini quantitatis datæ.

Ultimus terminus est divisor ultimi termini quantitatis propositæ, qui ergo in tertia columna datur e regione 0. in prima. Si ponamus numeros qui hanc tertiam columnam formant etiam negativos dari.

Ex quibus deducimus quartam columnam continere summam primi & ultimi termini divisoris, in quo pro x ponitur numerus respondens in prima columna.

Sic columna nostra quarta formatur ex tali substitutione in $x^3 + 3$.

Nullusque potest dari divisor cujus terminus primus cum ultimo non format aliquam columnam quartam; quarum numerus aliquando tantus est, ut eo methodus inutilis evadat, est enim 192. si primus terminus quantitatis propositæ multiplicetur per 24., & ultimus terminus sit 60.

Si ex summa hac $x^3 + 3$. subtrahamus ipsum divisorem $x^3 - 2xx + 4x + 3$, restat mutatis signis summa secundi & tertii termini $2xx - 4x$; facta divisione per x, quotiens est $2x - 4$. Et ex formatione quintæ columnæ clarum est hanc continere $2x - 4$; substituendo pro x numerum respondentem in prima columna.

Clarum etiam est, successiva substitutione numerorum primæ columnæ, quantitatem hanc $2x - 4$. formare progressionem arithmeticam, cujus differentia adscendendo est 2, & numerus e regione 0. in prima columna est $- 4$. Clarum etiam est nullum dari quantitatis propositæ divisorem, qui in aliqua columna sexta, quarum tot dantur quot quartæ columnæ, non habet progressionem arithmeticam, qua data ipse divisor detegitur.

Quarta enim columna, qua utimur, dat summam primi & ultimi termini, & progressio arithmetica reliquos duos indicat.

PERGIT NEWTONUS.

„ *Ubi in quantitate proposita duæ sunt litteræ, & omnes ejus termini ad* 18.
„ *dimensiones æque altas adscendunt; pro una istarum litterarum pone unita-*
„ *tem, dein per regulas præcedentes quære divisorem, ac divisoris hujus com-*
„ *ple deficientes dimensiones restituendo litteram illam pro unitate.*

„ Ut si quantitas sit $6y^4 - cy^3 - 21ccyy + 3c^3y + 20c^4$ ubi termini „ omnes sunt quatuor dimensionum: pro c pono 1, quantitas evadit $6y^4$ „ $- y^3 - 21yy + 3y + 20$, cujus divisor ut supra est $3y + 4$, & com- „ pleta deficiente dimensione posterioris termini per dimensionem c, fit

„ 3y

„ $3y + 4c$ diviſor quæſitus. Ita ſi quantitas ſit $x^4 - bx^3 - 5bbxx$
„ $+ 12b^3x - 6b^4$: poſito 1 pro b, & quantitatis reſultantis $x^4 - x^3 -$
„ $5xx + 12x - 6$ invento diviſore $xx + 2x - 2$, compleo ejus defi-
„ cientes dimenſiones per dimenſiones b, & ſic habeo diviſorem quæſitum
„ $xx + 2bx - 2bb$.

COMMENTARIUS.

19. Clare patet in diviſore b deſiderari, & ibi tantum deſiderari ubi dimenſiones deficiunt, quare hæc alia demonſtratione non indigent.

PERGIT NEWTONUS.

20. „ Ubi in quantitate propoſita tres vel plures ſunt litteræ & ejus termini
„ omnes ad eaſdem dimenſiones adſcendunt; poteſt diviſor per præcedentes
„ regulas inveniri.

COMMENTARIUS.

Exemplo patebit, quomodo operandum quando tres ſunt litteræ in quantitate propoſita.

21. Sit hæc

$$\begin{aligned} 12x^5 - 10ax^4 - 26aax^3 + 24a^3xx - 4a^3bx + 12a^4b \\ - 9bx^4 + 12abx^3 - 8aabxx + 6aabbx + 32aab^3 \\ + 6bbx^3 - 8abbxx - 12ab^3x - 12b^5 \\ - 24b^3xx + 18b^4x. \end{aligned}$$

1°. Pro a & b ſubſtituo unitatem, & propoſita quantitas mutatur in hanc

$$12x^5 - 19x^4 - 8x^3 - 16xx + 8x + 32;$$

cujus diviſorem duarum dimenſionum detego

$$4xx - x - 4.$$

2°. Pro a ſubſtituo 0., pro b unitatem, & quantitas in hanc convertitur

$$12x^5 - 9x^4 + 6x^3 - 24xx + 18x - 12;$$

cujus diviſorem duarum dimenſionum detego

$$4xx - 3x + 2.$$

3°. Pro a ſubſtituo 1., pro b, 0., & habeo

$$12x^5 - 10x^4 - 26x^3 + 24xx;$$

quam divido per xx, & prodit

$$12x^3 - 10xx - 26x + 24;$$

cu-

cujus diviſorem duarum dimenſionum detego

$$4xx + 2x - 6.$$

Habetur hic quærendo diviſorem unius dimenſionis $3x - 4.$, per quem facta diviſione prodit $4xx + 2x - 6.$

Tres hi diviſores ſunt idem diviſor quæſitus,

$$4xx - x - 4.$$
$$4xx - 3x + 2.$$
$$4xx + 2x - 6.$$

Hac de cauſa in ſingulis datur terminus ille, in quo x tantum datur ſine ulla alia littera, nempe

$$4xx.$$

In ſecundo diviſore deficiunt termini omnes in quibus datur a; & omnes, in quibus datur b ſolum, aut b cum x, habentur, pro 1. ſubſtituendo b, id eſt, ſi litterâ b dimenſiones compleantur; hi termini ergo ſunt,

$$-3bx + 2bb.$$

Eodem modo tertius diviſor dat terminos in quibus a cum x, & a ſolum datur,

$$+ 2ax - 6aa.$$

Terminus diviſoris in quo ab habetur, detegitur colligendo in unam ſummam terminos ultimos $+ 2$, 6, ſecundi & tertii diviſoris, quam ſummam ſubtrahimus ex ultimo termino $- 4.$ primi diviſoris, & per reliquum ſervato ſigno multiplicamus ab: in hoc exemplo reliquum eſt o. & indicat terminum hunc in diviſore quæſito non haberi.

Ratio hujus ultimæ operationis eſt hæc, in primo diviſore $- 4$ indicat quoties aa, bb, & ab, ſimul habentur in diviſore quæſito; quia a & b unitate repræſentantur; $+ 2$ indicat quoties bb, & $- 6$ quoties aa, in eodem diviſore contineantur; ergo ſubtrahendo $+ 2 - 6$ ex $- 4$, habemus quoties detur ab.

Colligendo nunc in unam ſummam quantitates detectas, habemus diviſorem quæſitum.

$$\begin{array}{l} 4xx - 3bx + 2bb \\ \qquad\quad + 2ax - 6aa \end{array}$$

Quando varii diviſores poſt ſingulas ſubſtitutiones deteguntur, illi com- 22.
parandi ſunt qui eundem primum terminum habent, ut hoc clarum eſt.

Sed ſi plures dentur pro ſingulis ſubſtitutionibus qui eundem habeant primum terminum, ambagibus involvitur operatio.

Eadem hæc methodus quatuor quinque & pluribus litteris poteſt applicari.

23. Dentur ex. gr. litteræ a, b, c, d, e. Decem faciendæ erunt ſubſtitutiones, & illa ſola intacta relinquenda erit littera, juxta cujus dimenſiones ordinata eſt quantitas; ſit hæc a; ſubſtitutiones erunt

1.	$b = 1$.	& $c = d = e = 0$.
2.	$c = 1$.	& $b = d = e = 0$.
3.	$d = 1$.	& $b = c = e = 0$.
4.	$e = 1$.	& $b = c = d = 0$.
5.	$b = c = 1$.	& $d = e = 0$.
6.	$b = d = 1$.	& $c = e = 0$.
7.	$b = e = 1$.	& $c = d = 0$.
8.	$c = d = 1$.	& $b = e = 0$.
9.	$c = e = 1$.	& $b = d = 0$.
10.	$d = e = 1$.	& $b = c = 0$.

Hiſce decem ſubſtitutionibus totidem deteguntur quantitates quarum diviſores duarum dimenſionum quærendi, & decies idem diviſor detegitur, & comparatione verus elicitur.

24. Si plures quantitas propoſita habeat diviſores, qui eundem primum terminum habent, pro alia littera ordinanda eſt quantitas.

PERGIT NEWTONUS.

25. „ Sed expeditius hoc modo diviſor detegitur.
„ *Quære omnes diviſores terminorum omnium in quibus litterarum aliqua non* „ *eſt, item terminorum omnium in quibus alia aliqua litterarum non eſt, pa-* „ *riter & omnium in quibus tertia littera quartaque & quinta non eſt ſi tot* „ *ſunt litteræ. Et ſic percurre omnes litteras. Et e regione litterarum colloca* „ *diviſores reſpective. Dein vide ſi in ſerie aliqua diviſorum per omnes litte-* „ *ras pergente, partes omnes unicam tantum litteram involventes tot vicibus* „ *reperiantur quot ſunt litteræ una dempta in quantitate propoſita: & partes* „ *duas litteras involventes tot vicibus quot ſunt litteræ demptis duabus in ea-* „ *dem quantitate. Si ita eſt; partes iſtæ omnes ſub ſignis ſuis ſemel ſumptæ* „ *erunt diviſor quæſitus.*

„ Ut ſi proponatur quantitas $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx -$ „ $6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$; terminorum $8b^3 - 12bbc$ „ $- 4bcc + 6c^3$, in quibus non eſt x, diviſores unius dimenſionis per præ- „ cedentes regulas inventi erunt $2b - 3c$ & $4b - 6c$: terminorum $12x^3$ „ $+ 9cxx + 8ccx + 6c^3$, in quibus non eſt b, diviſor unicus $4x + 3c$: „ ac terminorum $12x^3 - 14bxx - 12bbx + 8b^3$, in quibus non eſt c, di- „ viſores $2x - b$ & $4x - 2b$. Hos diviſores e regione litterarum x, „ b, c, diſpono, ut hic vides.

x	$2b - 3c.\ 4b - 6c.$
b	$4x + 3c.$
c	$2x - b.\ 4x - 2b.$

„ Cum tres ſint litteræ & diviſorum partes ſingulæ non niſi ſingulas lit-
„ teras involvant, in ſerie diviſorum debent partes illæ bis reperiri. At
„ diviſorum $4b - 6c$ & $2x - b$ partes $4b$, $6c$, $2x$, b non niſi ſemel
„ occurrunt. Extra diviſorem illum cujus ſunt partes non reperiuntur.
„ Quare diviſores illos negligo. Reſtant tantum tres diviſores $2b - 3c$.
„ $4x + 3c$ & $4x - 2b$. Hi in ſerie ſunt per omnes litteras x, b, c per-
„ gente, & eorum partes ſingulæ $2b.\ 3c.\ 4x.$ bis reperiuntur in ipſis ut
„ oportuit, idque cum ſignis iiſdem, ſi modo ſigna diviſoris $2b - 3c$
„ mutentur, & ejus loco ſcribatur $-2b + 3c$. Nam ſigna diviſoris cu-
„ juſvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b.\ 3c.\ 4x.$ ſe-
„ mel ſub ſignis ſuis, & aggregatum $-2b + 3c + 4x$ diviſor erit quem
„ invenire oportuit. Nam ſi per hunc dividas quantitatem propoſitam
„ prodibit $3xx - 2bx + 2cc - 4bb$.

„ Rurſus ſi quantitas ſit $12x^5 - 10ax^4 - 9bx^4 - 26aax^3 + 12abx^3$ 26.
„ $+ 6bbx^3 + 24a^3xx - 8aabxx - 8abbxx - 24b^3xx - 4a^3bx +$
„ $6aabbx - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^4b + 32aab^3 - 12b^5$; diviſores
„ terminorum in quibus x non eſt colloco e regione x; illos terminorum
„ in quibus a non eſt, e regione a; & illos terminorum in quibus b non
„ eſt, e regione b, ut hic vides.

x	$b.\ 2b.\ 4b.\ aa + 3bb.\ 2aa + 6bb.\ 4aa + 12bb.$ $bb - 3aa.\ 2bb - 6aa.\ 4bb - 12aa$
a	$4xx - 3bx + 2bb.\ 12xx - 9bx + 6bb.$
b	$x.\ 2x.\ 3x - 4a.\ 6x - 8a.\ 3xx - 4ax.\ 6xx - 8ax.$ $2xx + ax - 3aa.\ 4xx + 2ax - 6aa.$

„ Dein illos omnes qui ſunt unius dimenſionis rejiciendos eſſe ſentio,
„ quia ſimplices $b.\ 2b.\ 4b.\ x.\ 2x$, & partes compoſitorum $3x - 4a$.
„ $6x - 8a$, non niſi ſemel in omnibus diviſoribus reperiuntur; tres au-
„ tem ſunt litteræ in quantitate propoſita, & partes illæ unicam tantum in-
„ volvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter diviſores duarum
„ dimenſionum $aa + 3bb.\ 2aa + 6bb.\ 4aa + 12bb.\ bb - 3aa$ &
„ $4bb - 12aa$ rejicio, quia partes eorum $aa.\ 2aa.\ 4aa.\ bb$ & $4bb$
„ unicam tantum litteram a vel b involventes non niſi ſemel reperiuntur.
„ Diviſoris autem $2bb - 6aa$, qui ſolus reſtat e regione x, partes $2bb$
„ & $6aa$, quæ ſimiliter unicam tantum litteram involvunt, iterum reperiun-
„ tur; nempe pars $2bb$ in diviſore $4xx - 3bx + 2bb$, & pars $6aa$ in
„ diviſore $4xx + 2ax - 6aa$. Quin etiam hi tres diviſores in ſerie ſunt,

„ ſtantes e regione trium litterarum x, a, b; & omnes eorum partes $2bb$, „ $6aa$, $4xx$, quæ unicam tantum litteram involvunt, bis reperiuntur in ipſis, „ idque ſub propriis ſignis; partes vero $3bx$, $2ax$, quæ duas litteras invol- „ vunt, non niſi ſemel occurrunt in ipſis. Quare horum trium diviſorum „ partes omnes diverſæ $2bb$, $6aa$, $4xx$, $3bx$, $2ax$ ſub ſignis ſuis con- „ nexæ, diviſorem deſideratum $2bb - 6aa + 4xx - 3bx + 2ax$ con- „ flabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propoſitam & oritur $3x^3$ „ $- 4axx - 2aab - 6b^3$.

COMMENTARIUS.

Methodi hujus demonſtratio facilis eſt.

27. Sit quantitatis propoſitæ diviſor

$$4xx - 3bx + 2bb$$
$$+ 2ax - 6aa.$$

Auctor ſucceſſive pro ſingulis litteris ſubſtituit o., dum rejicit quantitates in quibus littera datur, quo diviſor ſervatur, ſublatis illis quantitatibus in quibus illa littera habetur pro qua o. ſubſtituit.

Diviſor hic ergo, ſublato x, mutatur in hunc

$$+ 2bb - 6aa$$

qui eſt diviſor quantitatis propoſitæ ex qua x etiam tollitur, id eſt, eſt diviſor illius partis quantitatis propoſitæ in qua x non datur.

Sublato b, diviſor eſt

$$4xx + 2ax - 6aa.$$

Sublato a, eſt

$$4xx - 3bx + 2bb.$$

Qui diviſores neceſſario dantur inter diviſores quibus Auctor utitur.

28. Clarum etiam eſt tot dari diviſores quot dantur litteræ, id eſt, toties eundem diviſorem repeti.

In qua repetitione quantitates quæ unicam continent litteram neceſſario in omnibus dantur, excepto illo unico in quo pro littera hac ponitur o. Quantitates quæ duas continent litteras in omnibus habentur, exceptis illis duobus in quibus pro una ex his litteris o. ſubſtituitur.

Unde manifeſtum eſt Auctorem ſua methodo omnes detegere quantitates diviſoris quæſiti.

29. Si plures dentur diviſores ejuſdem dimenſionis, ſeparandæ ſunt ſeries diviſorum, quæ percurruntur, & ſingulæ diviſorem unum dabunt.

Pauca quæ de hac materia in Auctore ſuperſunt, & hic adjiciuntur, non indigent commentario.

PER

PERGIT NEWTONUS.

„ *Si quantitatis alicujus termini omnes non sunt æque alti, complendæ sunt* 30.
„ *dimensiones deficientes per dimensiones litteræ cujusvis assumptæ, dein per*
„ *præcedentes regulas invento divisore, littera assumpta delenda est.* Ut si
„ quantitas sit $12x^3 - 14bxx + 9xx - 12bbx - 6bx + 8x + 8b^3$
„ $- 12bb - 4b + 6$: assume litteram quamvis c, & per dimensiones ejus
„ comple dimensiones quantitatis propositæ ad hunc modum $12x^3 -$
„ $14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc$
„ $+ 6c^3$. Dein hujus divisore $4x - 2b + 3c$ invento, dele c, & habe-
„ bitur divisor desideratus $4x - 2b + 3$.

„ Aliquando divisores facilius quam per has regulas inveniri possunt. Ut 31.
„ si littera aliqua in quantitate proposita sit unius tantum dimensionis; quæ-
„ rendus erit maximus communis divisor terminorum in quibus littera illa
„ reperitur, & reliquorum terminorum in quibus non reperitur, nam divi-
„ sor ille totam dividet. Et si nullus est ejusmodi communis divisor, nul-
„ lus erit divisor totius. Exempli gratia, si proponatur quantitas $x^4 -$
„ $3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c - 8a^4$;
„ quæratur communis divisor terminorum $+ cx^3 - acxx - 8aacx +$
„ $6a^3c$ in quibus c unius est tantum dimensionis, & terminorum reliquo-
„ rum $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$ ac divisor ille, nempe
„ $xx + 2ax - 2aa$, dividet totam quantitatem.

NEWTONI ARITHMETICA UNIVERSALIS

Pag. 59. 50.

REGULA EXTRAHENDI ALTIORES RADICES EX QUANTITATIBUS NUMERALIBUS DUARUM POTENTIA COMMENSURABILIUM PARTIUM.

„ *Sit quantitas* A $\pm$ B. *Ejus pars major* A. *Index radicis extrahen-* 32.
„ *dæ c. Quære minimum numerum n, cujus potestas n^c dividitur per* AA - BB
„ *sine residuo, & sit quotus* Q. *Computa* $\sqrt[c]{A + B \times \sqrt{Q}}$ *in numeris*
„ *integris proximis. Sit illud r. Divide* A $\sqrt{Q}$ *per maximum divisorem*
„ *rationalem. Sit quotus s, sitque* $\dfrac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis t. Et*
„ *erit* $\dfrac{ts \pm \sqrt{ttss - n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *radix quæsita, si modo radix extrahi potest.*

33. „ Ut si radix cubica extrahenda sit ex $\sqrt{968} + 25$; erit $AA - BB = 343$; ejus divisores 7, 7, 7; ergo $n = 7$ & $Q = 1$. Porro $\overline{A + B} \times \sqrt{Q}$, seu $\sqrt{968} + 25$, extracta prioris partis radice, fit paulo major quam 56: ejus radix cubica in numeris proximis est 4. Ergo $r = 4$. Insuper $A \sqrt{Q}$ seu $\sqrt{968}$ extrahendo quidquid rationale est fit $22 \sqrt{2}$. Ergo $\sqrt{2}$, ejus pars radicalis est s, & $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ seu $\frac{5\frac{3}{4}}{2\sqrt{2}}$ in numeris integris proximis est 2. Ergo $t = 2$. Denique ts est $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss - n}$ est 1 & $\sqrt[2c]{Q}$ seu $\sqrt[6]{1}$ est 1. Ergo $2\sqrt{2} + 1$ est radix quæsita si modo radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem si cubus ipsius $2\sqrt{2} + 1$ sit $\sqrt{968} + 25$, & res succedit.

34. „ Rursus si radix cubica extrahenda sit ex $68 - \sqrt{4374}$; erit $AA - BB = 250$, cujus divisores sunt 5, 5, 5, 2. Ergo $n = 5 \times 2 = 10$, & $Q = 4$. Et $\sqrt[c]{\overline{A + B} \times \sqrt{Q}}$ seu $\sqrt[3]{\overline{68 + \sqrt{4374}} \times 2}$ in numeris proximis integris est $7 = r$. Insuper $A \sqrt{Q}$ seu $68\sqrt{4}$ extrahendo quicquid rationale est fit $136\sqrt{1}$. Ergo $s = 1$, & $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ seu $\frac{7 + \frac{10}{7}}{2}$ in numerus integris proximis est $4 = t$: Ergo $ts = 4$, $\sqrt{ttss - n} = \sqrt{6}$ & $\sqrt[2c]{Q} = \sqrt[6]{4}$ seu $\sqrt[3]{2}$, atque adeo radix tentanda $\frac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

35. „ Iterum si radix quadrato-cubica extrahenda sit ex $29\sqrt{6} + 41\sqrt{3}$; erit $AA - BB = 3$, adeoque $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $ts = \sqrt{6}$, $\sqrt{ttss - n} = \sqrt{3}$ & $\sqrt[2c]{Q} = \sqrt[10]{81}$ seu $\sqrt[5]{9}$, atque adeo radix tentanda $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

36. „ Cæterum in hujusmodi operationibus si quantitas fractio sit, vel partes ejus communem habeant divisorem; radices denominatoris, & factorum seorsim extrahe. Ut si ex $\sqrt{242} - 12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda sit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt{968} - 25}{2}$.

„ Dein

„ Dein extracta seorsim numeratoris ac denominatoris radice cubica orie-
„ tur $\frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$.

„ Rursus si ex $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda sit; 37.
„ divide partes per communem divisorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11 + \sqrt{125}$.
„ Unde quantitas proposita valet $\sqrt[3]{3}$ in $\overline{11 + \sqrt{125}}$, cujus radix in-
„ venietur extrahendo seorsim radicem factoris utriusque $\sqrt[3]{3}$ & $11 +$
„ $\sqrt{125}$.

COMMENTARIUS.

Methodus hæc in praxi facilior est aliis, quæ apud scriptores habentur; & magis universalis est illa, quam Franciscus van Schooten pro extrahendis radicibus ex Binomiis tradidit, & pro radice cubica demonstravit ad calcem commentariorum in Cartesii Geometriam.

Hæc autem Newtoni methodus alia demonstratione indiget, cum tantum parti methodi Newtonianæ Schoteni demonstratio applicari possit.

LEMMA I.

38. *Si ad potestatem quamcunque, cujus index est* c, *elevetur Binomium* $a + b$, *& potestatis hujus termini, alternatim sumti*, id est, 1us. 3us. 5us. 7us. &c. & 2^{dus}. 4^{tus}. 6^{tus}. 8us. &c. *in unam summam colligantur, & ita integra potestas in duas partes secetur, differentia quadratorum partium erit* $\overline{aa - bb}^{c}$.

Per analogiam operationum hoc fit manifestum, quare inutile foret in quærenda longa universali demonstratione hærere.

Quadratum radicis $a \pm b$ est

$$aa \pm 2ab + bb,$$

& partes sunt

$$aa + bb$$
$$\pm 2ab.$$

Quarum differentia quadratorum est quadratum radicis $aa - bb$.

Cubi $a \pm b$ partes sunt

$$a^3 + 3abb$$
$$\pm 3aab \pm b^3$$

Quadratorum differentia est cubus radicis $aa - bb$.

Hæc patent operationes instituendo, & si quis circa quasdam alias potestates operationes continuaverit, facile percipiet eandem propositionem necessario in omnibus locum habere.

LEM-

LEMMA II.

39. *Si* a *&* b *numeri fuerint, quorum* a *est major, & Binomium* $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ *elevetur ad potestatem* c, *numerusque hic fuerit impar, potestas hæc erit Binomium cujus membrum unum multiplicatur per* $\sqrt{a}$ *& alterum per* $\sqrt{b}$, *& erunt membra hæc partes memoratæ in Lem.* 1. *quarum major est illa quæ per* $\sqrt{a}$ *multiplicatur.*

Cum c sit numerus impar, $c - 1$ est par, potestque in duas partes secari; pono idcirco $2n = c - 1$.

Si nunc Binomium datum elevemus ad potestatem quamcunque, cujus index est numerus impar c, videbimus statim terminos hos esse, neglectis signis & coëficientibus,

$$a^{n}\sqrt{a},\ a^{n}\sqrt{b},\ a^{n-1}\,b\sqrt{a},\ a^{n-1}\,b\sqrt{b},\ a^{n-2}b^{2}\sqrt{a},\ a^{n-2}b^{2}\sqrt{b}.\ \&c.$$

Collectis in unam summam terminis, 1. 3. 5. &c. habemus numerum rationalem multiplicatum per $\sqrt{a}$; & summa terminorum, 2. 4. 6. &c. est numerus rationalis qui multiplicatur per $\sqrt{b}$.

Si etiam pro potestate quacunque operationem instituamus, videbimus summas has constare ex terminis respondentibus quæ in eo solo differunt, quod ubi a in uno datur, b reperitur in altero; quare, propter majorem a, ille terminus qui habet a, ubi alter habet b, id est terminus qui per $\sqrt{a}$ multiplicatur, alterum superabit.

COROLLARIUM.

40. Si membrorum radicis unum $\sqrt{a}$, aut $\sqrt{b}$, sit rationale, & rationale erit illud membrum potestatis quod per rationalem partem radicis multiplicatur, eritque rationale membrum potestatis altero majus, si rationalis terminus radicis alterum superet.

LEMMA III.

41. *Si iisdem positis numerus* c *fuerit par, potestas format Binomium, cujus membrum unum rationale est, alterum multiplicatur per* $\sqrt{ab}$. *Sunt etiam membra partes de quibus agitur in Lem.* 1.

Termini enim potestatis sunt, si $2m = c$, (in quo casu m est numerus integer) neglectis signis & coëficientibus,

$$\overset{1.}{a^{m}},\quad \overset{3.}{a^{m-1}b},\quad \overset{5.}{a^{m-2}bb},\quad \overset{7.}{a^{m-3}b^{3}},$$

$$\overset{2.}{a^{m-1}\sqrt{ab}},\quad \overset{4.}{a^{m-2}b\sqrt{ab}},\quad \overset{6.}{a^{m-3}bb\sqrt{ab}};$$

ut hoc patebit si operatio pro potestate quacunque cujus index est numerus par instituatur.

COROLLARIUM.

Si terminus unus radicis $\sqrt{a}$ aut $\sqrt{b}$ fuerit rationalis, membrum potestatis irrationale per eandem irrationalem quantitatem multiplicatur quæ irrationalem radicis multiplicat. Sit Ex. gr. $a = ee$, erit nunc terminus $\sqrt{a} = e$ rationalis & $\sqrt{ab} = e\sqrt{b}$, & $\sqrt{b}$ irrationalis est quantitas quæ membrum irrationale potestatis multiplicat. 42.

LEMMA IV.

Potestas quæcunque Binomii numeralis $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ *habet ambo membra positiva; Binomii, sive Apotomes,* $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ *potestas membrum unum negativum habet; ipsa vero membra non differunt sive detur* $+ \sqrt{b}$, *sive* $- \sqrt{b}$. 43.

Hoc ex formatione potestatum sequi illi patebit, qui potestates aliquas formaverit.

LEMMA V.

Si Binomium $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ *elevetur ad potestatem, cujus index est* c, *differentia quadratorum membrorum potestatis est* $\overline{a - b}^{c}$. 44.

Sequitur hoc ex collatione Lem. 2. & 3. cum Lem. 1.

LEMMA VI.

Non potest ex Binomio extrahi radix cujus index est c, *id est* $\sqrt[c]{}$, *nisi differentia quadratorum partium Binomii dati habeat* $\sqrt[c]{}$ *rationalem.* 45.

Radix, si possit exprimi, continet tantum radices quadratas, ut hoc sequitur ex Lem. 2. & 3. quia tales tantum radices in ipsa potestate continentur.

Ponamus nunc radicem Binomii dati posse exprimi, & sit hæc $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. Differentia quadratorum partium Binomii dati erit $\overline{a - b}^{c}$ (44.) cujus $\sqrt[c]{}$ est $a - b$, quæ quantitas rationalis est; quod ergo semper contingit ubi radix exprimi potest.

LEMMA VII.

Si duæ, geometrice decrescentes Proportiones continuæ, habeant communem terminum medium, major inter primos, quam inter ultimos progressionum terminos datur differentia. 46.

Sint progressiones

$$\div A, B, C$$
$$\div D, B, E$$

Ergo A ⋈ C = B ⋈ B = D ⋈ E; &

A, D :: E, C.

Divid. & altern.

A — D, E — C :: D, C;

ſed quia proportiones decreſcunt, D ſuperat B quæ major eſt C; ergo D excedit C, & A — D, differentia primorum terminorum, ſuperat E — C differentiam ultimorum.

LEMMA VIII.

47. *Non poteſt ex Binomio extrahi* $\sqrt[c]{}$, *ſi* c *fuerit par, niſi membrum majus Binomii dati ſit rationale.*

Si $\sqrt[c]{}$ poteſt extrahi, poteſt & radix quadrata ex Binomio dato extrahi; eſt enim hæc ipſa $\sqrt[c]{}$, elevata ad poteſtatem $\frac{1}{2}c$, qui index eſt numerus integer, cum c ſit par. Sit radix hæc quadrata Binomii dati Binomium $a \pm b$, cujus quadratum $aa + bb \pm 2ab$ eſt Binomium propoſitum.

Radix $a \pm b$ etiam continet tantum radices quadratas (39. 41.); quare $aa + bb$ eſt membrum rationale Binomii dati propoſiti, & $2ab$ membrum irrationale.

Demonſtrandum ergo $aa + bb$ ſemper ſuperare $2ab$; nam inde conſtabit radicem non poſſe extrahi niſi rationale membrum majus fuerit.

Non ſunt æquales a & b, ſi enim tales forent quantitas propoſita foret aut Monomium rationale $2aa + 2bb$, aut 0.

Ponamus ergo a & b inæquales. Clarum eſt $aa, ab :: ab, bb$. ideo $aa + bb$ ſuperat $2ab$ juxta prop. 25. lib. v. El. Eucl.

METHODI AUCTORIS DEMONSTRATIO.

48. Binomium datum eſt A ± B; n detegitur, & Q determinatur ita, ut $AAQ - BBQ = n^c$.

Non Binomii dati, ſed hujus $A\sqrt{Q} \pm B\sqrt{Q}$ radicem quærit Auctor, & ubi hanc detectam habet, ipſam dividit per $\sqrt[c]{}$ ipſius $\sqrt{Q}$, id eſt per $\sqrt[2c]{Q}$, ut habeat radicem Binomii dati A ± B.

Præparatione hac Binomium acquirit conditiones, ſine quibus ipſius radix exprimi non poſſet, (45.); eſt nunc n^c differentia quadratorum membrorum $A\sqrt{Q}$ & $B\sqrt{Q}$, ex qua ſi $\sqrt[c]{}$ extrahatur, habemus rationalem numerum n.

Po-

Ponamus $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$ exprimere radicem quæſitam Binomii $A\sqrt{Q} \pm B\sqrt{Q}$; & $x\sqrt{y}$ eſſe partem majorem. Cum in hiſce de fractionibus non agatur, de quibus Auctor ſeparatim tractat, erunt x, y, z, numeri integri; nam cum in poteſtate propoſita non dentur fractiones, neque in radice dantur.

Differentia quadratorum membrorum Binomii $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$ elevati ad poteſtatem c, id eſt differentia quadratorum $A\sqrt{Q}$ & $B\sqrt{Q}$, eſt $\overline{xxy - z}^{c}$ (44.). Ergo

$$\overline{xxy - z}^{c} = AAQ - BBQ = n^{c}$$

&

$$xxy - z = n.$$

Ex hac æquatione deducimus decreſcentem proportionem.

$$\div\; x\sqrt{y} + \sqrt{z},\ \sqrt{n},\ x\sqrt{y} - \sqrt{z}.$$

Decreſcit etiam hæc alia

$$\div\; r,\ \sqrt{n},\ \tfrac{n}{r}$$

Nam r ſuperare $\sqrt{n}$ demonſtramus. In prima proportione differentia inter primum & tertium terminum eſt $2\sqrt{z}$, id eſt, non minor eſt duobus. Quia proportio decreſcit, differentia inter primum & ſecundum terminum ſuperat ſemiſſem differentiæ inter primum & tertium, id eſt $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$ & $\sqrt{n}$ plus quam unitate differunt, ſed r cum $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$ non differt $\frac{1}{2}$, dum in numeris integris proximis hanc quantitatem exprimit (32. 43.); ergo r minus quam $\sqrt{n}$ differt cum quantitate, quæ hac ultima major eſt, quare r neceſſario ſuperat $\sqrt{n}$.

Differentia inter r & radicem $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$, ut videmus, eſt minor $\frac{1}{2}$, minor ergo $\frac{1}{2}$ etiam eſt differentia inter $x\sqrt{y} - \sqrt{z}$ & $\frac{n}{r}$ (46.).

In duabus etiam, quas conſideramus, proportionibus, ſi $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$ ſuperat numerum r, $\frac{n}{r}$ major eſt quantitate $x\sqrt{y} - \sqrt{z}$; ſi ergo colligamus in unam ſummam $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$, $x\sqrt{y} - \sqrt{z}$, ut & r, $\frac{n}{r}$ ſummarum $2x\sqrt{y}$, $r + \frac{n}{r}$, differentia etiam minor erit $\frac{1}{2}$; in hoc enim caſu minuitur differentia, quia una aliam corrigit.

Ergo differentia inter $\dfrac{r + \frac{n}{r}}{2}$ & $x\sqrt{y}$ membrum maximum radicis minor eſt $\frac{1}{4}$.

His poſitis quatuor caſus examinandi ſunt; nam $A\sqrt{Q}$ eſt aut rationalis aut ſurda, & in utroque caſu c eſt par aut impar.

49. CAS. I. Rationalis eſt quantitas $A\sqrt{Q}$, & c impar.

In hoc caſu $x\sqrt{y}$ pars major radicis eſt rationalis (40.), eſt ergo numerus integer; non enim hic, ut jam monuimus, agitur de fractionibus. Idcirco $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ eſt ipſum membrum maximum radicis; nam numeri integri ad minimum unitate differunt, & quantitas hæc non $\frac{1}{4}$ differt cum membro maximo.

In hoc caſu etiam $s = 1.$; & ideo

$\frac{r + \frac{n}{r}}{2} = \frac{r + \frac{n}{r}}{2s} = t = ts$, & membrum maximum bene per reg. Auctoris determinatum eſt.

50. CAS. II. Irrationalis eſt quantitas $A\sqrt{Q}$ & numerus c impar.

Eſt nunc $x\sqrt{y}$ numerus ſurdus, & quantitas $A\sqrt{Q}$ ad minimos terminos reducta eandem radicalem habet cum $x\sqrt{y}$ (39.) Radicalem hanc Auctor quærit & vocat s; ergo $s = \sqrt{y}$.

Vidimus $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ cum $x\sqrt{y}$ non differre $\frac{1}{4}$; minus differunt ſi per s, aut $\sqrt{y}$, dividantur; quia quantitas hæc ſuperat unitatem. Idcirco $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ & x minus differunt $\frac{1}{4}$; & ideo x eſt numerus integer proximus ipſi $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$, id eſt $t = x$.

Sed jam habuimus $s = \sqrt{y}$; ergo $ts = x\sqrt{y}$, & bene radicis membrum primum fuit determinatum.

51. CAS. III. Rationalis eſt quantitas $A\sqrt{Q}$ & c numerus par.

In hoc caſu, non ut in *caſ.* 1, conſtat $x\sqrt{y}$ eſſe rationale (41.), ideo caſus hic 3[us]. in duos ſubdividitur.

Quando $x\sqrt{y}$ eſt rationale demonſtratio *caſ.* 1. locum habet, & detegitur pars major radicis.

Si vero $x\sqrt{y}$ ſit ſurda quantitas, methodus ad veram radicem non conducit; nam propter rationalem $A\sqrt{Q}$, ſemper $s = 1$, & non $\sqrt{y}$ quod deſideratur, ut in *caſu* 2. demonſtravimus. Vide ſubjuncta Cor. 2. & 3.

52. CAS. IV. Irrationalis eſt quantitas $A\sqrt{Q}$, & c numerus par.

Ex hac quantitate radix quæſita non poteſt extrahi (47), & inutile foret Auctoris regulam, aut aliam quamcunque, tali quantitati applicare.

53. Dato nunc $x\sqrt{y}$ maximo membro radicis æquale ts, demonſtramus $\sqrt{z} = \sqrt{ttss - n}$, id eſt $z = ttss - n$.

Ha-

Habemus

$$x\sqrt{y} = ts.$$
$$xxy = ttss.$$

Sed ut ſuperius vidimus

$$xxy - z = n.$$

Ergo ſubtrahendo æquationem ultimam ex præcedenti

$$xxy - xxy + z = z = ttss - n.$$

Quod demonſtrandum erat.

Eodem ſigno radicis membra jungenda eſſe, quo membra quantitatis propoſitæ junguntur, clarum eſt (43.).

Radicem detectam tentandam eſſe dicit Auctor, quia demonſtratio ponit radicem poſſe exprimi per $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$, & ideo locum tantum habet quando radix extrahi poteſt; ſed minime ex demonſtratione ſequitur ſemper poſſe.

Ex demonſtratis ſequentia deducimus Corollaria, quibus methodus Auctoris illuſtratur.

COROLLARIUM. I.

Quando c *eſt numerus impar, ſemper methodus Auctoris conducit ad veram radicem, quando hæc extrahi poteſt.* (49. 50.). 54.

COROLLARIUM II.

Quando c *eſt par & radix extrahi poteſt, detegitur hæc ſi alterutrum membrorum radicis fuerit rationale.* 55.

Conſtat hoc ex demonſtratis, ſi rationale fuerit membrum majus radicis (51.); ſed ſi membrum hoc irrationale fuerit, detegitur radix, ſi $B\sqrt{Q}$ adhibeatur in detegendo s non $A\sqrt{Q}$; ut hoc patet hiſce caſibus applicando demonſtrata, conſtat enim in hoc caſu etiam eſſe $s = \sqrt{y}$. (42)

Unde deducimus, cum ante initam operationem non poſſimus prævidere utrum membrum radicis rationale ſit majus an minus, ſi radix per methodum Auctoris detecta, quæ ſemper habebit majus membrum rationale, non ſit vera, aliam quærendam eſſe in qua majus membrum ſit irrationale.

COROLLARIUM III.

Si nulla ex ambabus radicibus in Coroll. præcedenti memoratis vera ſit, neque inde poterimus concludere radicem extrahi non poſſe. 56.

Si enim membra ambo radicis fuerint irrationalia $x\sqrt{y}$ & $\sqrt{z}$, erit tamen $A\sqrt{Q}$ rationale (47.) & $s = 1$. (49.), per methodum Auctoris.

 Si

Si juxta obſervata in Coroll. præcedenti in ſubſidium vocemus $B\sqrt{Q}$, erit $s = \sqrt{yz}$ (41.), & non inficias ire poſſumus in hoc caſu fallere Auctoris methodum; qui defectus tamen uſum ipſius methodi non minuit, ſi, ut in ſua methodo præſcribit *van Schooten*, extractione radicis quadratæ, per methodum notiſſimam, Problema reducamus ad extractionem radicis cujus index eſt numerus impar.

COROLLARIUM. IV.

57\. *Quando index radicis eſt numerus par & majus membrum Binomii propoſiti eſt irrationale, non poteſt radix exprimi*, & non quærenda eſt, ut jam monuimus (52.)

F I N I S.

DE

DE DETERMINANDA FORMA SERIEI INFINITAE ADSUMTAE

METHODUS NOVA.

P R Æ F A T I O.

Ubi quantitas quæritur quæ exacte exprimi non potest, per Approximationem valor ipsius investigatur, valorque hic, quantum ad praxin, plerumque cum vero valore æquiparatur.

Serierum infinitarum convergentium usum in his Approximationibus nullum latet Mathematicum.

Inter varias methodos quibus, data Æquatione, quantitatis cujuscunque valor serie convergente exprimitur, non immerito, in multis occasionibus, illa reliquis anteponitur, in qua series indeterminata adsumitur, quæ quantitati propositæ æqualis ponitur, & cujus postea termini quot libuerit determinantur.

Varia circa hasce solutiones sparsim apud Auctores habentur, sed de ipsa methodo explicanda parum solliciti videntur. Illi ipsi qui hanc exemplis explicare sibi proponunt, notum ponunt illud in quo solvendus latet nodus.

Sit ex. gr. determinanda y, *ex nota* x *in data Æquatione.*

Valorem ipsius y *adsumta serie indeterminata exprimunt, ponendo*

$$y = Ax^{n} + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} \text{ \&c.}$$

Explicatur quidem quomodo terminorum coëfficientes A, B, C, D, *&c. determinentur, quod difficultatem nullam habet; pro* n *&* r, *quasi sponte paterent, valores adponuntur, quamvis in his detegendis omnis hæreat difficultas.*

Circa hos numeros varia quidem observat Reyneau, Anal. démontrée art. 246. *Sed minime explicat qua regula numeri ipsi determinari queant.*

Newtonus, *cui tot & tanta debet Mathesis, determinationem demonstravit numeri* n; *si nempe hic applicemus quæ ille de investigatione primi termini tradidit in explicatione methodi alterius de seriebus infinitis.*

De investigatione numeri r *egit* Brook Tailor, *in tractatu* de Methodo Incrementorum Prop. 9.; *Sed quam tradidit regulam hanc in quibusdam occasionibus fallere observavit* Jacobus Stirling, *in tractatu* de Lineis tertii ordinis Newtonianis pag. 28; *qua occasione ipse aliam tradit* in quam se casu incidisse *fatetur*, & ejus demonstrationem postea frustra quæsivisse; quare illam esse ubique veram affirmare non audet.

Quo fundamento dubium hoc nitatur non video; sed quamvis ipsius regulam nunquam fallere persuasum habeam, non tamen hanc omnibus partibus perfectam credo: quid vero in ipsa desideretur dicam.

Computatio iniri potest, ubi numerus n *bene est determinatus, quamvis seriei adsumtæ vera seriei quæsitæ forma non tribuatur, si pro* r *divisor hujus quicunque adhibeatur; id est, in eandem absoluta computatione incidimus seriem, si modo in serie adsumta contineatur vera series.*

Ex. gr. Sit $n=3$ *&* $r=4$, *forma seriei est,*

$$y = Ax^3 + Bx^7 + Cx^{11} + Dx^{15} + \&c.$$

Qua serie adsumta computatio iniri potest; sed & hæ usu venire possunt

$$y = ax^3 + bx^5 + cx^7 + dx^9 + ex^{11} + \&c.$$

$$y = ax^3 + bx^4 + cx^5 + dx^6 + ex^7 + \&c.$$

Quæ singulæ primam continent. Si nunc cum data Æquatione computationem ineamus, in secunda serie detegimus,

$$a = A,\ b = o,\ c = B,\ d = o,\ e = C\ \&c.$$

In tertia habemus,

$$a = A,\ b = o,\ c = o,\ d = o,\ e = B,\ \&c.$$

Ita ut in tribus occasionibus perveniamus ad eandem seriem quæ formam habet primæ harum trium.

Methodo Stirlingii sæpissime non ad veram formam pervenimus, sed ad seriem quæ veram continet; ita ut ad hanc nisi per ambages non perveniamus; quæ pro parte quidem vitari possunt, quærendo, ante initam computationem, veram formam ex data alia, quæ illam continet, quod quomodo peculiari regula fieri potest explicaremus, nisi inpraxi labor multo minor esset, directe quærendo ipsam seriei quæsitæ formam.

Circa Tailoris *methodum observandum hac ipsa* Stirlingium *uti, correcta tantum in illis occasionibus ubi illam fallere contendit, circa quod observandum correctionem hanc non in omnibus occasionibus necessariam esse ubi adhibetur.*

Sed quamvis Tailoris *methodus a* Stirlingio *correcta in omnibus occasionibus sufficiat, non tamen tironibus ingratum fore credidi, si ipsis viam demonstrem, qua in multis occasionibus ambages evitare possunt, nostra enim Regula dat verum valorem ipsius* r, *quo series adsumta statim seriei quæsitæ formam acquirit. Ut autem hæc pluribus utilia sint, præmittam determinationem numeri* n *juxta methodum* Newtonianam, *quam in memorata nona prop. explicat* Tailor, *&* Stirling *in dicto tractatu prop. 2. ubi ipsis seriebus indeterminatis adsumtis hanc applicant.*

Non autem agam de determinatione coëfficientium A, B, C, D. *&c. quia hoc fit methodo vulgo nota, & in multis aliis occasionibus usitata.*

DETERMINATIO
FORMÆ SERIEI
INFINITÆ,
INDETERMINATÆ,
ADSUMTÆ.

PROPOSITIO I.

Investigatio Indicis primi termini Seriei.

Datur Æquatio in qua y quæritur, cujus valor per Potestates quantitatis x exprimi debet.

Pone y, æqualem seriei, infinitæ, indeterminatæ, adsumtæ, 1.

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$$

Determinandus est numerus n.

Formetur Parallelogrammum in Tab. IV. repræsentatum, cujus anguli notentur, ut videtur; patetque quomodo augeri & magis Parallelogrammum extendi queat. 2.

In Æquatione proposita pro y substitue x^n. Si differentiales dentur, pro differentia prima ipsius y pone x^{n-1}, pro secunda x^{n-2}, & sic de reliquis. 3.

In Parallelogrammo nota omnes angulos in quibus dantur indices Potestatum quantitatis x in Æquatione. 4.

Si indices fractiones contineant, puncta notanda etiam deteguntur; $n+\frac{1}{2}$ in medio datur inter n & $n+1$; $\frac{3}{2}n$ collocatur in medio inter n & $2n$.

Duc lineam in Parallelogrammo quæ per duo aut plura puncta notata transeat ita, ut omnia alia puncta notata ad eandem partem lineæ dentur; observando lineam nunquam ducendam esse juxta directionem linearum quæ sursum & deorsum tendunt, ut sunt lineæ AB, CD, &c. 5.

Pone omnes indices per quos linea transit æquales inter se, & determinabis n. 6.

EXEMPLUM.

7. Sit Æquatio data.

$$x^3y^7 - a^5 \frac{y^6}{x} - 6ba^2 x^3y^4 + 3b^4x^2y^4 - d^7xy^2 - a^8x^2 = 0.$$

Pro y ſubſtituo x^n (3.), & indices ſunt $7n + 3$, $6n - 1$, $4n + 3$, $4n + 2$, $2n + 1$, 2.

Notatis his in Parallelogrammo (4.), quatuor modis linea duci poteſt (5.);

1. Per 2, $2n + 1$, $6n - 1$, & eſt $n = \frac{1}{2}$. (6).
2. Per $6n - 1$, $7n + 3$, & eſt $n = -4$. (6).
3. Per $7n + 3$, $4n + 3$, & eſt $n = 0$. (6).
4. Per $4n + 3$, 2, & eſt $n = \frac{1}{4}$. (6).

8. Si pro n in ſingulis indicibus valor ſubſtituatur, ſinguli illorum per quos linea tranſivit, qui æquales ſunt inter ſe, formant indicem aut omnium minimum, ut in duobus primis caſibus; aut omnium maximum, ut in duobus ultimis.

9. Quando index hic eſt omnium maximus, in Parallelogrammo puncta omnia notata reperiuntur infra lineam ductam, & ſeries eo citius convergit quo major eſt x.

10. Contrarium obtinet quando index memoratus eſt omnium minimus.

PROPOSITIO II.

Determinatio differentiæ inter indices duorum terminorum ſeſe mutuo immediate ſequentium in ſerie adſumta.

11. In Serie adſumta & ſuperius memorata (1.),

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Dx^{n+2r} + Ex^{n+3r} + \&c.$$

differentiam, de qua in hac propoſitione agitur, r exprimit.

12. Quære n per Propoſitionem præcedentem, & in indicibus Poteſtatum x poſt ſubſtitutionem in n. 3. memoratam, pro n pone valorem.

13. Indices illi quos linea in Parallelogrammo tetigit (5.), & qui æquales ſunt inter ſe, pro unico habentur; ſubtrahe hunc ex omnibus reliquis ſi his minor ſit, ſin ſecus alios ex ipſo ſubtrahe, & formabis *Seriem* quam dicimus *differentiarum*.

14. Harum differentiarum quære maximum diviſorem communem.

15. Per hunc divide minimam ipſarum differentiarum, & quotientem ſerva.

16. Quære valorem ipſius A, quod ubi n datur, fieri poteſt; & numerum valorum æqualium nota; ſi non varii æquales dentur, unitas ſaltem exprimet numerum valorum æqualium.

Si

Si A habeat varios valores diversos, numerum æqualium determinat ille qui adhibetur in computatione. Ex gr. si a, a, a, b, b, c, sint sex valores ipsius A, numerus valorum æqualium erit 3, si pro A ubique ponamus a; numerus valorum æqualium erit 2, si b usu veniat; tandem erit unum, si c adhibeatur.

Quære minimum numerum qui exacte possit dividi per numerum valorum æqualium A & per quotientem in n. 15. memoratum. 17.

Per numerum hunc divide minimam in Serie differentiarum (13.) & quotiens erit numerus quæsitus, id est r, qui negativus erit si Series eo citius convergat quo major est x (9.), positivus in alio casu in n. 10. memorato. 18.

Tailor quærit maximum divisorem communem ipsorum indicum; & hunc dividit *Stirling* per numerum valorum æqualium A. 19.

Regula nostra magis involuta apparet; sed admodum minuit laborem: ut autem clarior evadat exemplis ipsam illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Sit Æquatio data.

$$x^5 - 4y^{\frac{1}{2}}x^4 + 6yx^3 - 4y^{\frac{3}{2}}xx + y^2x + 10x^{\frac{1}{3}} - 6y^{\frac{1}{2}} = 0$$

Quæritur y in Serie eo citius convergente quo major est x.

Pono

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$$

In Æquatione pro y substituo x^n (3.), & indices sunt

$$5,\ \tfrac{1}{2}n + 4,\ n + 3,\ \tfrac{3}{2}n + 2,\ 2n + 1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2}n.$$

Per Propositionem primam quæro n & detego $n = 2$, indices mutantur in hos (12.),

$$5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \tfrac{1}{3},\ 1.$$

Et est 5, index, quem linea tetigit, omnium maximus; quia agitur de x majori (9.).

Ex 5. subtraho indices reliquos, & habeo Seriem differentiarum (13.),

$$4\tfrac{2}{3},\ 4.$$

Harum maximus communis divisor est $\frac{2}{3}$. (14.).

Per hunc divido 4, differentiarum minimam (15.) & quotiens est 6.

Quæro A (16.), & detego ipsum habere quatuor valores æquales.

Quæro numerum minimum, qui exacte possit dividi per 6 & 4 (17.); est hic 12.

Per

Per hunc divido 4 differentiarum minimam, & quotiens est $\frac{1}{3}$, & $r = -\frac{1}{3}$. (18.).

Forma Seriei ergo est

$$y = Ax^2 + Bx^{\frac{5}{3}} + Cx^{\frac{4}{3}} + Dx + Ex^{\frac{2}{3}} + Fx^{\frac{1}{3}} + G + Hx^{-\frac{1}{3}} \text{ \&c.}$$

E X E M P L U M II.

$$-\frac{y^9}{a^5} + xy^3 - 2x^2y^2 + x^3y + \frac{x^{14}}{b^{10}} = 0.$$

Quæritur y in serie eo citius convergente quo minor est x.

Series adsumta est

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} Dx^{n+3r} + \text{\&c.}$$

In Æquatione pro y scribo x^n, (3.), & indices quantitatis x sunt,

$$9n,\ 3n+1,\ 2n+2,\ n+3,\ 14.$$

In Parallelogrammo detegimus per Prop. 1. $n = 1$. & indices sunt (12.),

$$9,\ 4,\ 4,\ 4,\ 14.$$

Series differentiarum (13.) est

$$5,\ 10.$$

Maximus harum communis divisor 5. (14.).

Per quem divisa differentia minima quotiens est 1. (15.).

Habet A duos valores æquales (16.); & numerus minimus, qui exacte per numerum hunc & per quotientem 1. exacte potest dividi, est 2. (17.).

Divido ergo 5. per 2. & $r = 2\frac{1}{2}$. (18.).

Forma Seriei nunc est

$$y = Ax + Bx^{3\frac{1}{2}} + Cx^6 + Dx^{8\frac{1}{2}} + \text{\&c.}$$

Ipsa Series est

$$y = x + \frac{\frac{1}{3}}{a^2}x^{3\frac{1}{2}} + \frac{4}{a^5}x^6 + \left.\begin{matrix} +\frac{\frac{22}{45}}{a^2} \\ -\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2b^{10}} \end{matrix}\right\} x^{8\frac{1}{2}} + \left.\begin{matrix} +\frac{140}{a^{10}} \\ -\frac{13}{2b^{10}} \end{matrix}\right\} x^{11} + \text{\&c.}$$

F I N I S.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.



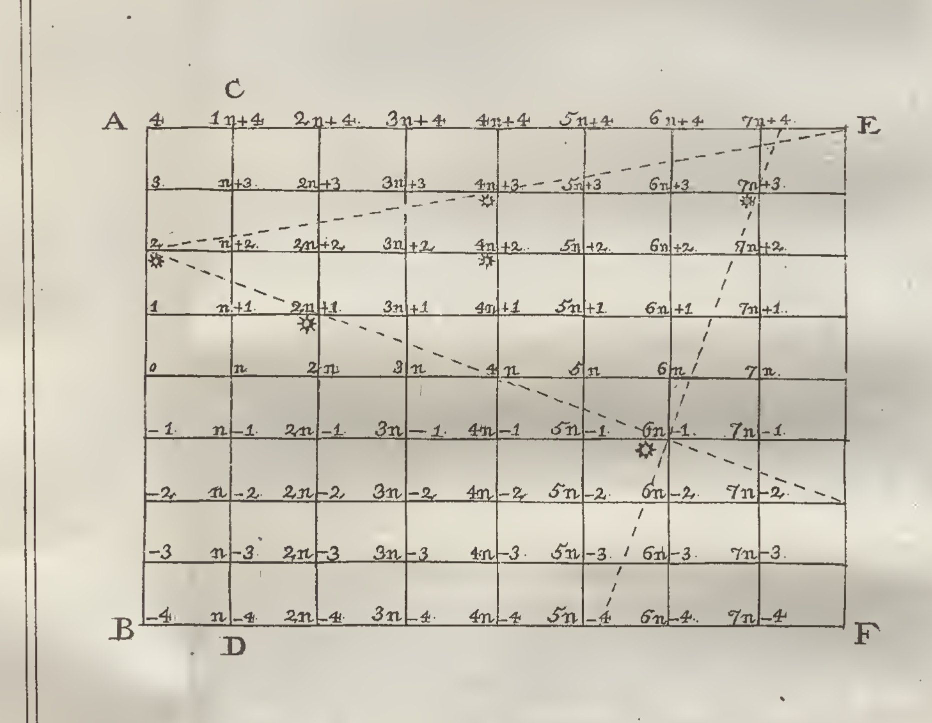
Fig. 1.

Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 2.

Fig. 5.


C
A
E
4 1n+4 2n+4 3n+4 4n+4 5n+4 6n+4 7n+4
3 n+3 2n+3 3n+3 4n+3 5n+3 6n+3 7n+3
2 n+2 2n+2 3n+2 4n+2 5n+2 6n+2 7n+2
1 n+1 2n+1 3n+1 4n+1 5n+1 6n+1 7n+1
0 n 2n 3n 4n 5n 6n 7n
-1 n-1 2n-1 3n-1 4n-1 5n-1 6n-1 7n-1
-2 n-2 2n-2 3n-2 4n-2 5n-2 6n-2 7n-2
-3 n-3 2n-3 3n-3 4n-3 5n-3 6n-3 7n-3
-4 n-4 2n-4 3n-4 4n-4 5n-4 6n-4 7n-4
B
D
F

ESSAI

D'UNE

NOUVELLE THEORIE

DU

CHOC DES CORPS,

FONDÉE SUR L'EXPERIENCE.

ESSAI
D'UNE
NOUVELLE THEORIE
DU
CHOC DES CORPS.

Plusieurs propositions que j'avance dans cet Essai sont si contraires aux sentimens reçus, que je dois demander à ceux qui pouront jetter les yeux sur cet écrit, de faire une attention particuliere aux Experiences sur lesquelles je me fonde, ou par lesquelles je confirme ce que j'avance. Je puis assurer qu'elles ont été faites avec un soin & une exactitude poussées jusques au scrupule; elles ont été repetées plusieurs fois & en presence de differentes personnes, & toujours les effets ont été les mêmes.

M. de Leibnitz est le premier qui ait avancé, que la force d'un corps en mouvement n'est pas proportionelle à sa vitesse, suivant le sentiment ordinaire, mais au quarré de sa vitesse; de sorte qu'en doublant la vitesse d'un corps sa force devient quadruple de ce qu'elle étoit.

Il auroit été à souhaiter que ce grand homme eut donné au public, comme il l'avoit promis, un traité sur cette matière, qui auroit été une source de belles découvertes pour un génie aussi penetrant que le sien.

D'habiles Mathématiciens ont defendu le sentiment de M. de Leibnitz, mais personne, que je sache, n'a traité la matière du Choc suivant ses principes, du moins pour ce qui regarde des corps qui ne sont pas flexibles à ressort; & pour les autres, la matière n'a pas été éclaircie autant qu'il seroit à souhaiter.

Les Experiences que j'ai faites sur le Choc, m'aiant fait voir démonstrativement que le sentiment de M. de Leibnitz est véritable, c'est à dire, que les forces de differents corps sont en raison des masses multipliées par les quarrés des vitesses; il me parut que pour déterminer les effets du Choc, on ne devoit point, comme on l'a fait jusques à present, considerer

rer les produits des masses par les vitesses, comme si ces produits étoient proportionnels aux quantités du mouvement dans les corps; quantité de mouvement, & force, n'étant pas des choses qu'on puisse distinguer. Cette consideration m'engagea à pousser mes Experiences plus loin, & je suis parvenu à une Théorie toute nouvelle du Choc, qui pour ce qui regarde le Choc de deux corps, & le Choc direct de plusieurs corps non élastiques, ne mène pas à des règles differentes de celles qui sont connues & que l'experience a confirmées; mais on trouvera ici ces règles démontrées d'une maniere differente de celle qu'elles l'ont été jusqu'à present; & on verra comment d'un principe contraire à l'experience, les Philosophes sont parvenus à ces règles, par un raisonnement dans lequel ils ont négligé de faire attention à tout ce qui devoit être consideré; sans quoi il étoit impossible de parvenir à la verité par le chemin qu'ils avoient pris. On verra à l'égard de ces mêmes règles, que pour ce qui regarde les corps non élastiques elles ne sont démontrées que pour les corps que nous connoissons: il seroit assez inutile, & encore plus difficile, de déterminer ce qui arriveroit aux corps parfaitement durs. Cette nouvelle Théorie ne regarde que le Choc, & ne change rien à ce qui a été démontré touchant la projection des graves, les forces centrales, les centres d'oscillation, la resistence des fluides &c., les effets, qui dans toutes ces occasions changent le mouvement des corps, sont d'une nature tout à fait differente du Choc.

ARTICLE I.

De la Continuation du Mouvement.

1. C'est une loi de la nature, *qu'un corps en repos reste dans cet état, jusques à ce que quelque cause étrangère le mette en mouvement.* De même *un corps en mouvement continue à se mouvoir dans une ligne droite, sans changer sa vitesse, aussi long-tems qu'aucune cause étrangère n'agit sur ce corps.*

2. On observe aussi *qu'un corps en repos resiste au mouvement, & qu'un corps en mouvement resiste à changer sa direction & sa vitesse.* Car un plus grand effort communique au corps en repos un plus grand mouvement, & change davantage le mouvement qu'un corps a déjà; or si le corps ne resistoit pas, le moindre effort suffiroit pour communiquer au corps le mouvement le plus grand, ou pour changer entièrement son mouvement.

DEFINITION I.

On appelle inertie *cette propriété de la matière, par laquelle un corps resiste au mouvement, & au changement de son mouvement.* 3.

L'inertie est proportionelle à la masse, ou à la quantité de matière dans un corps; parce qu'elle est la même dans chaque petite particule de matière. 4.

DEFINITION II.

Je nomme force *ce qui dans un corps en mouvement le transporte d'un lieu dans un autre.* 5.

Dans la suite de cet écrit on prend le mot de *force* toujours dans le sens qu'on lui donne dans cette définition.

On ne sauroit nier que la *force* ne soit quelque chose de positif, puis que c'est la cause d'un effet sensible.

La *force* d'un corps change lors que sa vitesse change.

La force d'un corps lui est inhérente, & ne peut être changée que par l'action d'une cause étrangère: ce qui est une suite de la loi de la continuation du mouvement, & de ce qu'on vient de dire touchant *l'inertie*. 6.

On ne doit pas confondre force & inertie, quoique ce ne soit que par *l'inertie* que la *force* fasse effet: nous verrons dans la suite * qu'il y a des cas dans lesquels cet effet est different quand *l'inertie* est changée, quoique *la force* soit la même. 7. * 56.

ARTICLE II.

De la Pression.

DEFINITION III.

Nous appellons du nom géneral d'effort toute cause étrangère qui agit sur un corps pour le faire sortir du lieu qu'il occupe, ou pour changer sa force. Je dis *cause étrangère*, parce que je ne mets pas au nombre des *efforts* la *force* qui est inhérente au corps, & par laquelle il est transporté. Un *effort* peut communiquer de la *force* à un corps, mais aussitôt qu'elle est communiquée, cette *force* n'est plus un *effort* qui agisse sur ce corps. 8.

DEFINITION IV.

On nomme pression *tout effort continué pendant un tems, & qui peut agir sans mouvement local, ou sans changer le mouvement d'un corps sur lequel elle agit:* ce qui arrive quand il y a une pression contraire, comme nous le di- 9.

rons dans la prop. 1. Un poids posé sur un soutien le presse, parce que son effort est continué aussi long-tems que le poids est soutenu, ce qui se fait sans mouvement.

La pression peut varier ou être constante. On l'appelle constante, quand dans chaque moment indivisible elle agit de même.

Les efforts des pressions égales sont égaux dans chaque moment indivisible, c'est pourquoi des pressions égales peuvent en tems égaux produire des effets égaux; & une pression est double d'une autre, quand elle produit deux fois l'effet que l'autre ne peut produire qu'une fois dans le même tems.

10. On voit aisément que *deux pressions égales & contraires s'entredétruisent mutuellement*, sans quoi l'une surmonteroit l'autre & leurs effets ne seroient
11. pas égaux. D'où l'on déduit aussi que *deux pressions contraires qui s'entredétruisent mutuellement sont égales.*

PROPOSITION I.

12. *L'effet de la pression, qui n'est pas détruite par une pression contraire, est de produire ou de détruire de la force.*

Si le corps sur lequel agit l'effort de la pression reste dans le lieu qu'il occupe, la pression est détruite par une pression contraire; car la pression venant à cesser il ne reste aucun effet qu'elle ait produit, & par conséquent son effort a été détruit pendant qu'elle agissoit. Il suit de là que le corps sort du lieu qu'il occupe, c'est à dire, qu'il se meut, quand la pression n'est point détruite; & par la loi de la continuation de mouvement, il continue à se mouvoir, par l'impression reçue, pendant que la pression continuant à agir sur lui augmente sa vitesse; car sans cette augmentation de vitesse, il n'y auroit pas d'effet de la pression sur le corps, quoique nous supposions qu'elle ne soit pas détruite. Ce qui est contradictoire; un effort, qui, sans être détruit par la resistence qu'il trouve, ne feroit aucun effet, ne seroit pas un effort.

On voit cette production de la force, dans un corps qui tombe & dont la vitesse s'augmente de moment en moment.

Si la pression est contraire à la force; n'étant pas détruite par une pression contraire, elle ne peut avoir d'autre effet que de faire ceder le corps vers le côté opposé à la direction de son mouvement; ce qui ralentit ce mouvement; la pression continuant son action diminue la vitesse pendant tout le tems qu'elle agit, & la diminution entière de la vitesse est la somme de toutes les diminutions dans chaque instant infiniment petit. Mais la pres-

sion

ſion en diminuant la viteſſe, diminue auſſi la force, ce qu'il falloit expliquer. Un corps qui monte perd ſa force par la preſſion de la peſanteur.

Il arrive ſouvent que la preſſion n'eſt qu'en partie détruite par une preſſion oppoſée; dans ce cas, ce qui n'eſt point détruit communique ou détruit du mouvement, & par conſéquent augmente ou diminue la force d'un corps comme on vient de l'expliquer. Ceci arrive toujours quand dans l'effet de la preſſion il y a mouvement local, ou changement dans un mouvement; ce qui ne ſe peut trouver dans l'effet d'une preſſion entièrement détruite par une preſſion oppoſée. C'eſt pourquoi toutes les fois qu'on voit production ou changement de mouvement dans l'effet de la preſſion, il faut diſtinguer entre la partie de la preſſion qui détruit une preſſion oppoſée, & la partie qui produit ou détruit de la force. Faute de faire cette diſtinction, on a confondu quelque fois des choſes tout à fait differentes. 13.

Il faut néanmoins remarquer, qu'un corps en mouvement peut être preſſé également par deux preſſions oppoſées, qui s'entredétruiront; mais alors le mouvement local n'eſt ni produit ni changé par l'effet d'une de ces preſſions, le corps étant mu par la force qu'il a, ſur laquelle ces efforts étrangers, dont l'un détruit l'autre, ne font aucun effet.

On apperçoit aiſément qu'un bateau dans l'eau, tiré par une corde, ou pouſſé par le vent, aquiert d'abord de la viteſſe, parce que la preſſion qui le pouſſe n'eſt pas entièrement détruite par la preſſion contraire, qui vient de la reſiſtence de l'eau: pendant que la viteſſe augmente la reſiſtence croit, & le mouvement devient uniforme, auſſitôt que la preſſion qui pouſſe & la preſſion de l'eau qui reſiſte ſont égales; dans ce cas elles s'entredétruiſent, & le bateau avance par le mouvement acquis; le bateau preſſé également des deux côtés, avançant comme s'il n'étoit point preſſé.

PROPOSITION II.

Toute preſſion ſoit conſtante, ſoit variée (pourvû qu'elle ne le ſoit pas à l'infini) *dont l'effet eſt fini dans un tems fini, ne peut produire qu'un effet infiniment petit dans chaque inſtant infiniment petit.* 14.

L'effet, produit dans un tems quel qu'il ſoit, eſt la ſomme de tous les effets produits pendant chaque partie de ce tems. Si le tems eſt fini & que ſes parties ſoient infiniment petites, le nombre des effets dont il faut prendre la ſomme, eſt infiniment grand. Mais cette ſomme eſt finie; il faut donc que chaque partie, c'eſt à dire, chaque effet particulier ſoit infiniment petit. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

15. *Pression & force sont des quantités entièrement incommensurables.*

Quand la pression est détruite par une pression contraire, son effet est détruit dans chaque instant infiniment petit, & dans chaque instant il n'y a dans la pression que l'effort qu'elle fait dans cet instant. Or la force est
* 12. l'effet de la pression pendant un tems fini, * c'est à dire, que c'est la somme d'une infinité de semblables efforts; & par conséquent elle est infiniment grande en comparaison de la pression. On voit par là qu'on ne peut pas comparer davantage l'effort de la pression avec la force du corps qu'une ligne avec une superficie. Ce qu'il falloit prouver.

Cette démonstration regarde les forces que les pressions, dont on parle, peuvent produire dans un tems fini; ainsi, une pression qui dans un tems fini produiroit une force infinie, seroit égale à une force finie, & nous nommerions cette pression infinie, comme nous nommons finie celle qui dans un tems fini peut produire une force finie; nous n'en connoissons point d'autres; ce n'est que de celles-là que je parle dans cet écrit.

16. On voit par cette démonstration, que *l'effet de la moindre force est infiniment plus grand que l'effet d'une pression quelque grande qu'elle soit:* en supposant une force & une pression finie. C'est inutilement qu'on a tâché de comparer ces deux sortes d'efforts. Ceux qui ont essaié d'y parvenir par des experiences, se sont trompés en ce qu'ils ont pris pour effet de la pression ce qui étoit l'effet de la force que la pression avoit produite, ce qui se trouve toujours où la pression produit un mouvement local *. Con-
* 13. cevons deux boules de même diamètre l'une de plomb l'autre d'un bois leger; que la premiere soit posée doucement sur de la terre glaise, & que l'autre tombe de la hauteur qu'il faut, pour que les deux boules s'enfoncent également. On se tromperoit si on croyoit par cette experience pouvoir comparer l'effet de la pression & de la force. La boule de plomb par son poids presse la terre, qui par sa resistence ne détruit qu'une partie de l'effort du poids, l'autre partie donne de la force à la boule, par où elle s'enfonce; de manière que l'enfoncement entier est l'effet de la pression du poids, pendant tout le tems que la boule emploie pour s'enfoncer, qui est un tems fini; mais l'effet qu'on doit comparer est l'effet de la pression d'un poids soutenu, & qui par conséquent est détruit dans chaque instant infiniment petit. On peut encore remarquer que dans l'experience, dont nous venons de parler, la boule, s'étant enfoncée jusques à ce que la resistence de la terre soit égale au poids, s'enfonce un peu davantage par la force acquise dans la descente. Ce qui fait voir que si la boule avoit été posée dans un enfoncement même moindre que celui de l'experience, elle n'au-

n'auroit pû par son poids augmenter cet enfoncement. Quoi qu'il soit constant par l'experience que dans un corps mol il n'y a point d'enfoncement que le moindre Choc n'augmente.

ARTICLE III.

De la Resistence, ou Réaction.

DEFINITION V.

Tout ce qui détruit un effort est appellé Resistence *ou* Réaction. 17.

Toute pression se consume pendant qu'elle agit; l'effet immédiat de la pression pendant un moment ne dépend point de son effet dans les momens precedents ou suivants, de sorte qu'elle est détruite dans chaque moment infiniment petit, soit que ce soit par une pression contraire, soit que ce soit en communiquant ou en détruisant de la force. C'est ce qui détruit la pression que nous nommons resistence. Quand on nomme la pression *action*, la resistence est appellée réaction; & on a remarqué que c'est une loi de la nature que, 18.

L'action est toujours égale à la réaction. 19.

C'est ce que nous allons éclaircir autant que cela regarde notre sujet. Quand la pression est détruite par une pression opposée, on voit aisément que la loi a lieu *: pour faire voir qu'elle a lieu de même quand la pression produit force, concevons un bateau tiré dans l'eau par une corde; supposons que l'eau ne resiste pas, il faudra que celui qui tire fasse effort pour faire avancer le corps: si cet effort est une pression, c'est à dire, s'il est continué, il fera augmenter dans tous les moments la vitesse du corps, & la fera augmenter d'autant plus que la pression sera plus grande *. On conçoit aisément que plus cet effort sera grand, plus la corde sera tendue, ce qui ne se peut sans resistence, ou réaction, qui dans ce cas vient de l'inertie de la matière; mais la corde ne peut pas être tendue plus d'un côté que d'un autre, il faut donc que l'action & la réaction soient égales. Concevons que l'eau ait de la resistence pendant que le bateau s'accelère, la pression qui faite avancer le bateau surpasse celle de la resistence de l'eau, & la corde est tendue par l'effort entier qui surmonte cette resistence & par celui qui accelère de bateau; la corde est tendue egalement des deux côtés; c'est pourquoi la pression ou action qui fait avancer le bateau est égale à la réaction, qui dans ce cas vient en partie d'une pression contraire & en partie de l'inertie du bateau. On prouve par un raisonnement semblable que la réaction est égale à la pression, lors qu'elle détruit

* 11.

* 12.

truit

truit la force d'un corps. Concevons un corps en mouvement ſur un plan horizontal; ſi le mouvement de ce corps eſt ralenti par un poids attaché à une corde, qui paſſe ſur une poulie & qui eſt attachée au corps en mouvement, la corde ſera tendue également des deux côtés.

20. Cette même loi a lieu dans le Choc; on ne ſauroit concevoir d'effort ſans reſiſtence, & un corps ne fait effort ſur un autre, qu'autant que celui-ci reſiſte, ce qui ſe confirme par toutes les Experiences ſur le Choc. Auſſi l'égalité de la réaction avec l'action n'eſt pas conteſtée.

ARTICLE IV.

De la Force & du Choc en géneral.

La force, comme nous l'avons déjà remarqué, eſt inhérente au corps, elle reſte la même auſſi long-tems que le corps continue à ſe mouvoir avec la même viteſſe. Le corps ne perd cette force que par un effort contraire; de manière qu'il y a du côté du corps un effort, qui détruit l'effort contraire, pendant que celui-ci détruit, ou du moins diminue la force du corps.

DEFINITION VI.

21. *On nomme* Choc *la rencontre de deux corps.* Le Choc eſt toujours un effet de la force.

DEFINITION VII.

22. Action de la force, *c'eſt l'effort que fait un corps par ſa force.*

PROPOSITION IV.

23. *L'action de la force eſt égale à la force que le corps perd.*

Le corps ne perd point de ſa force ſans un effort contraire, comme nous venons de le dire; l'effet de cet effort eſt de détruire ou de diminuer la force; l'effet de l'action de la force eſt de détruire cet effort; l'action
§ 19. 20. eſt égale à la réaction *, donc ces deux effets ſont égaux; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION. V.

24. *Dans tous les Chocs des corps qui nous ſont connus, il y a enfoncement ou applatiſſement de parties, & perte de force.*

Tous les corps que nous connoiſſons ſont compoſés de petites parties, qui ſont jointes plus ou moins fort dans les differents corps. Ce qui joint ces petites parties, quoi que ce puiſſe être, les preſſe les unes contre les au-

autres, & leur cohéſion n'eſt pas un ſimple repos, mais une véritable preſſion. Pour aplatir le corps, ou en enfoncer les parties, il ſuffit de ſurmonter cette preſſion; or la moindre force peut ſurmonter la plus forte preſſion *. Par conſéquent les parties ſe ſéparent & s'enfoncent, par le Choc, en cedant au corps qui les pouſſe. * 16.

L'enfoncement eſt d'autant plus grand que la cohéſion des parties eſt moins forte, ou que le Choc eſt plus fort; car la force ſe perd en ſurmontant la cohéſion, de la manière qu'il a été démontré que la preſſion peut détruire de la force *. * 12.

On voit aiſément qu'il ſe perd autant de force qu'il en faut pour faire l'enfoncement *; cependant cet enfoncement entier n'eſt pas l'effet immédiat de l'action de la force, parce que les parties extérieures en s'enfonçant ont acquis de la force qu'elles ont reperdue en écartant les intérieures. * 23.

L'expérience confirme que dans tous les Chocs il y a un aplatiſſement ou enfoncement des parties des corps qui ſe choquent, ce qui n'eſt pas conteſté : mais on a manqué de faire attention à la force qui ſe perd par cet enfoncement.

Proposition VI.

Dans le Choc il n'y a de force perdue que celle qui eſt emploiée à aplatir ou enfoncer les parties des corps. 25.

1. Si les corps tendent vers le même côté, celui qui ſuit, & qui a toujours le plus de viteſſe, eſt le ſeul qui dans le Choc perde ſa force, & cette force perdue eſt égale à l'action de cette force *. Or cette action n'eſt que la force que l'autre corps gagne, & l'aplatiſſement ou enfoncement des parties des corps. La force perdue dans un corps, mais gagnée par l'autre, n'eſt pas force perdue; par conſéquent il n'y en a de telle que celle qui a été emploiée à aplatir ou enfoncer les parties des corps. * 23.

2. Quand les corps ont des directions contraires, il ſemble d'abord que du moins une partie de l'action des forces des corps eſt de s'entredétruire mutuellement. Mais ſi l'on y fait attention, on verra que la force d'un des corps ne ſert qu'à faire réſiſtence à la force de l'autre, de manière que celle-ci puiſſe enfoncer ou aplatir davantage les parties des corps. Ce qui étant mutuel, les forces ne s'entredétruiſent pas, à parler exactement, mais la reſiſtence qui vient de l'une donne occaſion à l'autre de ſe conſumer par l'enfoncement des parties, qui, à proprement parler, eſt l'action de cette force qui ſe perd.

Je ne crois pas qu'il y ait de la difficulté dans cette démonſtration pour ce qui regarde les corps qui tendent du même côté; pour revoquer la démonſtration en doute, il faudroit nier la loi de la réaction. Pour lever les difficultés qui pourroient reſter ſur la démonſtration du ſecond cas, à cauſe

26. du paradoxe que ce ſecond cas contient, que *les forces ne s'entredétruiſent jamais mutuellement*, je ferai voir à la fin du VII. Article, par des expériences directes, que la force qui ſe perd dans le Choc des corps, dont les directions ſont oppoſées, eſt exactement celle qu'il faut pour enfoncer ou aplatir les parties autant qu'elles le ſont dans le Choc.

On peut déduire la même verité de quelques expériences connues ſur les corps flexibles à reſſort.

DEFINITION VIII.

27. *On appelle corps* flexibles à reſſort *ou* élaſtiques *ceux dont les parties enfoncées retournent à leur première figure*; & l'élaſticité eſt parfaite lors que les parties en retournant font un effort égal à celui par lequel elles ont été enfoncées. Quoique nous ne connoiſſions point de corps dont l'élaſticité ſoit parfaite, par les expériences faites ſur ceux dont l'élaſticité n'eſt pas fort défectueuſe, on conclut de ce qui arriveroit aux corps parfaitement élaſtiques.

On tombe d'accord que deux corps, qui étant mous reſtent en repos après le Choc, retourneroient chacun avec la viteſſe qu'il avoit avant le Choc, ſi le reſſort de ces corps étoit parfait. Puiſque les corps reſteroient en repos s'ils n'avoient pas de reſſort, la force avec laquelle ils retournent vient des efforts des reſſorts qui ſe débandent, & ces efforts ſont égaux à ceux avec leſquels ils ont été bandés. Or l'effort des reſſorts en ſe débandant eſt égal aux forces avec leſquelles les corps retournent, qui ſont égales à celles qu'ils avoient avant le Choc; celles-ci par conſéquent (qui ſont celles qui ſe perdent quand il n'y a point de reſſort) ont été emploiées entières à bander ces reſſorts, c'eſt à dire, à enfoncer ces parties.

L'élaſticité des corps ne renverſe pas ce que j'ai dit ci-devant, que la force emploiée à enfoncer les parties d'un corps étoit perdue; l'effort du reſſort en ſe debandant eſt une preſſion qui produit une nouvelle force, de
* 12. la manière qu'il a été expliqué pour toutes ſortes de preſſions *.

ARTICLE V.

Différences entre Preſſion & Force.

En comparant ce qui a été expliqué dans les Articles 2 & 4, on trouve les différences ſuivantes entre Preſſion & Force, les ſeules ſources des efforts que nous connoiſſons.

I. La

I. La pression est infiniment petite en comparaison de la force *. 28.

II. L'intensité de l'action d'une pression est déterminée, & dépend de la grandeur de la pression *; l'intensité de l'action d'une force n'est point fixe, & elle dépend de la resistence que la force trouve, & qui peut être plus ou moins grande *. * 15. 16. 29. * 18. * 20.

III. L'effet total d'une pression est indéterminé, & dépend du tems pendant lequel elle agit *. L'effet total de l'action d'une force est déterminé & est le même, quoique le tems pendant lequel la force agit, soit plus ou moins étendu *. 30. * 9. * 6. 23.

IV. La pression étant un effort *, il n'y a point de pression sans action contre un obstacle. La force est inhérente au corps, quoiqu'il ne fasse point d'effort contre un obstacle, & elle demeure sans alteration aussi longtems qu'elle n'agit pas pour surmonter quelque resistence *. 31. * 9. * 6.

V. La pression détruit souvent une pression contraire *. La force ne détruit jamais une force contraire, du moins immédiatement *. 32. * 10. 11. 12. * 26.

VI. La pression peut agir dans un lieu déterminé; la force ne peut agir que d'un lieu dans un autre. 33.

ARTICLE VI.

De la Mesure de la Force.

L'action de la force étant égale à la force que le corps perd par cette action *, il est clair que *les forces sont égales, dont les actions totales ne different pas*; & en géneral que *les forces sont en raison des actions par lesquelles elles se consument entièrement.* 34. * 23.

PROPOSITION VII.

Les forces de différens corps sont entr'elles comme les masses de ces corps, si leurs vitesses sont égales. 35.

La force d'un corps appartient à chacune des petites parties dont il est composé, & la force est égale dans chaque petite partie égale, mue avec la même vitesse. La force de chaque corps est la somme des forces des petites parties qui le composent; si donc on les conçoit tous divisés en petites parties égales, la vitesse étant la même pour chacune, la force de chaque corps sera proportionnelle au nombre de ses petites parties, c'est à dire, à la quantité de matière qu'il contient.

PROPOSITION VIII.

36. *Dans les corps égaux les forces ſont en raiſon des quarrés de leurs viteſſes.*

Comme cette propoſition eſt conteſtée, je la prouverai par l'expérience avant d'en donner la démonſtration.

EXPERIENCES.

37. Je me ſuis ſervi pour ces expériences de trois boules de cuivre, d'un pouce & demi de diamètre, & exactement égales. L'une étoit ſolide, les deux autres creuſes, & compoſées chacune de deux hémiſphères joints à vis, ce qui paroiſſoit à peine; leurs poids & par conſéquent leurs maſſes étoient exactement entre elles comme trois, deux, & un. Dans la ſuite je nommerai la plus peſante, *la boule trois*, la ſuivante *la boule deux* & la plus légère *la boule un*. Dans un bacquet d'un pouce de profondeur, j'ai entaſſé de la terre glaiſe, de la plus fine dont ſe ſervent les potiers de terre; elle eſt extrèmement molle & très homogène. J'en ai uni la ſuperficie en coupant tout ce qui paſſoit les bords, de manière que la ſurface formoit un plan exact. Dans cette terre j'ai laiſſé tomber de différentes hauteurs les boules dont je viens de parler. La boule étoit appliquée en deſſous contre une règle un peu creuſe, ſur laquelle étoit appuiée ma main qui ſoutenoit la boule; & la règle étoit ſoutenue ſur deux autres règles afermies, de manière que la première règle n'avoit d'autre mouvement qu'un mouvement parallèle à la ſuperficie de la terre glaiſe. J'ai pris toutes ces précautions pour déterminer exactement les hauteurs dont j'ai laiſſé tomber les boules, qui de cette manière ne pouvoient recevoir la moindre impreſſion du mouvement de ma main.

Ayant laiſſé tomber *la boule trois* de la hauteur de neuf pouces, & *la boule un* de la hauteur de vingt-ſept pouces, les enfoncemens dans la terre glaiſe, ont été égaux entr'eux.

Ayant laiſſé tomber *la boule deux* de la hauteur de neuf pouces, & *la boule un* de la hauteur de trente-ſix pouces, ou trois pieds, les enfoncemens ont été extrèmement differents, *la boule un* s'étant enfoncée beaucoup plus que *la boule deux*, qui ne s'eſt enfoncée tout autant que lors qu'elle eſt tombée d'une hauteur de dix-huit pouces.

Ayant laiſſé tomber *la boule trois* de la hauteur de dix-huit pouces, & *la boule deux* de la hauteur de vingt-ſept pouces, les enfoncemens ont auſſi été exactement égaux.

Les cavités que font les boules en tombant dans la terre glaiſe, ſont les acti-

actions entières des forces qu'ont les corps à la fin de leurs chutes. Si *la boule un* & *la boule trois* tomboient toutes deux de la hauteur de neuf pouces, leur forces acquises en tombant seroient comme un à trois *; par * 35.
conséquent l'action de *la boule un* en tombant de la hauteur de vingt-sept pouces, est triple de ce qu'elle seroit en tombant de la hauteur de neuf pouces, puisque cette action est égale à celle de *la boule trois*, lors que celle-ci tombe de la hauteur de neuf pouces; par où il paroit que la force d'une boule croit comme la hauteur dont elle tombe : ce qui suit de même des autres expériences. Or cette hauteur est comme le quarré de la vitesse acquise en tombant & avec laquelle le corps frape la terre glaise; cela est démontré & confirmé par un grand nombre d'expériences, & est connu.

Les expériences que je viens de décrire prouvent visiblement la proposition. L'égalité des enfoncemens est toujours si exacte, quand les quarrés des vitesses sont en raison inverse des masses, & l'inégalité des enfoncemens si grande, quand les vitesses mêmes sont dans cette raison inverse des masses, qu'il ne me paroit pas possible de rester un moment en suspens sur la proposition après avoir vû les expériences.

Il faut faire voir à présent comment cette proposition, que la force croit comme le quarré de la vitesse, est une suite de la nature de la force. Pour le faire il faut démontrer auparavant la proposition suivante.

Proposition IX.

Un corps en mouvement résiste à l'accélération en raison de la vitesse qu'il a. 38.

Dans l'accélération la vitesse d'un corps s'augmente en passant par tous les dégrés possibles de vitesse entre le dégré qu'il avoit & celui qu'il acquiert; de sorte qu'on peut considerer l'augmentation de la vitesse, comme la somme d'une infinité de petites augmentations successives & égales.

Il faut démontrer que l'effort qu'il faut pour augmenter la vitesse d'un corps d'une telle quantité infiniment petite, croit en raison de la vitesse que le corps a déjà.

Pour faire voir d'abord qu'il faut moins d'effort pour donner un certain dégré de vitesse à un corps, que pour augmenter d'un même dégré la vitesse d'un corps égal mais en mouvement, il suffit de faire remarquer qu'il faudroit le même effort dans les deux cas, si dans le second la cause mouvante étoit transportée avec la vitesse qu'avoit le corps avant l'augmentation, ce qui ne se fait pas sans effort. Concevons deux hommes A & B tenant chacun une boule; nous supposons les deux boules égales; A est en repos; B est sur un bateau avec lequel il est transporté; ce qui donne à

 la

la boule que tient B la viteſſe qu'a le bateau. Les deux hommes jettent leurs boules en faiſant des efforts égaux; alors l'augmentation de la viteſſe de la boule qu'a jettée B eſt égale à la viteſſe entière de la boule qu'A a jettée. Pour donner à cette dernière boule ſa viteſſe, il ſuffit de l'effort qu'a fait A, mais pour augmenter la viteſſe de l'autre boule, outre un effort égal de la part de B, il faut que B ſoit tranſporté.

Cet exemple n'eſt que pour faire voir, que ceux qui ont cru qu'il faut un effort égal pour donner à un corps qui s'accélère, chaque degré égal de viteſſe, n'ont pas fait attention à l'effort qu'il faut pour tranſporter la force mouvante.

La cauſe de cette erreur eſt la propriété étonnante de la peſanteur, qui agit ſur un corps en mouvement de même que ſur un corps en repos, & qui, dans des tems égaux, communique à un corps qui tombe des dégrés égaux de viteſſe. On a cru qu'elle lui communiquoit auſſi des dégrés égaux de force; mais les expériences, qu'on vient de décrire, prouvent demonſtrativement que ces dégrés de force ſont inégaux; ce qui prouve que de la nature de la peſanteur, qui nous eſt parfaitement inconnue, il ne faut pas tirer des argumens contre la propoſition dont il s'agit ici, ces argumens étant refutés par l'expérience.

Démonſtration de la Propoſition IX.

39. Un reſſort plié ſe débande avec un certain effort. Si cet effort eſt emploié tout entier à communiquer de la force à un corps, cette force ſera
* 12. égale à tout l'effort que le reſſort a fait en ſe débandant *; ce qui eſt vrai auſſi à l'égard de pluſieurs reſſorts joints qui ſe débandent en même tems ou ſucceſſivement. On en voit des exemples dans les corps flexibles à reſſort, dans leſquels l'effort des reſſorts des parties des deux corps ſouvent ſe communique entier à un ſeul corps. Pour qu'un reſſort communique tout ſon effort à un corps, il ne doit pas en ſe débandant céder vers le côté oppoſé, mais être appuié ſur un obſtacle inébranlable; ſans quoi il ne communiqueroit point toute ſa force au corps qu'il met en mouvement.

Fig. 1. Ceci poſé, concevons une infinité de petits reſſorts pliés *e*, *e*, *e*, &c., qui en ſe débandant commuuiquent tout leur effort aux corps P; ſuppoſons qu'en ſe débandant ils prennent chacun la figure E; & qu'ils ne ſe débandent que par un eſpace infiniment petit.

Le reſſort E en ſe débandant communique un dégré infiniment petit de viteſſe au corps P, qui étoit en repos. Pour augmenter cette viteſſe d'un égal dégré infiniment petit, il ne ſuffit pas qu'un ſecond reſſort ſe débande,

de, il faut qu'en se débandant, il soit transporté avec la vitesse que le corps a déjà, c'est à dire, avec un dégré infiniment petit de vitesse, & qu'il soit appuié contre un obstacle qui ne puisse pas reculer, c'est à dire, qu'il faut que ce ressort soit poussé avec un effort égal à celui avec lequel il pousse le corps; ce qui se fera, si un second ressort se débande en même tems. Il faut donc pour communiquer le second dégré infiniment petit de vitesse, que deux petits ressorts se débandent en même tems, chacun avec un effort égal à celui avec lequel s'est débandé le ressort E, qui a communiqué le premier dégré de vitesse; c'est à dire, qu'il faut pour le second dégré infiniment petit de vitesse le double de l'effort qu'il faut pour le premier. Par un raisonnement semblable, on verra que pour communiquer au corps P, le troisième dégré infiniment petit de vitesse, il est nécessaire que trois ressorts, semblables à ceux dont on vient de parler, se débandent en même tems; & ainsi de suite. Par conséquent, pour communiquer à un corps un dégré infiniment petit d'augmentation de vitesse, il faut autant d'efforts infiniment petits que le corps a de degrés infiniment petits de vitesse, c'est à dire, que l'effort qu'il faut pour augmenter d'un dégré infiniment petit la vitesse d'un corps, croit en raison de cette vitesse. Ce qu'il falloit démontrer.

On voit par cette démonstration qu'on se trompe, quand on croit que quatre ressorts rangés de suite, qui viendroient à se débander en même tems, communiqueroient à un corps une vélocité quadruple de celle qu'auroit pu communiquer à ce corps un seul de ces ressorts. Ce préjugé est fondé sur ce qu'on a cru que la force d'un corps est proportionelle à sa vitesse.

Démonstration de la Proposition VIII.

L'ordre le plus naturel demandoit, que la proposition neuvième précédat la huitième, puisque la démonstration de celle-ci est fondée sur celle de l'autre: mais comme ce sont des propositions contestées, j'ai cru que je devois mettre la première celle qui se prouvoit immédiatement par l'expérience, & dont voici la démonstration, dans laquelle nous supposons tout ce qui a été dit dans la démonstration précédente. 40.

On a vu que l'effort de tous les petits ressorts qui se débandent est nécessaire, pour donner à un corps un certain dégré de vitesse; l'effort de ces ressorts n'a d'autre effet que de mouvoir le corps; car l'effort que les ressorts reçoivent les uns des autres est toujours emploié à mouvoir le corps; par conséquent les différentes forces, que reçoit le corps en récevant différentes vitesses, sont entr'elles comme les nombres des ressorts infiniment petits, qui se débandent pour donner ces vitesses différentes.

Fig. 2. Soit AF la vitesse d'un corps acquise par accélération; soient Ab, bc, cd, des parties infiniment petites acquises successivement; les nombres des ressorts pour donner chacun de ces dégrés de vitesses sont proportionnels aux rectangles $Abhe$, $bcif$, $cdlg$, & le total des ressorts sera proportionnel à la superficie $Ael d$, laquelle est un véritable triangle, à cause que les parties Ac, eh, hf, fi, &c. sont infiniment petites. Par conséquent les forces du corps, si les vitesses sont entr'elles comme Ad & AF, sont comme les aires des triangles Ald & AGF; & ces aires sont comme les quarrés des vitesses Ad & AF. Ce qu'il falloit démontrer.

Dans cette démonstration nous avons fait abstraction de l'inertie des ressorts mêmes, il ne s'agit que de leur effort : supposer, pour la démonstration, des ressorts sans inertie, n'est pas une supposition qui puisse mener dans l'erreur.

PROPOSITION X.

41. *La force d'un corps est proportionelle à sa masse multipliée par le quarré de sa vitesse.*

Cette proposition est une suite des propositions 7. & 8.

PROPOSITION XI.

42. *Deux corps dont les vitesses sont en raison inverse des masses, ont des forces qui sont aussi en raison inverse des masses.*

Soient deux corps A & B; la vitesse du premier est a; celle du se-
* 41. cond b: leurs forces sont Aaa, & Bbb *. On suppose $b, a :: A, B$: par conséquent $Bb = Aa$. En multipliant le premier & le second terme de la proportion, par ces quantités égales, on aura $Bbb, Aaa :: A, B$. Ce qu'il falloit démontrer.

ARTICLE VII.

Du Choc des corps qui ne sont ni parfaitement durs, ni fléxibles à ressort.

Nous ne connoissons pas de corps parfaitement durs, comme nous l'avons déjà dit, & nous n'osons décider de ce qui regarde leur Choc; nous nous contenterons de parler des corps que nous connoissons. Il s'agira dans cet article de ceux qui n'ont point de ressort.

DEFINITION IX.

Le Choc de deux corps est appellé direct, quand les centres de gravité des deux corps sont mûs dans une même ligne droite, & quand les parties des superficies, qui viennent à se heurter, sont dans cette ligne & perpendiculaires à cette même ligne. Quand un des corps est en repos, il faut que le centre de gravité de l'autre parcoure une ligne droite qui passe par le centre de gravité de celui qui est en repos. 43.

Nous ne parlerons dans cet Essai que du Choc direct.

DEFINITION X.

On appelle vitesse respective la vitesse avec laquelle deux corps s'approchent ou se séparent. 44.

Lors que les corps tendent vers le même côté, la vitesse respective est la difference des vitesses absolues; 45. *c'est la somme des vitesses absolues lors que les directions des corps sont opposées.* 46.

PROPOSITION XII.

Les corps non élastiques ne se séparent pas après le Choc direct. 47.

Il n'y a aucun effort qui agisse pour les separer.

PROPOSITION XIII.

Dans tous les Chocs des corps non flexibles à ressort la somme des forces après le Choc est moindre que la somme des forces avant le Choc. 48.

Il ne s'agit pas ici, comme je l'ai déjà dit, de corps parfaitement durs.

Dans tout Choc il y a enfoncement de parties *; la force nécessaire * 24. pour enfoncer ces parties est perdue *. Il n'y a point de nouvel effort * 25. étranger pour produire une nouvelle force qui recompense la force perdue; il faut donc nécessairement que la somme des forces soit moindre après le Choc qu'avant le Choc. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XIV.

La force perdue, dans le Choc de deux corps non élastiques, est la même, quelles que puissent être les vitesses absolues de ces deux corps, si leur vitesse respective est la même. 49.

Le mouvement de deux corps est composé de leur mouvement commun & de leur mouvement relatif. Il est clair que le premier, de quelque manière qu'il soit varié, ne peut pas changer l'action d'un corps sur l'autre;

 de

de ſorte que cette action eſt toujours la même auſſi long-tems que la viteſſe reſpective ne change point. C'eſt de cette action ou effort des corps l'un contre l'autre, que dépend l'applatiſſement ou enfoncement des parles, lequel par conſéquent ſera le même, ſi la vélocité reſpective eſt la même. Ce qui eſt conforme aux expériences connues.

Dans le Choc il n'y a de force perdue que celle qu'il faut pour applatir
* 25. ou enfoncer les parties *. Par conſéquent cette force perdue eſt la même quand l'applatiſſement ou l'enfoncement des parties eſt le même, c'eſt à dire, dans tous les cas dans leſquels la viteſſe reſpective de deux corps eſt la même.

Proposition XV.

50. *La viteſſe reſpective de deux corps étant donnée, la ſomme de leurs forces eſt la moindre qu'il eſt poſſible, quand leurs directions ſont contraires, & quand leurs viteſſes abſolues ſont en raiſon inverſe de leurs maſſes.*

Soient deux corps A & B; la viteſſe du premier eſt x, celle du ſe-
* 46. cond y; leur viteſſe reſpective eſt $x + y$ *, laquelle eſt donnée & que je
* 41. nomme d. Je dis que la ſomme $Axx + Byy$ * eſt la moindre qu'il eſt poſſible, ſi A, B :: y, x, ou $Ax = By$.

Suppoſons que la viteſſe de A ſoit augmentée, & quelle ſoit $x + e$, alors la viteſſe de B ſera $y - e$ pour que la viteſſe reſpective ne change point; la ſomme de $x + e$ & $y - e$ étant $x + y = d$.

La ſomme des forces ſera $Axx + 2Axe + Aee + Byy - 2Bye +$
* 41. Bee *. A cauſe de $Ax = By$, les quantités $+ 2Axe$ & $- 2Bye$ ſe détruiſent, & la ſomme des forces eſt $Axx + Aee + Byy + Bee$ La ſomme ſeroit la même ſi la viteſſe de B avoit été augmentée de la quantité e, & celle d'A diminuée de la même quantité, & par conſéquent la ſomme des forces eſt toujours plus grande que $Axx + Byy$, ce qu'il falloit démontrer.

Proposition XVI.

51. *La viteſſe reſpective de deux corps étant donnée, il y a un cas dans lequel les corps reſtent en repos après le Choc.*

Suppoſons que les directions ſoient contraires, & que les corps ne reſtent pas en repos après le Choc, dans ce cas l'un, que je nomme B, eſt emporté par l'autre que je nomme A. Diminuons la viteſſe d'A, il faudra
* 46. augmenter celle de B, parce que la viteſſe reſpective eſt donnée *, & alors B ſera emporté avec moins de force. Il eſt clair qu'on peut ſi fort diminuer la viteſſe d'A, en augmentant la viteſſe de B de la quantité qu'on ôte à celle d'A, qu'enfin A ſera emporté par B. Ce qui prouve qu'il y

a

a un degré moyen de diminution de la viteſſe d'A, dont l'effet eſt qu'aucun des deux corps n'emporte l'autre.

Proposition XVII.

Deux corps reſtent en repos après le Choc, quand avant le Choc la ſomme de leurs forces eſt la moindre qu'il eſt poſſible qu'ils aient, leur viteſſe reſpective étant donnée.

La viteſſe reſpective de deux corps, étant donnée, il y a un cas dans 52.
lequel ces corps reſtent en repos après le Choc *. Dans ce cas ils perdent leur force entière. Si dans ce même cas la ſomme de leurs forces n'étoit pas la moindre qu'il eſt poſſible, en gardant la même vélocité reſpective, il y auroit un cas dans lequel néceſſairement ils perdroient moins de force que dans celui-ci; ne pouvant pas perdre plus de force qu'ils n'en ont; mais la vélocité reſpective étant donnée, la perte de la force eſt toujours la même *. Par conſéquent il eſt contradictoire que la ſomme des forces avant le Choc ne ſoit pas la moindre, quand les corps reſtent en repos par le Choc. Ce qu'il falloit prouver.

* 51. * 49.

Proposition XVIII.

Deux corps reſtent en repos après le Choc, quand avant le Choc leurs directions ſont contraires, & leurs forces en raiſon inverſe de leurs maſſes. 53.

Ces corps reſtent en repos quand la ſomme de leurs forces avant le Choc eſt la moindre qu'il eſt poſſible, poſant la viteſſe reſpective avec laquelle les corps s'approchent *. Cette ſomme eſt telle, lors que les directions ſont contraires, & les viteſſes en raiſon inverſe des maſſes *; mais dans ce cas les forces ont entr'elles cette même raiſon inverſe des maſſes *. Ce qu'il falloit prouver.

* 52. * 50. * 42.

C'eſt une expérience connue, que deux corps dont les viteſſes ſont en raiſon inverſe des maſſes, & dont les directions ſont contraires, reſtent en repos après le Choc. Il eſt conſtant par les expériences ci-deſſus * que ces forces ſont en raiſon inverſe des maſſes; de manière qu'on peut regarder cette propoſition, comme confirmée par l'expérience. Elle m'a néanmoins paru trop paradoxe, pour ne pas la confirmer par de nouvelles expériences.

* 37.

Experiences.

Je me ſuis ſervi pour ces expériences des boules de cuivre, dont j'ai 54.
parlé ci-deſſus *, ſuſpendues à la Machine de Mariotte pour les expériences du Choc, perfectionnée comme je l'ai décrite dans mon *Introdu-*

* 37.

ction à la Philosophie de M. Newton, de sorte qu'on peut faire les expériences avec la dernière exactitude. J'ai ajouté pour quelques unes des expériences suivantes, une pièce de bois bien affermie par des vis, dans laquelle il y avoit de chaque côté une cavité en demi-sphère, qui servoit à affermir une boule de terre glaise, quand avec des boules de cuivre je voulois choquer des boules affermies.

Toutes les boules de terre glaise dont je me suis servi, ont été faites dans un même moule d'un pouce & demi de diamètre, & quand il a falu comparer differentes cavités, je me suis servi de la même boule frappée dans differents endroits de sa superficie.

La *boule trois* ayant frappé une boule affermie de terre glaise, j'ai mesuré le diamètre de l'enfoncement. Ce diamètre a été beaucoup plus petit que le diamètre de l'enfoncement, lors que la *boule un* a frappé, avec une vitesse triple de la première, la même boule de terre glaise dans un autre endroit de sa superficie. Ce qui prouve la difference des forces. Cependant la boule de terre glaise ayant ensuite été suspendue à un fil, & ayant été frappée de deux côtés opposés en même tems par les mêmes boules de cuivre dont on vient de parler, avec la même vitesse que chaque boule avoit eue en frappant la boule affermie, la boule de terre glaise n'a pas été ébranlée, les deux boules de cuivre étant restées en repos & également enfoncées dans la terre glaise; moins que la *boule un* ne l'avoit été en frappant la boule affermie, & plus que la *boule trois* ne l'avoit été dans le même cas. Par où l'on voit que deux boules peuvent rester en repos après le Choc, quoi que leurs forces soient bien differentes.

Dans cette dernière expérience la *boule trois* a consumé sa force en enfonçant la terre glaise, & l'enfoncement a été augmenté par l'effort de la *boule un*, qui a pressé la boule de terre glaise contre la *boule trois*, c'est pourquoi l'enfoncement de la *boule un* a été diminué. Un corps qui reste en repos entre deux corps, s'il est pressé contre ces corps, est necessaire-
* 11. ment pressé également des deux côtés *, c'est pourquoi les enfoncemens ont été égaux des deux côtés.

55. Voici la même expérience un peu variée

1. J'ai suspendu une boule de terre glaise; elle a été frappée en même tems des deux côtés opposés par deux *boules trois*, avec des vitesses égales.

2. Ensuite la boule de terre glaise suspendue de même, a été frappée en même tems des deux côtés opposés, par deux *boules un*, avec des vitesses égales entr'elles, mais triple des vitesses qu'avoient eues les *boules trois*.

3. Enfin la boule de terre glaise a été frappée d'un côté par une *boule trois*,

trois, & en même tems de l'autre côté par une *boule un*; ces boules ayant les viteſſes dont nous venons de parler, qui comme on vient de voir, étoient en raiſon inverſe des maſſes.

Dans ces trois expériences la boule de terre glaiſe n'a point été ébranlée, les deux de cuivre étant reſtées en repos. Les enfoncemens des deux côtés ont été égaux entr'eux dans chaque cas; mais differents dans les differents cas. Dans le premier cas ils ont été les plus petits, dans le ſecond les plus grands, & dans le troiſième cas la grandeur de l'enfoncement a été moyenne entre les enfoncèmens des deux autres cas.

Ces expériences, quelque paradoxes qu'elles paroiſſent, ſont une ſuite de 56.
ce qu'on a vu ci-deſſus; & elles ne paroitront plus ſi paradoxes quand on fera attention à ce qui a été remarqué, que la force ne détruit jamais la force immédiatement *. Les forces dans ces expériences ne ſont détruites, * 26.
que parce qu'elles ont été employées à enfoncer les parties de la terre glaiſe. Or pour qu'une force ſe conſume en enfonçant les parties d'un corps, il ſuffit que ce corps lui reſiſte, & cette reſiſtence eſt égale à la force qui ſe conſume *. Cette reſiſtence vient de la force contraire & de l'inertie * 19. 23.
du corps qui reſiſte; par conſéquent plus un corps aura d'inertie, c'eſt à dire, plus il contiendra de matière *, moins il lui faudra de force pour * 4.
produire la même reſiſtence, c'eſt à dire, pour faire perdre la même force à un corps. Ce qui fait voir que pour que deux corps inégaux reſtent en repos après le Choc, il faut néceſſairement que leurs forces ſoient inégales. Cette expérience s'explique en ſuppoſant que la *force* & *l'inertie* différent entr'elles, & reciproquement cette expérience prouve bien clairement cette diſtinction.

Quand deux corps ſe choquent, l'action eſt égale à la réaction *, mais * 19.
la force de l'un ne produit pas ſeule la réaction à l'égard de l'autre, il y auroit réaction quand il n'y auroit point de force contraire; ce qui fait voir que *dans le Choc de deux corps, dont les forces ſont contraires, il y a deux* 57.
actions & deux réactions.

Proposition XIX.

La force perdue dans le Choc de deux corps, eſt proportionnelle au quarré 58.
de la viteſſe reſpective, multiplié par le produit des maſſes, diviſé par la ſomme des mêmes maſſes.

Soient A & B les deux corps; d leur viteſſe reſpective: il faut prouver que la force perdue dans le Choc, eſt $\frac{AB\,dd}{A+B}$.

La vélocité reſpective étant d, la force perdue eſt la même qu'elles que

 ſoient

* 49. soient les vitesses absolues *; il y a un cas dans lequel la vitesse respective
* 51. restant d les corps perdent leur force entière *; par conséquent ils perdront toujours la force qu'ils ont alors. La force qu'ils ont alors est égale
* 52. 50. à $Axx + Byy$, en supposant $x + y = d$ & $Ax = By$ *.

Par la première équation on a $x = d - y$ & $y = d - x$; substituant successivement ces valeurs dans l'équation $Ax = By$, on trouve $x = \frac{Bd}{A + B}$ & $y = \frac{Ad}{A + B}$, d'où l'on tire la force perdue

$$Byy + Axx = \frac{BAAdd + ABBdd}{\overline{A + B}^2} = \frac{ABdd}{A + B}.$$

Proposition XX.

59. *La vitesse commune de deux corps après le Choc se trouve en divisant par la somme des masses la somme, ou la difference des produits de chaque masse par sa vitesse.*

Il faut prendre la somme des masses quand les corps tendent vers le même côté, & leur difference quand les directions sont contraires.

Soient deux corps A & B; la vitesse du premier a, la vitesse du second b.

I. Supposons que les corps tendent vers le même côté; il faut démontrer que leur vitesse commune après le Choc, est $\frac{Aa + Bb}{A + B}$.

* 47. Il est constant que les deux corps ont la même vitesse après le Choc *.
* 41. La somme de leurs forces, avant le Choc, est $Aaa + Bbb$ *; d'où il faut soustraire la force perdue par le Choc, pour avoir la force après le Choc.

* 45. La vélocité respective est $a - b$ *, & la force perdue par le Choc, est
* 58. $\frac{ABaa - 2ABab + ABbb}{A + B}$ *, par où l'on trouve $\frac{AAaa + 2ABab + BBbb}{A + B}$ la force qui reste après le Choc.

* 47. Les deux corps après le Choc ayant la même vitesse * ne forment qu'un corps, dont la masse est $A + B$. Divisant la force que nous venons de
* 41. trouver par cette masse, on trouve le quarré de la vitesse *, qui par conséquent est $\frac{AAaa + 2ABab + BBbb}{\overline{A + B}^2}$; en extraiant la racine quarrée on trouve la vitesse $\frac{Aa + Bb}{A + B}$.

II. Quand

II. Quand les directions sont contraires, la somme des forces avant le Choc est de même $Aaa + Bbb$ *; la vélocité respective est $a + b$ *; * 41.
la force perdue par le Choc est $\frac{ABaa + 2ABab + ABbb}{A + B}$ *; la force * 46. * 58.
qui reste après le Choc est par conséquent $\frac{AAaa - 2ABab + BBbb}{A + B}$;
d'où l'on tire la vitesse commune $\frac{Aa - Bb}{A + B}$ en supposant Aa plus grand que Bb.

On voit par cette proposition que la règle ordinaire qu'on emploie pour 60.
trouver la vitesse dont il s'agit ici est exacte, quoi qu'on l'ait déduite de ce principe contraire à l'expérience, que la force est proportionnelle à la masse par la vitesse, ce qui avoit fait appeller ce produit quantité du mouvement. La raison pourquoi ce principe n'a pas mené dans l'erreur, c'est qu'on a supposé en même tems, qu'après le Choc & avant le Choc la force étoit la même, sans faire attention à l'effort qu'il faut pour enfoncer ou applatir les parties, & une erreur a été le correctif de l'autre.

PROPOSITION XXI.

Les changemens, dans les vitesses des deux corps par le Choc, sont en rai- 61.
son inverse des masses.

1.er Cas, quand les corps tendent vers le même côté.

Soit AB la masse d'un des corps & BN, sa vitesse; le produit de la Fig. 3.
masse par la vitesse est AN. Soit BC la masse de l'autre corps, & BE sa vitesse; le produit de la masse par la vitesse est BF.

Si on continue EF jusques en D, & qu'on achève le rectangle AO, si ensuite on mène DO coupant BN en I, & que par ce point on mène HL parallèle à AC, on aura le rectangle HC égal à la somme des rectangles NA & BF, à cause de l'égalité des complémens NH & LE dans le parallélogramme MF. Le rectangle HC est donc égal à la somme des produits des masses par les vitesses. En divisant cette somme, par la somme des masses AB + BC ou AC, on trouve BI la vitesse après le
Choc *. Le changement dans la vitesse de AB est NI, celle de la vi- * 59.
tesse de BC est EI; mais à cause des triangles semblables ION, IDE, DE ou AB est à NO ou BC comme EI est à NI : c'est à dire, les masses en raison inverse des changemens dans les vitesses. Ce qu'il falloit démontrer.

2.e Cas, lors que les directions sont contraires.

Soit encore AB la masse d'un corps : sa vitesse BN; le produit de la Fig. 4.
masse

masse par la vitesse BM. La masse de l'autre corps est représentée par BC; sa vitesse est BE; & le produit de la masse par la vitesse est BF.

Qu'on conçoive achevé le rectangle MO DF, dont la diagonale DO coupe EN en I, par où l'on conçoit HL parallèle à AB, faisant les complemens NH & LE égaux entr'eux. En retranchant NH de MB, j'ai HB égal à MB, dont on a retranché BF & BL: par conséquent en ajoutant BL à BH, j'ai AL égal à MB moins BF; c'est à dire, à la différence des produits des masses par leurs vitesses. En divisant cette différence par AC somme des masses, on a BI la vitesse com-
* 59. mune après le Choc *.

La vélocité que perd le corps AB est NI: le corps BC ne perd pas seulement toute la vitesse BE, mais il est porté avec la vitesse BI vers le côté opposé, de sorte que le changement dans sa vitesse est EI. A cause des triangles semblables OIN & DEI, DE ou AB est à NO ou BC comme EI, à NI: c'est à dire les changemens dans les vitesses en raison inverse des masses.

On auroit pu démontrer cette proposition par le moyen de la proposition dixhuitième, sans la déduire de la proposition précédente; en supposant les corps mûs dans un bateau qui auroit eu la vélocité BI.

Proposition XXII.

62. *Si trois corps se choquent en même tems, ils ne se séparent pas après le*
* 47. *Choc *, & leur vitesse commune se détermine, en supposant que deux des trois se choquent, & qu'ensemble ils choquent ensuite le troisième.*

Cette règle est une suite du calcul même, qui ne diffère pas dans quelque ordre qu'on suppose que se fassent les Chocs. Si les trois corps sont A, B, & C. Il est indifférent de supposer que A choque B, & qu'ensemble ils frappent C, ou que B frappe C, & qu'ensuite ils sont choqués par A. On trouve toujours la même vitesse après les deux Chocs. Comme il est indifférent dans quel ordre les Chocs se fassent, ils peuvent se faire en même tems, sans qu'il y arrive du changement.

63. La somme des applatissemens ou enfoncemens est la même dans tous les cas, à cause que la force perdue est la même dans chacun. Quand les deux Chocs ne se font pas en même tems, le premier applatissement s'augmente par le second Choc. Quand les Chocs arrivent en même tems, les applatissemens sont égaux quelqu'inégales que soient les forces, comme nous
* 54. l'avons déjà dit ci-devant *.

COROLLAIRE.

Si deux corps contigus frappent ou font frappés par un troisième corps, l'effet du Choc est le même que si les deux n'avoient formé qu'une masse. Il n'y a de différence que dans les applatissemens, dont néanmoins la somme est la même, comme nous venons de le dire. Quand je parle de la somme des applatissemens ou enfoncemens, je suppose qu'on les mesure par la force qu'il faut pour les faire. 64.

EXPERIENCES.

Touchant la perte de la force dans le Choc.

J'ai dit dans l'Art. 4. * qu'on trouveroit à la fin de celui-ci des expériences pour prouver que la force perdue, dans les cas dans lesquels les forces sont contraires, est entièrement employée à enfoncer les parties des corps, & que par conséquent la force ne détruit pas, du moins immédiatement, la force contraire. C'est ce qu'on verra dans les expériences suivantes, dans lesquelles la force perdue est toujours la même, lors que les enfoncemens des parties sont égaux, quelles que soient les forces absolues, ou les directions des corps; c'est à dire, qu'il est indifferent à cet égard que les forces soient contraires ou non, ou même que les corps frappent un obstacle inébranlable; le même enfoncement donne toujours la même perte de force. 65. * 26.

Les expériences suivantes ont été faites avec les boules de cuivre, dont nous avons parlé ci-dessus *. Les boules de terre glaise n'ont pû être toutes formées dans le même moule; mais pour qu'on pût déterminer bien exactement, si les enfoncemens étoient égaux, on a eu toujours soin qu'une partie de la superficie fut une portion de la surface d'une sphère d'un pouce & demi de diamètre, & le Choc s'est toujours fait contre cette partie de la superficie. * 37.

La *boule un*, avec deux dégrés de vitesse, c'est à dire, quatre dégrés de force, ayant frappé une boule de terre glaise affermie, c'est à dire, un obstacle inébranlable, est restée en repos; la force perdue a été quatre; on a mesuré exactement le diamètre de l'enfoncement.

La *boule deux*, avec une vitesse deux, c'est à dire, avec huit dégrés de force, ayant frappé une boule de terre glaise du même poids, & en repos, elles ont eu après le Choc une vitesse commune un, c'est à dire, quatre dégrés de force, de sorte qu'il y a eu quatre dégrés de force perdue. Ce qui est conforme à ce qui a été démontré *. La force perdue dans cette ex- * 58. 59.

expérience a été la même que dans l'expérience précédente, & les enfoncemens dans toutes deux ont été exactement les mêmes.

Dans ces deux expériences il n'y a point eu de force contraire, & on ne sauroit soupçonner que la force perdue ait eu d'autre effet, que d'enfoncer les parties, à quoi par conséquent elle a été emploiée toute entière. Dans la seconde expérience, la boule de cuivre a perdu six degrés de force, mais deux ont été emploiés à surmonter l'inertie de la terre glaise, à laquelle ces deux dégrés de force ont été communiqués, de sorte que les quatre dégrés perdus ont été entièrement emploiés à enfoncer les parties
* 25. de la terre, comme cela a déjà été expliqué *.

Deux *boules un* chacune avec deux dégrés de vitesse, c'est à dire, quatre dégrés de force, ayant frappé avec des directions contraires une boule de terre glaise suspendue, la boule n'a pas été ébranlée & les huit dégrés de force ont été détruits. Dans ce cas il y a eu deux enfoncemens, chacun exactement égal aux enfoncemens des expériences précédentes.

66. Pour ce qui regarde les forces inégales détruites dans le Choc, & dont on a parlé dans la Proposition XVIII, j'ai fait les expériences suivantes.

La *boule un*, avec trois dégrés de vitesse, c'est à dire, neuf dégrés de force, ayant frappé une boule de terre glaise, dont le poids étoit égal à celui de la *boule deux*, on a mesuré le diamètre de l'enfoncement. Les deux boules, qui formoient ensemble une masse trois, n'ont eu après le Choc qu'un dégré de vitesse, c'est à dire, trois dégrés de force, & il y a eu six dégrés de force perdue, ce qui convient encore avec la proposition 20me.

La *boule un*, avec trois dégrés de vitesse, c'est à dire neuf dégrés de force, & la *boule trois* avec un dégré de vitesse, c'est à dire trois dégrés de force, ont frappé en même tems, dans des directions contraires, une boule de terre glaise suspendue; les forces entières ont été perdues, comme nous l'avons déjà dit auparavant *. Il y a eu ici douze dégrés de force
* 55. perdue, c'est à dire, le double de ce qui a été perdu dans l'expérience précédente, & chacun des deux enfoncemens dans la dernière expérience a été exactement égal à l'enfoncement de l'expérience précédente.

ARTICLE VIII.

Du Choc des corps fléxibles à ressort.

* 27. Nous avons dit ci-devant * ce qu'on entendoit par corps *fléxibles à ressort* ou *élastiques*.

PRO-

PROPOSITION XXIII.

Les corps élastiques se séparent après le Choc.

Les parties des corps s'enfonçent ou s'applatissent par le Choc *; aussi 67. * 24.
long-tems qu'elles restent enfoncées, les corps ne se séparent pas *: mais * 47.
les parties venant à se débander, c'est à dire, retournant à leur première figure, l'effort qu'elles font est semblable à celui d'un ressort plié entre deux corps, lequel venant à se débander les repousse nécessairement suivant des directions contraires, ce qui sépare les corps.

PROPOSITION XXIV.

Un ressort plié entre deux corps, venant à se débander, leur communique des forces en raison inverse de leurs masses. 68.

Cette proposition regarde tous les corps en géneral, dont la cohésion des parties est assez forte pour résister à la pression du ressort. Le ressort en se débandant, communique de la force de la manière qu'il a été expliqué *; son effort est une véritable pression * qui peut être moindre que * 12.
celle de la cohésion des parties; c'est ce que nous supposons pour que le * 9.
ressort emploie tout son effort à donner de la force au corps, & qu'il n'en emploie point à enfoncer les parties.

L'effort que fait un ressort d'un côté en se débandant, dépend de la résistence qu'il trouve du côté opposé, c'est à dire, de la résistence de l'obstacle sur lequel il s'appuie, parce que l'action & la réaction sont égales entre elles *; de manière qu'il emploie tout son effort d'un seul côté, * 19.
quand l'obstacle sur lequel il s'appuie ne cède point. Par conséquent l'effort avec lequel un ressort plié entre deux corps A & B en repos se débande vers A, c'est à dire, pousse ce corps, est à l'effort avec lequel il se débande vers B. ou pousse ce corps, comme la résistence de B est à la resistence d'A. Or ces résistences, dans des corps en repos, ne venant que de l'inertie de la matière, sont entre elles comme les masses de ces corps *; qui par conséquent sont entre elles en raison inverse des forces que * 4.
leur communique le ressort.

Cette démonstration a lieu aussi quand le ressort & les deux corps sont 69.
transportés d'un mouvement commun.

Cette proposition est confirmée par une expérience connue. Si deux corps viennent à se choquer, leurs directions étant contraires & leurs vitesses en raison inverse des masses, ils restent en repos s'ils ne sont point fléxibles à ressort *; mais s'ils sont élastiques, dans le moment que les par- * 53. 42.
ties sont enfoncées, elles forment un ressort entre deux corps en repos, puis qu'ils resteroient dans cet état, si le ressort ne se débandoit pas; or

l'effet de l'action du ressort est de renvoier, comme il est connu, les corps avec des vitesses égales à celles qu'ils avoient avant le Choc, c'est à dire, avec des vitesses en raison inverse des masses, & par conséquent avec des forces qui ont entre elles la même raison inverse des masses; comme il suit
* 37. des expériences décrites ci-dessus *, ainsi qu'il a été démontré *.
* 42.

Proposition. XXV.

70. *La vitesse respective, avec laquelle deux corps élastiques se séparent après le Choc, est égale à celle avec laquelle ils se sont approchés.*

Si les corps n'avoient pas de ressort, ils auroient un mouvement com-
* 47. mun après le Choc *; par conséquent, dans le moment que les parties élastiques sont pliées avant qu'elles se débandent, on a un ressort qui agit
* 69. sur ces corps comme s'ils étoient en repos *; le mouvement commun étant semblable à celui d'un bateau, dans lequel les corps seroient transportés & dans lequel ils se sépareroient par le ressort comme s'ils étoient en repos. On voit par là, que pour déterminer la vitesse avec laquelle deux corps se séparent, il faut déterminer la vitesse avec laquelle ils se sépareroient, si le ressort qui se débande entre eux, s'y débandoit en supposant les corps en repos.

Soient A & B les deux corps; d leur vitesse respective avant le Choc; x la vitesse que le ressort imprime au corps A; y celle qu'il imprime au corps B; $x + y$ est donc la vitesse avec laquelle les corps se séparent: il faut démontrer que $x + y = d$.

La somme des forces que le ressort communique aux deux corps est
* 41. $Axx + Byy$ *; cette force est égale à la force avec laquelle les ressorts ont été pliés, laquelle est égale à celle qui dans le Choc a enfoncé les
* 25. 58. parties, & qui est $\frac{ABdd}{A+B}$ *. On a donc $Axx + Byy = \frac{ABdd}{A+B}$, ou $AAxx + ABxx + AByy + BByy = ABdd$.

Par la proposition précédente, $x, y :: B, A$, c'est à dire, $Ax = By$; ce qui donne $AAxx + BByy = 2ABxy$; ce qui change l'équation précédente en celle-ci, $ABxx + 2ABxy + AByy = ABdd$; divisant par AB on a $xx + 2xy + yy = dd$, c'est à dire, $x + y = d$. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition XXVI.

71. *Dans le Choc des corps fléxibles à ressort, le changement dans la vitesse de chaque corps est double de celle qu'il y auroit, si les corps n'avoient pas de ressort.*

Soient

Soient A & B les deux corps; d leur viteſſe reſpective. La ſomme des changemens qui arriveroient à leurs viteſſes, eſt égale à d * en ne faiſant point d'attention au reſſort; & nommant x le changement pour le corps A; & y celui de la viteſſe du corps B, on a $x, y :: B, A$ *. * 47. * 61.

Nommons maintenant u le changement dans la viteſſe de A par l'action du reſſort; & z le changement dans la viteſſe de B par la même action; $x + u$ eſt le changement total dans la viteſſe de A, & $y + z$ dans celle de B.

$u, z :: B, A$ *; c'eſt à dire, $u, z :: x, y$; ou $u + z, x + y :: z, y$ Mais $u + z = d$ *; c'eſt à dire, $u + z = x + y$; par conſéquent $z = y$, & $y + z = 2y$, comme auſſi $x + u = 2x$. Ce qu'il falloit prouver. * 68. * 70.

On déduit de cette propoſition une méthode aiſée de déterminer la viteſſe des corps élaſtiques après le Choc. Il faut d'abord trouver leur vélocité commune après le Choc, en ne faiſant point d'attention à leur reſſort *; par là on trouve le changement dans la viteſſe de chacun: il faut doubler ce changement ſi les corps ont du reſſort. * 59.

Les viteſſes qu'on trouve par cette règle, ſont les mêmes que celles qu'on découvre par les autres règles qui ont été données. Quelques Mathématiciens les ont déduites du principe que la force eſt proportionnelle à la maſſe par la viteſſe; mais ils ont ſuppoſé en même tems qu'un reſſort en ſe débandant, communiquoit des forces égales des deux côtés, par où il y a eu encore compenſation d'erreurs.

PROPOSITION XXVII.

La ſomme des forces de deux corps élaſtiques eſt la même avant & après le Choc. 72.

Il n'y a de force perdue par le Choc que celle qui eſt emploiée à enfoncer les parties *; quand les corps ont du reſſort, les parties enfoncées retournent à leur première figure avec un effort égal à celui qui a été emploié à les plier, ce qui rend au corps une force égale à celle qui étoit perdue; l'effort du reſſort n'ayant d'autre effet que de donner de la force aux corps. Ce qui fait que la force totale, ou la ſomme des forces n'eſt pas changée par le Choc. * 25.

On peut démontrer cette même propoſition, en prouvant, que la ſomme des produits des maſſes par les quarrés des viteſſes eſt la même avant & après le Choc; ce que M. Huygens a démontré dans ſon traité de la percuſſion.

PROPOSITION XXVIII.

Pluſieurs corps élaſtiques étant contigus, ſi l'un eſt frappé par un autre 73.

 corps

corps élastique, les resſorts ſont pliés comme ſi le corps frappé étoit ſeul : & ſi un corps élastique joint à un autre corps élastique, en frappe un autre, les resſorts ſe plient comme s'il frappoit ſeul.

Cette propoſition ne peut ſe prouver que par l'expérience, & ne peut s'expliquer qu'en concevant le reſſort plié & ſe débandant, avant que le corps contigu puiſſe faire ſon impreſſion.

Experiences.

Ayant ſuſpendu pluſieurs boules d'yvoire qui ſe touchoient, & ayant frappé la première par une autre boule, la dernière a été miſe en mouvement, comme ſi les boules avoient été placées à quelque diſtance l'une de l'autre, & que les Chocs euſſent été ſucceſſifs, quoique cela ſe fit dans un moment preſque inſenſible, même lors qu'il y avoit cinq ou ſix boules contigues.

Ayant une boule d'yvoire qui ſe ſéparoit à vis en deux hémiſphères, j'ai laiſſé tomber l'un des hémiſphères d'une certaine hauteur ſur du marbre bleu un peu mouillé : j'ai meſuré exactement le diamètre de la tache que l'yvoire laiſſoit ſur le marbre, ce diamètre étoit celui de la partie applatie par le Choc. Ayant rejoint enſuite l'autre hémiſphère, je laiſſai tomber la boule entière de la même hauteur ; après quoi je mis un morceau de plomb dans la boule qui étoit creuſe. Ce plomb étoit ſerré entre les deux hémiſphères par le moyen de la vis : j'ai laiſſé encore tomber la boule de la même hauteur : dans les trois cas la tache a été exactement la même. La boule étoit faite de manière que le même endroit de la boule frappoit toujours le marbre ; précaution qu'on a obſervée, parce que l'élaſticité n'eſt pas par tout la même dans l'yvoire.

Une autre boule d'yvoire entièrement ſolide, dont le diamètre étoit égal à celui de la boule dont on vient de parler, en tombant ſur le marbre de la même hauteur que l'autre, y a laiſſé une tache ſans comparaiſon plus grande ; quoiqu'elle fut moins peſante que celle qui contenoit le plomb.

Cette expérience fait voir clairement, que le Choc qui fait plier les parties élaſtiques ne vient que de la force des parties qui ſont auſſi intimement jointes enſemble, que le ſont les parties d'un même corps. La force d'un autre corps, quoique preſſé par une vis, ne portant aucun changement à l'effort qui fait plier le reſſort.

Mon deſſein en commençant cet Eſſai, étoit d'y traiter auſſi du Choc de trois corps, fléxibles à reſſort, dont il n'eſt pas ſi aiſé, qu'il paroît d'abord, de déterminer la viteſſe après le Choc : comme auſſi de dire quelque choſe touchant l'effet de deux efforts, qui agiroient en même tems ſur

ſur un corps, &c. Mais comme cet Eſſai eſt déjà aſſez long, étant deſtiné à être inſeré dans un Journal, j'aime mieux renvoier ces matières, avec quelques autres, à un Traité plus étendu, que je pourrai donner dans quelque tems, ſur ce même ſujet. A Leide ce 10. d'Avril 1722.

SUPPLEMENT

à

L'ESSAI SUR LE CHOC DES CORPS.

Depuis que ma nouvelle Théorie du Choc a été imprimée, on m'a communiqué pluſieurs objections, qu'on a faites contre le principe ſur lequel j'ai raiſonné, & que j'ai tâché de prouver; ſavoir *que la force eſt proportionnelle au produit de la maſſe par la quarré de la viteſſe.* J'ai auſſi fait quelques nouvelles expériences ſur ce ſujet. C'eſt là l'occaſion de ce Supplément. Je n'entrerai pas dans le détail des objections dont je viens de parler: celles que je crois avoir prévenues dans mon Eſſai, je ne les regarde pas comme des objections, juſqu'à ce qu'on ait répondu à ce que j'ai avancé; avant cela je ne ſaurois que répeter ce que j'ai déjà dit. Même je ne répondrai point directement à celles que je tâcherai de refuter; je me contenterai de faire quelques réflexions génerales ſur la propoſition dont il s'agit, deſquelles il ne ſera pas difficile, à ce que j'eſpère, de tirer ce qu'il y a à repondre aux différentes objections. Je ſuis fort éloigné de vouloir entrer en diſpute avec qui que ce ſoit, ce qui eſt preſque inévitable quand on répond directement aux objections de tel ou tel. Mon but eſt d'éclaircir la vérité autant que j'en ſuis capable, à quoi les diſputes d'ordinaire ne ſont pas fort propres.

Je dois commencer par avertir, que depuis que mon Eſſai eſt imprimé, j'ai vu le livre *de Caſtellis* du Marquis Poleni, Profeſſeur à Padoue, dont le génie & l'habileté ſont connus par pluſieurs autres ouvrages. Il décrit dans ce traité quelques expériences ſur la meſure de la force; elles ne différent de celles qu'on trouve dans mon Eſſai. N. 37. que dans quelques circonſtances qui ne ſont pas eſſentielles. Je crois devoir faire cet avertiſſement, parce que celles dont il s'agit ici ſont de beaucoup antérieures aux mien-

miennes. J'ajouterai encore, de peur qu'on ne croie que je donne comme nouveau ce qui eſt dans mon Eſſai, & qu'on pourroit trouver autre part, que je ne donne comme tel que ce qui regarde la manière de démontrer les règles du Choc.

Quelques perſonnes ont cru qu'il y avoit un défaut dans mes expériences, en ce que je n'avois pas fait attention à la réſiſtence de l'air. Je puis les aſſurer que cette réſiſtence eſt ſi petite qu'elle ne produit dans les expériences aucun changement dont on puiſſe s'apercevoir. Et ſi l'effet de cette réſiſtence étoit ſenſible, les expériences prouveroient que la différence des forces de deux corps égaux eſt plus grande que la différence des quarrés de leurs viteſſes.

D'autres perſonnes ont voulu déduire des loix de la réſiſtence, des preuves contre les concluſions qu'on tire des expériences dont je viens de parler, & qu'on trouve dans mon Eſſai N. 37. Ces différentes objections ſont toutes fondées ſur des principes différents, & celles qui m'ont été communiquées ſe refutent mutuellement; ce qui fait voir qu'il n'y a point de chemin fort ſûr, pour accorder avec l'expérience le principe que la force eſt proportionnelle à la viteſſe; & que pour y parvenir chacun donne un ſens différent au mot de *Force*, ſuivant qu'il enviſage la choſe d'un différent côté

Il me paroit qu'on ne ſauroit revoquer en doute que par le mot de *Force* dans le ſujet en queſtion, on ne doive entendre ce qu'a le corps en mouvement, & qu'on ne trouve pas dans le même corps quand il eſt en repos; c'eſt à dire, ce par quoi un corps peut agir ſur un obſtacle. La meſure de cette *Force* eſt cette action même: car un corps ne perd de ſa force que par cette action, &, à cauſe que l'action eſt égale à la réaction, il en perd en raiſon de cette action. Par conſéquent pour meſurer la force d'un corps, il faut prendre la ſomme de toutes les actions par leſquelles ce corps a conſumé ſa force entière, ſans faire attention au tems. Un corps produit un même effet en d'autant moins de tems que l'intenſité de ſon action eſt plus grande; c'eſt pourquoi il ne faut conſidérer que l'effet total; & c'eſt ce qu'on fait dans les expériences dont il s'agit ici. Tout ceci paroitra encore plus clairement, ſi on fait attention à ce qui ſuit.

On demeure d'accord qu'un reſſort ſe débande avec une force égale à celle avec laquelle il a été bandé. De quelque manière qu'un reſſort ait été bandé, quand il eſt également plié il ſe débande de même; par conſéquent il faut toujours la même force pour plier également un reſſort, ſans qu'on doive avoir égard au tems, ni à l'effort inſtantané de la force. Si cet effort eſt plus grand, le tems ſera moindre.

De même on pourra conclure que les forces ſont égales qui ſe conſument en

en bandant également des ressorts semblables; & que des ressorts semblables également bandés communiquent, en se débandant, des forces égales aux corps qu'ils mettent en mouvement; ce qui donne deux moyens de mesurer les forces par expérience.

EXPERIENCE.

J'ai fait faire plusieurs cilindres d'yvoire, de différents poids, & de poids égaux, chacun d'un pouce & demi de diamètre, & arondis en hémisphère vers l'une de leurs extrémités.

Par différentes expériences je me suis assuré que tous ces cilindres avoient une élasticité égale dans le milieu de l'hémisphère, c'est à dire vers l'extrémité de l'axe du côté arondi.

J'ai laissé ensuite tomber de la hauteur de dixhuit pouces un des cilindres, & de la hauteur de neuf pouces un autre dont le poids étoit double du premier. Pour que rien ne pût varier, ou rendre irrégulier le mouvement des cilindres, je les soutenois par un petit fil attaché à l'extrémité de l'axe oposé à l'hémisphère: en lachant le fil, le cilindre descendoit suivant la direction de l'axe, & frappoit par le milieu de la partie arondie un marbre bleu horisontal & bien affermi.

Les applatissemens de l'yvoire dans ces deux cilindres étoient exactement égaux; ce qui prouve que les forces de ces corps, qui s'étoient consumées en pliant également des ressorts entièrement semblables, étoient égales: or les produits des quarrés des vitessés par les masses étoient égaux, ce qui confirme ce que j'ai soutenu sur la mesure de la force.

Les hauteurs auxquelles rejaillissent les corps qui tombent, sont égales, ou du moins en même raison que celles dont ils sont tombés; par conséquent, des ressorts semblables, & également pliés, qui communiquent aux corps des forces égales, leur communiquent des vitesses en raison sous-doublée des masses.

Quand les cilindres en tombant ont eu des vitesses en raison inverse des masses; c'est à dire, quand les forces ont été égales suivant le sentiment ordinaire, les ressorts ont été pliés fort inégalement, & les diamètres des applatissemens étoient presque comme 2. à 3. Les applatissemens de l'yvoire sont très sensibles par les taches qui restent sur le marbre après le Choc, quand le marbre est un peu humide.

Dans mon Essai j'ai donné une démonstration de la proposition en question, pour faire voir qu'on pouvoit, même sans expérience, prouver ce que j'ai avancé de la manière de mesurer la force. J'ajouterai une démonstration tout-à-fait différente, pour faire voir que par des chemins qui

n'ont rien de commun, on parvient à la connoiſſance de la même vérité.

Fig. 5. Concevons en A un corps mu, ſuivant la direction AB, avec une viteſſe proportionelle à cette ligne. Ce corps a la force qui convient à cette viteſſe. Si dans le moment que le corps eſt en A, il eſt pouſſé par AD, en ſuppoſant l'angle BAD droit, ce mouvement ne change en rien le mouvement qu'a le corps, & le corps peut être pouſſé comme s'il étoit en repos; car ſi cet angle étoit aigu, le mouvement par AD accéléreroit le mouvement par AB, parce qu'en partie il tendroit du même côté; ſi l'angle étoit obtus, les deux mouvemens ſeroient en partie contraires; par conſéquent lorſque l'angle eſt droit, la force qu'on communique au corps par AD ne change pas celle que le corps a déjà, & ne ſouffre elle même aucun changement par cette dernière. C'eſt pourquoi pour communiquer ſuivant la direction AD, au corps en queſtion, une vélocité proportionelle à la ligne AD, il faut le pouſſer comme on pouſſeroit ce corps s'il étoit en repos; c'eſt à dire qu'il faut lui communiquer la force qui convient à cette viteſſe. Mais comme ce ſecond mouvement ne change rien au premier, il ſuit que la force totale du corps eſt égale à la ſomme des forces qui conviennent aux viteſſes AB & AD. D'un autre côté il eſt conſtant, que la viteſſe du corps en queſtion eſt AC, diagonale du rectangle ABCD; par conſéquent la force qui convient à la viteſſe AC, quand il s'agit du même corps, eſt égale à la ſomme des forces qui conviennent aux viteſſes AB & AD.. Il eſt connu que le quarré de la diagonale AC eſt égal à la ſomme des quarrés de AB & de AC; & comme cette égalité entre les forces, comme auſſi l'égalité entre les quarrés, ont lieu l'une & l'autre de quelque manière qu'on varie la diagonale, ou les côtés du parallélogramme ABCD, il s'en ſuit, que lorſqu'il s'agit du même corps, les forces qui conviennent aux différentes viteſſes, ſont entre elles comme les quarrés de ces viteſſes.

Quand l'angle BAD n'eſt pas droit, ce qu'on a démontré de l'égalité des forces n'a pas lieu, non plus que ce qui regarde l'égalité des quarrés; & l'examen de ce qui arriveroit dans les différents cas, pourroit ſervir à confirmer la propoſition que je ſoutiens dans cet écrit, ſi c'étoit ici le lieu d'entrer dans ce détail.

J'ajouterai un mot touchant l'Auteur de la découverte de cette même propoſition. Je ne crois pas qu'on puiſſe révoquer en doute que M. Leibnitz ne ſoit le premier qui ait dit en propres termes, que la force eſt proportionelle au quarré de la viteſſe. Mais à l'égard de cette découverte, il eſt arrivé ce qu'on a vu à l'égard de preſque toutes les autres, c'eſt d'être entrevue avant que d'être entièrement dévelopée. Cela étoit arrivé à M.

M. Huygens, à l'égard de celle dont il s'agit ici. I. Dans ses démonstrations soit des pendules soit du Choc, il déduit tout de la considération des hauteurs auxquelles les corps peuvent monter, lesquelles, comme il est connu, sont proportionelles aux quarrés des vitesses. II. Quand il appelle avec les autres *quantité de mouvement* le produit de la masse par la vitesse, il n'entend pas par là la force par laquelle un corps est transporté, & qui par la loi de la continuation du mouvement ne se perd point sans se consumer par quelque action; il attache cette idée à ce qu'il nomme force ascensionelle, qu'il dit être proportionelle aux quarrés de la vitesse; voici ses propres termes. „ *Ce n'est pas une nécessité que la quantité de mouvement se conserve toujours, si elle ne se consume à quelque chose; mais c'est une loi constante que les corps doivent garder leur* force ascensionelle, *& que pour cela la somme des quarrés de leurs vitesses doit demeurer la même.* Hist. des ouvrages des sçavans; Juin 1690. p. 452.

REMARQUES

Sur la Force des Corps en mouvement, & sur le Choc; précédées de quelques Réflexions sur la manière d'écrire de Monsieur le Docteur SAMUEL CLARCKE.

On ne sçauroit révoquer en doute, que les disputes entre les gens de lettres ne fussent un excellent moyen pour éclaircir les questions difficiles, si ce qu'on dit souvent étoit vrai, *que l'étude contribue à rendre les gens plus modérés.* Mais, combien a-t-on vu de disputes finir sans aigreur?

Cette réflexion m'a empêché jusques ici de répondre directement à aucune des pièces qui ont paru, en assez grand nombre, contre ce que j'ai écrit sur la Force & le Choc. La plûpart de ceux, qui ont attaqué mes écrits, ont observé à mon égard toutes les régles de l'honnêteté; & quoique cette conduite leur fasse à eux-mêmes plus d'honneur qu'ils ne m'en ont fait, je ne me crois pas dispensé de devoir ici leur en marquer ma reconnoissance.

La seule crainte du sort ordinaire des disputes m'a empêché d'entrer en

lice; quoique j'avoue volontiers, que parmi mes adverſaires, il y en a, dont un homme amoureux de réputation ſe feroit honneur.

J'ai travaillé d'une autre manière à éclaircir la vérité, autant que j'en ſuis capable. En écrivant, j'ai tâché de propoſer mes argumens d'une manière qui put les faire ſervir à reſoudre les difficultés; ou bien, j'ai examiné les objections, ſans répondre directement à ceux qui en étoient les Auteurs. J'ai même propoſé quelques difficultés d'avance, avec les réponſes que je croiois pouvoir ſervir à les réſoudre; mais, en ceci, je n'ai pas toujours eu le bonheur d'être lu de ceux qui m'ont objecté les mêmes difficultés depuis.

Je ne vois aucune raiſon, juſqu'à préſent, pour me faire changer de méthode; & je la ſuivrai encore dans cet écrit, dans lequel je me propoſe de donner quelques nouveaux éclairciſſemens ſur la matière de la Force & du Choc. J'éſpére qu'ils pourront ſervir à réſoudre des difficultés ſpécieuſes, propoſées par d'habiles gens, & par d'illuſtres Mathématiciens, qui ſont dans des idées contraires.

Mais, avant d'entrer en matière, je crois devoir faire quelques réflexions ſur une Lettre de M. Samuel Clarcke, inſérée dans le N. 401. des *Tranſactions Philoſophiques de la Société Royale de Londres.*

Je ne parlerai point ici de la meſure de la Force, qui fait le ſujet de la Lettre: je n'ai pas le moindre deſſein d'entrer en diſpute; & je me borne à examiner la manière dont M. Clarcke écrit.

Voici le commencement de ſa Lettre.

„ It has often been obſerved *in general*, that *learning* does not give „ men *underſtanding*; and that the abſurdeſt things in the world have „ been aſſerted and maintained, by Perſons whoſe education and ſtudies „ should ſeem to have furnish'd them with the greateſt extent of ſcience.

„ That knowledge in many *languages* and *terms* of *art*, and in the „ hiſtory of *opinions* and *romantick hypotheſes* of Philoſophers, should „ ſometimes be of no effect in correcting *Mens judgment*, is not ſo „ much to be wonder'd at. But that in *Mathematicks* them ſelves, „ which are a *real ſcience*, and founded in the *neceſſary nature of things*; „ men of very great abilities in *abſtract* computations, when they come „ to *apply* thoſe computations to the *nature of things*, should perſiſt in „ maintaining the moſt *palpable abſurdities*, and in refuſing to ſee ſome „ of the moſt *evident and obvious truths*; is very ſtrange.

„ An extraordinary inſtance of this, we have had of late years in very „ eminent Mathematicians, Mr. *Leibnitz*, Mr. *Herman*, Mr. *'sGraveſande*, and Mr. *Bernoulli*; *who* (in order to raiſe a duſt of oppoſition „ againſt Sir *Iſaac Newton's* Philoſophy, the glory of which is the *ap-*

„ *pli-*

„ *plication* of *abstract Mathematicks* to *the real Phœnomena of Nature*) „ have for some years insisted with great eagerness, upon a principle „ which subverts all science, and which may easily be made appear, „ (even to an ordinary capacity) to be contrary to the *necessary and essential nature of things.*"

Qu'on juge du sermon par l'exorde.

Il faudroit expliquer, à ceux qui n'entendent pas l'Anglois, ce que je viens de copier; mais, il contient quelque chose de trop flateur pour moi, pour en être le Traducteur moi-même. Et, quoique copier soit moins que traduire, je n'aurois pas ôsé raporter ici ce que cette Lettre contient de trop avantageux pour moi, si les louanges ne se trouvoient adoucies par quelques traits, que je partage volontiers avec les illustres noms auxquels le mien se trouve joint par je ne sçai quelle fortune.

Il n'y a qu'un endroit dans cette Lettre, qui me fasse de la peine; ce n'est pas d'être accusé de manquer de *bon-sens* (*understanding*); d'avoir avancé *les absurdités les plus palpables*, (*the most palpable absurdities*); d'avoir refusé de voir des *vérités les plus frapantes*, (*most evident and obvious truths*): Expressions, qui dans l'original ont une toute autre énergie, par la manière dont elles sont enchassées dans la suite du discours; mais qui, bien appréciées, ne signifient après tout rien de plus que ceci: c'est que je ne suis pas de l'avis de M. Clarcke sur la question dont il s'agit. Le bonheur de penser comme lui me manque quelque fois.

M. Clarcke, à la vérité, s'exprime d'une manière un peu forte, & s'abandonne à un zèle qui pourra paroître déplacé. Il s'agit de sçavoir, si un corps en mouvement a quatre dégrés de Force, ou s'il n'en a que deux. Un grave Théologien devroit-il se mettre en colère sur une question, qui tout au plus peut être utile pour la construction d'un moulin à foulon, ou de quelque autre machine semblable; mais qui, certainement, n'intéressera jamais, ni la Réligion, ni l'Etat. Peut être M. Clarcke a-t-il crû, que ce seroit avilir une vertu aussi belle que la modération, que de la mettre en usage pour un sujet de si peu d'importance.

Mais, venons à l'endroit que j'ai dit être le seul qui me fasse de la peine. C'est celui où il y a, que j'ai écrit dans le dessein d'obscurcir (*in ordre to raise a dust of opposition against*) la Philosophie de M. Newton; & que je l'ai fait avec acharnement (*with great eagernes.*)

Je ne suis pas le seul sur qui cette accusation tombe: mais, Mrs. Bernoulli & Herman sont pleins de vie; & il reste encore assez d'amis de M. Leibnitz. Je n'ai donc à parler que de ce qui me regarde.

M. Clarcke n'a pas préché toute sa vie la morale, sans sçavoir, que d'écrire, non pas pour éclaircir la vérité, mais pour obscurcir des décou-

vertes aussi belles que celles de M. Newton, n'est pas un procédé qui convienne à un honnête-homme. Il n'est pas possible, qu'une telle accusation ne fasse impression sur l'esprit de ceux qui savent combien M. Clarcke s'est acquis de réputation du côté de la Théologie & de la Morale: & il est très facheux pour moi de me trouver obligé de soutenir, &c, ce qui poura lui faire de la peine, de prouver, que M. Clarcke, (*dans le dessein d'obscurcir* la probité de son prochain,) a avancé une chose qui ne se trouve pas d'accord avec la vérité.

Je renvoie à ce que j'ai écrit pour éclaircir & pour défendre la Philosophie de M. Newton; & laissant aux autres à juger si j'ai satisfait à mon but, j'ose assurer, que l'intention de rendre justice à M. Newton, & de faire honneur à ses découvertes, y est pleinement justifiée.

Mais, dira-t-on, M. Clarcke n'a-t-il pas vu les écrits dont vous parlez? C'est ce qui paroit par son accusation, & n'est point surprenant. Ce qui pourra étonner, c'est qu'il n'ait pas voulu se donner la peine de jetter les yeux sur les écrits qu'il attaque: comme nous le verrons, après que nous aurons fait encore une remarque sur son accusation; qui, à la considérer en soi, ne semble pas trop bien pouvoir se soutenir.

Il s'agit d'une question dont M. Newton n'a jamais parlé qu'en passant, & sur laquelle il ne s'est pas écarté du sentiment géneralement reçu dans ce tems-là: de sorte qu'il ne s'agit pas plus du sentiment de M. Newton que de celui de mille autres. Qui peut donc s'imaginer, que d'écrire quelque chose de nouveau sur cette matière, ce soit vouloir obscurcir la gloire de M. Newton? A-t-on jamais soupçonné Harvée, lorsqu'il a trouvé la circulation du sang, de vouloir obscurcir la gloire d'Hypocrate, à qui cette circulation étoit certainement inconnue?

Je finis, en rapportant trois passages de la Lettre dont nous parlons: ils achéveront de donner une idée de la manière de disputer de M. Clarcke.

I. Voici ce qu'il dit, lorsqu'il prétend découvrir ce qui nous a tous fait tomber dans ce qu'il appelle erreur: „ l'effet ne pouvant être que proportionel à sa cause, M. Leibnitz (que ces autres Mrs. ont suivi,) en tire „ cette conséquence, que la Force, qu'un corps acquiert en tombant, est „ proportionelle à l'espace parcouru."

Les parenthèses sont malheureuses pour notre Auteur. Il est si peu vrai que j'aie suivi M. Leibnitz pour ce raisonnement, que bien loin de dire, qu'il faut que la Force soit proportionelle à l'espace parcouru en tombant, j'ai regardé le fait comme une difficulté; & j'ai tâché de faire voir, que, quoique, dans le sentiment que je défens, la Force des corps qui tombent se trouve proportionelle à l'espace parcouru, cela n'énerve pas les raisons dont

dont je me suis servi pour établir mon sentiment. Voiez cy devant *pag.* 230.

II. Voici le second passage: „ A l'égard des corps durs, tout le monde „ (à ce que je crois,) demeure d'accord, qu'il est prouvé par l'expé- „ rience, &c."

Je demeure d'accord, que si la proposition, que l'Auteur raporte ici comme géneralement reçue, étoit vraie à l'égard des corps *parfaitement durs & non élastiques*, (je me sers de l'expression de l'Auteur,) on en pouroit tirer une objection très forte contre moi. Mais M. Clarcke, en me faisant l'honneur d'écrire contre moi, auroit dû m'excepter du nombre de ceux qui admettent cette proposition: tout ce que j'ai écrit sur le Choc fait assez voir, que je crois cette proposition démonstrativement fausse. Je ne dis rien des expériences, dont on parle ici, faites avec des corps parfaitement durs: il faut de l'extraordinaire dans une Lettre telle que celle-ci.

III. Le troisième passage, que j'ai dit que je rapporterois, est encore une parenthèse: „ (que ces Mrs. affectent ridiculement, *affect fantastically*, „ de nommer Force *vive*)."

M. Clarcke devoit encore m'excepter ici. Je ne me suis jamais servi de cette expression: mais, c'est une bagatelle; & Mr. Clarcke peut bien avoir écrit cette parenthèse sans y faire beaucoup d'attention. Il ne s'agit que d'un mot, qui ne fait rien à la question même; & il paroit fort indifférent, qu'on s'en serve, ou qu'on ne s'en serve pas. Pour l'expression *affect fantastically*, elle sert à relever un peu la fin de la Lettre, dont le commencement est plus vif.

En voilà assez sur ce sujet. C'est malgré moi, que je suis entré dans cette discussion. Toutes sortes de démèlés sont désagréables avec des gens qui se persuadent qu'il n'y a que des extravagants & de malhonnêtes-gens qui puissent penser autrement qu'eux.

Passons à ce qui doit faire le principal sujet de notre écrit. Je parlerai d'abord de la Force, & ensuite du Choc; & suivant ce que j'ai déjà dit, je ne répondrai directement à personne de ceux qui ont bien voulu proposer leur difficultés contre mes écrits.

Pour ce qui regarde la Force, je tacherai de déveloper l'équivoque qu'il y a dans ce mot, aussi bien que dans celui de Mouvement: on verra que dans ce qui regarde la mesure de la Force, il y a, entre les sentimens de plusieurs de ceux qui disputent, plus de mal-entendu que de différence véritable; &, après avoir éclairci quelques difficultés, je passerai au Choc, où on verra, que ce qui n'étoit d'abord qu'une dispute de mots, devient une dispute sur la chose même. Mais, entrons èn matière.

Je

Je dis dabord que le mot de Mouvement eſt équivoque. La plûpart des Philoſophes modernes diſent, que le Mouvement eſt le tranſport du corps d'un lieu dans un autre, ou l'application ſucceſſive de la ſuperficie d'un corps à différentes parties de l'étendue; pluſieurs même des Commentateurs d'Ariſtote donnent ce ſens à la définition obſcure que leur Maître a donnée du Mouvement.

D'autres Philoſophes regardent le tranſport du corps, comme un effet du Mouvement, & non pas comme le Mouvement même; & conſidérant, que ce qui fait que le corps eſt tranſporté, eſt cela même qui le rend capable d'agir ſur un obſtacle, ils confondent le Mouvement avec le *Pouvoir d'agir.* Ceux d'entre les Sectateurs d'Ariſtote, qui enviſagent la choſe ſous cette ſeconde face, prétendent que c'eſt dans ce ſens qu'il faut entendre la définition de ce Philoſophe, puis qu'il finit l'explication de ſa définition, en diſant, que le Mouvement eſt *l'Acte de ce qui peut agir & ſouffrir.*

De quelque manière qu'on enviſage le Mouvement, on convient qu'il eſt accompagné de ce qu'on nomme *Force.* Mais voici un mot bien plus équivoque encore, & à plus d'un égard. Qu'eſt-ce que *Force?*

Tâchons d'abord de déterminer les idées, dont du moins la plûpart des Philoſophes conviennent; après quoi, il ſera plus aiſé d'éclaircir les équivoques, qui ont donné lieu à bien des diſputes, & qu'on ne doit attribuer qu'au manque de mots. Tout Mouvement eſt accompagné de Force, comme nous venons de le dire.

On voit l'effet de cette Force dans la rencontre de deux corps, & cet effet eſt l'action d'un corps ſur l'autre. Mais l'idée d'action emporte celle de réſiſtence, ou d'action contraire: de ſorte, qu'il ne ſauroit y avoir d'action ſans action contraire, ni de réſiſtence ſans réſiſtence contraire; action & réſiſtence exprimant la même choſe, enviſagée différemment. D'où il s'enſuit, que toutes les fois qu'un corps agit par ſa Force ſur un autre, l'action eſt réciproque; & tandis qu'un corps agit, ou réſiſte parce qu'il perd de ſon Mouvement, celui dont le Mouvement eſt augmenté ne réſiſte pas moins.

Dans le fond augmentation & diminution du Mouvement ne ſont que des différentes manières d'enviſager un même changement, qui pourra être augmentation pour un homme, qui conſidère ce Mouvement à l'égard d'un bateau agité lui-même, & diminution pour celui qui ne fait pas d'attention à ce bateau.

On voit par-là que ce qui fait qu'un corps a de la Force, c'eſt qu'il réſiſte à l'augmentation & à la diminution du Mouvement: & ainſi, c'eſt proprement cette propriété que l'on nomme *Force*; du moins à parler philoſo-

losophiquement ; car dans l'usage ordinaire, on ne nomme l'action, ou la résistence d'un corps, *effet de la Force*, que quand on envisage le changement du Mouvement comme diminution ; de sorte que par le mot de Force on entend la propriété d'un corps en mouvement, par laquelle ce corps, en perdant de son mouvement, agit sur un obstacle.

C'est ce qui fait dire, que le repos n'a point de Force, & avec raison, puisque dans l'idée de Force (du moins dans l'usage ordinaire dont il s'agit ici,) il n'y entre que l'idée d'action accompagnée de diminution de Mouvement.

Il n'est pourtant pas surprenant de trouver des Philosophes, qui attribuent de la Force au repos. Ceux-ci envisagent la chose d'une manière plus abstraite, & donnent au mot de Force le sens philosophique, & moins restraint, dont nous avons parlé : & puisque résister en gagnant du mouvement, & agir en perdant, ne différent point, à parler philosophiquement ; ils expriment, par le mot de Force, la chose envisagée sous ces différentes faces, quoique dans l'usage ordinaire on en agisse autrement.

Un corps en repos, qui reçoit un dégré de mouvement, résiste autant qu'il resisteroit, ou agiroit, si ayant un dégré de mouvement, on le lui faisoit perdre. C'est dans ce sens qu'on dit que le repos a de la Force ; mais on devient obscur pour ceux qui n'ont pas envisagé la chose d'une manière si philosophique, & qui n'ont jamais séparé dans leur esprit l'idée de diminution de mouvement d'avec celle d'action de la Force.

Pour éviter cette obscurité, quelques-uns ajoutent le mot d'*Inertie* à celui de *Force*, quand il s'agit de l'augmentation du mouvement, & ils disent qu'un corps en repos résiste au mouvement par sa *Force d'Inertie* ; d'autres disent simplement par son *Inertie* ; ce qui doit aussi se rapporter au corps dont on augmente le mouvement.

Voici donc comment il faut envisager la chose, pour éviter l'embarras qu'on pouroit trouver dans cette matière.

Un corps en mouvement, s'il en perd, agit par sa *Force*. Ce même corps, s'il acquiert du mouvement, résiste par son *Inertie*. Mais il faut remarquer que le corps ne résiste pas pendant qu'il est en repos, ce n'est que quand il reçoit mouvement : de même qu'un corps n'agit point par sa Force tandis qu'il garde son mouvement, ce n'est que quand ce mouvement est diminué.

C'est dans le sens, que nous venons d'expliquer, que nous employerons dans la suite le mot de Force. Et c'est dans ce sens que nous disons, qu'un corps qui est en repos, & dont par conséquent le Mouvement ne sauroit être diminué, n'a point de Force. C'est donc elle qui distingue le Repos du Mouvement, & le mot de *Force* exprime ce *pouvoir d'agir*, que

quelques Philosophes confondent avec le Mouvement même, comme nous l'avons vu ci-dessus.

Jusques ici nous n'avons parlé que de l'action du corps qui est accompagnée de mouvement, c'est-à-dire, de l'action dont le corps est capable, parce qu'il est transporté, ou qu'on le transporte. Il y a une autre sorte d'action qui n'est pas inséparable du Mouvement, pour laquelle du moins un Mouvement infiniment petit suffit. Cette action est nommée *Pression*. Nous en avons traité assez au long dans l'*Essai sur le Choc*, dans lequel nous avons marqué en quoi la Pression diffère de la Force.

Malgré la différence qu'il y a entre ces deux sortes d'actions, il y a des Philosophes qui les confondent, ce qui rend le mot de Force équivoque dans leurs écrits; sur quoi il suffit de remarquer, que tous les argumens, dans lesquels on applique à la Force, telle que nous l'avons décrite ci-devant, ce qui n'est prouvé que de la Pression, peuvent être laissés sans reponse jusqu'à ce qu'on ait fait voir que c'est à tort qu'on met de la différence entre Force & Pression.

Il y a dans le mot de Force, pris dans le sens que nous avons déterminé, une autre équivoque, qui cause un plus grand embarras. Ceux qui au mot de Force atttachent l'idée de pouvoir d'agir, dont est pourvu le corps en mouvement, ne se forment pas la même idée de l'action; & par là, quand il s'agit de la mesure de ce pouvoir, ils envisagent la Force sous des idées différentes. C'est sur quoi nous allons travailler à donner quelques éclaircissemens.

Tout corps en mouvement, qui, en exerçant son pouvoir d'agir, perd une partie de son mouvement, ne la perd que dans un certain tems: du moins dans les actions que nous connoissons; & c'est de quoi il s'agit ici.

Mais dans une action, qui dure pendant un tems, il y a deux choses à considérer. 1. La grandeur de l'action dans chaque moment infiniment petit, que nous nommons *Action instantanée*. 2. La grandeur de la somme de toutes ces petites actions, & que nous nommerons *Action totale*.

Quand il s'agit de mesurer la Force, c'est à dire de comparer ensemble différentes Forces, les uns ne font attention qu'à l'action instantanée, & les autres considèrent les actions totales: les uns & les autres mettent les Forces en raison des actions, & il n'est pas surprenant qu'ils ne s'accordent pas. Voyons les conclusions que les expériences peuvent fournir aux uns & aux autres.

L'action totale est déterminée; un corps qui a un certain degré de vitesse, de quelque manière qu'il perde son mouvement, ne le perdra qu'en produisant un effet déterminé, qui est toujours proportionel au quarré de la vitesse, quand on ne considère qu'un même corps, comme Mr. Huy-

gens

gens l'avoit remarqué il y a près de quarante ans; & quand il s'agit de différents corps, les effets sont comme les quarrés des vitesses, multipliés par les masses. C'est ce qui est prouvé directement par des expériences simples; & de quelque manière qu'on les varie, c'est à dire, quels que soient les effets que produisent les corps en perdant leur mouvement, les effets entiers, s'ils sont de nature à pouvoir être comparés ensemble, se trouvent toujours dans la proportion dont on vient de parler. Ces expériences ne sont pas révoquées en doute, que je sache: on ne sauroit guères nier ce qui tombe immédiatement sous les sens. Si avec cela on accorde que l'action est proportionelle à l'effet, l'action totale à l'effet entier, comme on en convient; & si on appelle Force la capacité totale d'agir, c'est à dire de produire effet, comment pourra-t-on nier que la Force soit proportionelle au quarré de la vitesse multiplié par la masse, puisque l'effet suit toujours exactement cette proportion? Comment peut-on dire, que cette conclusion ne suit point des expériences; puisqu'elle ne contient que ce que les expériences prouvent immédiatement? Pour le mot de Force, qu'on mette sa définition, capacité totale d'agir ou de produire effet, & on verra, que ce qu'on vient de dire sur la mesure de la Force, se reduit à ceci, c'est que la capacité de produire effet est proportionelle à cet effet: ce qui n'est pas contesté.

Mais sans nier les expériences on tache d'énerver la conclusion, en disant, que des expériences faites avec de la terre glaise sont peu propres à mesurer la Force.

Je répons que tout effet, qui peut être mesuré exactement, peut servir à mesurer la capacité de le produire; & peut-on nier que la capacité de faire deux cavités, je parle des capacités totales, ne soit double de celle qui n'en peut faire qu'une, en suposant les cavités semblables & égales à tous égards? & c'est tout ce que je suppose, du moins dans une partie de mes expériences, qui seule suffiroit. Ajoutons que les expériences qu'on fait avec des ressorts confirment ce qu'on découvre par les autres.

Après avoir justifié ce que j'avois avancé sur la mesure de la Force, il faut examiner les raisons de ceux qui ont nié que cette manière de mesurer la Force fût une suite des expériences. Ils n'ont pas fait attention au sens que je donne au mot de Force, qui est celui qu'on y donnoit d'ordinaire avant les disputes sur cette matière, & ils entendent ce mot dans un autre sens: car ils disent que pour juger de la Force par l'effet, il faut faire attention au tems que dure l'action; ce qui est fort inutile quand il s'agit de l'action totale: on peut déterminer combien un vase contient d'eau, sans s'informer combien de tems on a mis à le remplir. Mais, pour déterminer l'action instantanée, en examinant l'effet total, il est certain

 qu'il

qu'il faut avoir égard au tems; ce qui fait voir que ces Mrs., en ſupoſant la Force proportionelle à l'action, entendent l'action inſtantanée.

Ils diſent que la Force eſt proportionelle à la viteſſe multipliée par la maſſe; & ils ajoutent qu'un corps, dont la viteſſe eſt double, a auſſi la capacité d'agir pendant un tems double: ils en concluent que l'effet doit être quadruple. Si la viteſſe eſt triple, le corps a auſſi le pouvoir d'agir pendant un tems triple avant d'avoir perdu ſa viteſſe entière; c'eſt pourquoi l'effet eſt augmenté neuf fois. Par un ſemblable raiſonnement, ils font voir que l'effet doit toujours ſuivre la raiſon doublée de la viteſſe.

Il eſt aiſé de s'appercevoir qu'une action totale, quelle qu'elle ſoit, ſuit la proportion de l'action inſtantanée multipliée par le tems pendant lequel elle agit. Si donc en augmentant la viteſſe on augmente dans la même raiſon l'action inſtantanée & le tems que dure l'action, il eſt clair qu'on augmente l'action totale en raiſon doublée de la viteſſe.

Ceux donc qui diſent que la Force, quand il s'agit de maſſes égales, eſt comme la viteſſe; ſi par le mot de Force, ils entendent le pouvoir qui produit l'action inſtantanée, ils diſent la même choſe que ceux qui ſoutiennent que la Force ſuit la raiſon doublée de la viteſſe, puiſque ceux-ci par le mot de Force entendent le pouvoir total, qui produit l'action totale.

Nous avons vu que ces derniers ne diſent que ce qui eſt démontré immédiatement par l'expérience. Mais y a-t-il des expériences dont on puiſſe déduire ce que diſent les autres, que l'action inſtantanée, à laquelle ils font attention quand ils parlent de la Force, ſuit la raiſon de la viteſſe multipliée par la maſſe? Je répons que cela arrive quelque fois; & alors le tems que dure l'action, quand le corps perd ſon mouvement entier, ſuit auſſi, comme ils le diſent, la raiſon de la viteſſe: mais il s'en faut beaucoup que cela ne ſoit toujours vrai; l'action inſtantanée du même corps, mu de même, étant variable à l'infini, la ſeule action totale eſt déterminée, & ſi on conçoit le tems qu'elle dure diviſé en une infinité de petites parties, chacune deſquelles ſoit multipliée par l'action inſtantanée pendant ce moment, la ſomme totale de tous ces petits produits eſt toujours la même, de quelque manière que la Force inſtantanée ait été variée: cette ſomme eſt proportionelle à la Force totale, qui pour les différents mouvemens ſuit la proportion dont on a parlé ci-devant.

L'action inſtantanée dépend de l'obſtacle, & eſt d'autant plus grande que l'obſtacle réſiſte davantage, & que le corps perd ſa Force en moins de tems; car c'eſt parler directement contre l'expérience, que de dire que la Force inſtantanée eſt déterminée, & que l'action totale d'un corps, qui a un dégré déterminé de viteſſe, eſt plus ou moins grande ſuivant que ce corps perd ſon mouvement en plus ou moins de tems; c'eſt pourtant ce

que

que supposent ceux qui veulent défendre l'ancien sentiment sur la mesure de la Force; ils disent, que pour avoir la Force d'un corps, il faut multiplier sa masse par sa vitesse, & que pour avoir l'effet total, il faut multiplier la Force par le tems que dure l'action. Appliquons cette règle à quelques expériences.

De quelque matière, assez dure pour ne point plier en choquant de la terre glaise, on fait deux boules égales quant au volume, inégales quant au poids; ces boules perdent leurs Forces en choquant directement de la terre glaise applanie, & s'enfoncent également si les masses sont en raison inverse des quarrés des vitesses, par ex. comme 4. à 1., quand les vitesses sont comme 1. à 2.

Pour que cette expérience convienne avec la règle que l'on vient de voir, il faut que les tems soient aussi comme 1. à 2. sans quoi les effets ne seroient pas égaux; c'est à dire, il faut que le corps, dont le mouvement est le plus rapide, mette le plus de tems à s'enfoncer, quoique les deux enfoncemens soient égaux: on voit aisément, que cela ne se peut; & que le tems, qu'on supose ici le plus grand, est réellement le plus petit.

Un Mathématicien qui voudra se donner la peine de comparer ensemble les différentes expériences que j'ai décrites, ou qu'il pourra faire lui-même, trouvera aisément le moyen de comparer ensemble les tems que les corps employent à s'enfoncer, en supposant qu'il s'agisse de la même terre glaise; & il trouvera cette régle génerale. *Quand les enfoncemens sont égaux & semblables, les tems sont en raison inverse des Vitesses.*

Dans les boules dont nous avons parlé les masses sont comme 4. à 1., les vitesses comme 1. à 2.; les tems seront donc comme 2. à 1., puisque les enfoncemens sont égaux & semblables. Multipliant chaque masse par sa vitesse, on a 4. & 2.; ces produits multipliés chacun par le tems qui y répond donnent, 8. & 2. C'est à dire, que suivant ce calcul les effets, qu'on trouve égaux par l'expérience, devroient être comme 4. à 1.

Considérons encore quelques autres cas, & supposons d'abord deux cilindres droits, qui mus suivant la direction de leurs axes, viennent choquer directement de la terre glaise applanie, & perdent leur mouvement en s'y enfonçant.

Si les cilindres sont de même poids, c'est à dire si les masses sont égales, les tems seront comme les vitesses, & les effets entiers, qui sont toujours comme les quarrés des vitesses quand les masses sont égales, se trouveront ici comme les produits des vitesses par les tems. Dans ce cas particulier, l'action instantanée est comme la vitesse: &, s'il ne s'agissoit que de ce cas, toute la dispute se reduiroit à une dispute de mots; ceux qui disent, que la Force est comme la vitesse, parleroient aussi bien conformé-

 ment

ment à l'expérience, que ceux qui disent, que la Force suit la raison doublée de la vitesse : il faudroit seulement faire attention au sens qu'on donne au mot de Force.

Il n'en sera pas de même si les masses sont différentes ; car si elles sont inégales les diamètres restant égaux, les tems seront en raison composée des masses & des vitesses ; & ceux qui disent qu'il faut multiplier par le tems le produit de la masse par la vitesse, pour avoir l'effet total, trouveront les effets entre eux, comme les quarrés des masses multipliés par les quarrés des vitesses ; ce qui est contraire à l'expérience, le changement de la masse ne changeant l'effet, que proportionellement à la masse, & non pas en raison doublée de la masse.

Si au lieu de cilindres, on prend un corps, dont l'extrémité soit en cone, & que mu suivant la direction de son axe, la pointe du cone s'enfonce par un Choc direct dans la terre glaise applanie, & que le corps perde son mouvement par cette action ; en augmentant la vitesse, en sorte qu'elle soit huit fois plus grande, on reduit le tems à la moitié, de sorte que le total, suivant ceux dont j'examine le sentiment, ne doit être que quadruple, ce qui n'est que la seizième partie de ce qu'il est véritablement, puisque dans l'expérience l'effet est augmenté comme 1. à 64.

Je ne pousserai pas ces Remarques plus loin. Je crois l'équivoque, qu'il y a dans le mot de Force, suffisamment éclaircie. Je passe à la solution d'une difficulté spécieuse, qui a été proposée contre la Force telle que nous la défendons, & que nous avons fait voir être conforme à l'expérience.

Voici cette difficulté. „ Supposons que deux personnes, l'une sur un
„ vaisseau, qui s'avance avec un mouvement uniforme, & une vitesse com-
„ me 2., l'autre en repos sur le bord de la mer, jettent deux corps é-
„ gaux A & B avec des efforts égaux dans la direction du mouvement
„ du vaisseau, & que le corps B, qui étoit en repos, gagne une vitesse
„ comme 8. Il est clair, que le corps A s'avancera dans le vaisseau avec une
„ vitesse comme 8. aussi, & dans l'air avec une vitesse comme 10. La Force
„ du corps A avant qu'il eut cette augmentation, en la mettant proportionelle
„ au quarré de la vitesse, étoit 4, sa vitesse ayant été comme 2. ; l'augmen-
„ tation de la Force qu'il reçoit est égale à celle du corps B, c'est à dire à
„ 64 : donc sa Force totale sera 68. Mais parce que sa vitesse est comme 10.
„ sa Force doit être comme 100., & ces deux forces sont contradictoires.
„ Ainsi leurs forces ne peuvent pas être comme les quarrés de leurs vitesses.

Ce raisonnement paroit fondé sur des principes bien simples, & seroit concluant si ces principes étoient véritablement tels ; mais il faut examiner si on a fait attention à tout ce qui doit être considéré.

On suppose comme clair, que l'homme qui est sur le vaisseau, communique

nique 8. dégrés de viteſſe au corps A, en faiſant préciſément le même effort, que l'homme ſur le bord de la mer, qui donne la même viteſſe au corps B. Ceci pourtant n'eſt pas exactement vrai; qu'on mette un homme ſur une planche, ou dans une petite chaloupe légère, & qu'il jette quelque maſſe peſante, par ex. de cent ou de deux cents livres, & on verra ſi avec un effort déterminé, il pourra lui communiquer autant de viteſſe, que s'il ſe trouvoit ſur un fond inébranlable.

Il eſt vrai, que plus le vaiſſeau ſera peſant, moins il y aura de différence entre les efforts, qui donnent à chacun des corps A & B la viteſſe 8.; il y en aura pourtant toujours: & cette différence, quelque petite qu'on la rende en augmentant le vaiſſeau, ſera toujours encore aſſez grande pour ôter à l'objection toute ſa force, & pour confirmer le ſentiment que je défens.

C'eſt ce que nous tâcherons de prouver après avoir poſé quelques principes.

I. Un reſſort qui ſe débande, s'il ne peut reculer, fait tout ſon effort d'un ſeul côté.

Preuve d'expérience. Un reſſort bandé, qui, poſé entre deux corps égaux, leur communique à chacun un certain degré de viteſſe, en jettant l'un à droit & l'autre à gauche, ſi, étant appliqué à un obſtacle immobile, il pouſſe les deux corps enſemble d'un même côté, il leur communiquera à chacun le même degré de viteſſe, que dans le premier cas.

II. Un reſſort, tranſporté pendant qu'il ſe débande, communique tout ſon effort du côté vers lequel il eſt tranſporté.

Ceci eſt clair, puiſqu'un reſſort tranſporté eſt un reſſort qui ne ſauroit reculer.

III. La Force, c'eſt à dire la capacité d'agir, qu'acquiert un corps, eſt égale à l'action qui la communique.

La cauſe eſt proportionelle à l'effet.

IV. Pour déterminer l'action totale qui ſert à donner de la Force à un corps, il ne faut pas ſeulement avoir égard à l'action immédiate de la cauſe mouvante ſur le corps; mais il faut y joindre celle qui ſert à tranſporter la cauſe mouvante, ſi cette dernière action ne fait pas d'autre effet que de mettre la cauſe mouvante en état d'agir avec plus d'efficace.

Preuve d'expérience. L'effet de deux reſſorts eſt le même, ſoit qu'ils agiſſent enſemble l'un à côté de l'autre, ſoit que l'un pouſſe l'autre pendant que ce dernier ſe débande.

V. Un reſſort, en repos entre deux corps, en ſe débandant, leur communique des viteſſes, qui ſont en raiſon inverſe des maſſes.

Ceci eſt conforme à l'expérience, & d'ailleurs n'eſt pas conteſté.

Ces principes posés, nous supposons, que le corps qui est sur le vaisseau, au lieu d'être jetté par un homme, est poussé par un ressort attaché au vaisseau de maniére qu'il ne puisse reculer sans faire reculer le vaisseau entier. Ceci ne change rien au raisonnement que nous examinons, l'action du ressort étant analogue à celle de l'homme; mais, elle est plus réguliére, & elle sert à rendre le calcul plus sensible.

Le corps A appliqué au ressort bandé a avec le vaisseau 2. de vitesse, il a quatre de Force. Le ressort se débande, & communique au corps 8. de vitesse dans le vaisseau, c'est 64. de Force dans le vaisseau. Jusqu'ici nous sommes d'accord. Le corps a dans l'air 10. de vitesse; il a donc 100. de Force: c'est ce que nous accordons encore. Mais, voici la difficulté; on dit que cela ne se peut, parce que le corps, qui avoit 4. de Force, n'en a reçu que 64. Or c'est ce que je ne vois pas. Le corps à la vérité n'a reçu que 64. dégrés de Force, pour agir sur un obstacle transporté avec deux dégrés de vitesse; mais, à considérer tout, le corps a acquis 96. degrés de Force, comme on va tâcher de le prouver.

Pour en faire le calcul, il faut connoître la masse du vaisseau; mais quelle qu'on pose cette masse, le resultat du calcul est le même.

Supposons cette masse mille fois plus grande que celle du corps A: on peut prendre le nombre que l'on voudra.

Nous avons un ressort entre deux corps, entre le vaisseau auquel il est attaché, & entre le corps A, ce ressort est en repos par raport à ces deux corps. Par conséquent, en se débandant, il leur communique des vitesses en raison inverse des masses (v). Il communique à A huit dégrés de vitesse, c'est pourquoi il en communique au Vaisseau $\frac{8}{1000}$ ou $\frac{1}{125}$.

L'effort du ressort doit se mésurer en considérant, qu'il étoit en repos entre les deux corps; cet effort est donc égal aux forces qu'il auroit communiquées aux corps, s'ils avoient été en repos. Je multiplie donc 64., quarré de la vitesse communiquée à A, par sa masse 1. & j'ai 64. Je multiplie $\frac{64}{1000000}$, quarré de la vitesse communiquée au vaisseau, par sa masse 1000., & j'ai $\frac{4}{1000}$ ou $\frac{8}{125}$ 1, & l'action totale du ressort vaut 64 $\frac{8}{125}$; car ce ressort entre deux corps en repos auroit produit une telle Force.

Il s'agit ici d'un ressort transporté, qui fait son effort entier du côté vers lequel il est poussé (11); c'est pourquoi il communique au corps A une Force qui vaut 64 $\frac{8}{125}$.

Le ressort dont nous parlons est une cause mouvante transportée, & l'action du vaisseau, qui pousse le ressort pendant qu'il agit, le rend plus capable d'agir sur le corps, qui sans cela, par son mouvement, se soustrairoit à une partie de l'action du ressort. Par cette raison l'action du vaisseau,

ſeau, par laquelle la cauſe mouvante eſt tranſportée, ſe communique auſſi au corps A (III. IV). Il faut donc déterminer cette action, qui vaut la Force, que le vaiſſeau a perdue par cette action, puiſque l'effet eſt proportionel à ſa cauſe.

On trouve cette Force perdue, ſi de la Force avant l'action on ſouſtrait la Force après l'action, ce qui reſte eſt la Force perdue, qui jointe à $64\frac{8}{125}$, que nous avons déjà, donnera tout ce que le corps gagne par les actions du vaiſſeau & du reſſort jointes enſemble (IV).

La maſſe du vaiſſeau 1000., multipliée par 4. quarré de ſa viteſſe avant que le reſſort ſe débande, donne 4000. de Force avant l'action.

La viteſſe $\frac{1}{125}$ que le reſſort a communiquée au vaiſſeau, a eu une direction contraire à celle de la première viteſſe, qui par conſéquent a été diminuée, & eſt reſtée $1\frac{124}{125}$, dont le quarré $3\frac{15126}{15625}$, multiplié par la maſſe 1000., donne la Force après l'action $3968\frac{1060}{15625}$ ou $3968\frac{8}{125}$; qui, retranchée de 4000., donne $31\frac{117}{125}$, pour l'effort du vaiſſeau ſur le reſſort, auquel on doit ajouter $64\frac{8}{125}$, qui eſt l'effort du reſſort, pour avoir toute la Force que le corps A a gagnée; à laquelle ſi on ajoute 4, Force du même corps avant l'action du reſſort, on aura la Force totale; or la ſomme de ces nombres eſt 100., & non pas 68.

Si on veut ſe donner la peine de faire ce calcul algébriquement, on verra que la démonſtration eſt génerale, & que la Force acquiſe eſt toujours proportionelle à l'action qui la communique; ce qui ne ſera pas vrai, ſi on emploie une autre manière de meſurer la Force, à moins qu'on ne révoque en doute une choſe, qui eſt pourtant conforme à l'expérience, comme nous l'avons vu ci-deſſus (IV.); c'eſt que ce qui tranſporte & pouſſe la cauſe mouvante pendant ſon action agit avec elle ſur le même corps.

J'aurois pu répondre plus ſimplement à l'objection que je viens d'examiner; mais la difficulté n'auroit pas été entièrement éclaircie; ç'auroit été ôter à l'objection ſa Force, en laiſſant la choſe même dans l'obſcurité; j'aurois pu dire, que tous les raiſonnemens du monde ne ſauroient m'empêcher de voir, ce que l'expérience me met ſous les yeux, que ſi le corps A, avec 2. de viteſſe, peut produire quatre fois un certain effet; le corps B, qui lui eſt égal avec 8. de viteſſe, pourra produire 64. fois ce même effet; & que le prémier corps A, avec 10. de viteſſe, peut le produire cent fois: par conſéquent je ne dis, que ce que j'ai vu immédiatement, quand j'aſſure, que les forces ou capacités totales d'agir dans ces trois occaſions ſont comme 4. 64. & 100.

Paſſons à ce qui regarde le Choc. J'en ai parlé aſſez au long, dans l'Eſſai précédent: j'en ai traité encore plus au long dans la ſeconde édition *in* 4°. de ma Phyſique; cette même Phyſique a auſſi été imprimée

 en

en petit, ſans les ſcholies & les expériences, qu'on trouve dans la grande; la matière du Choc n'y eſt pas traitée ſi au long; mais dans la ſeconde édition *in* 8°., qui a paru en 1728. j'ai ajouté quelques nouveaux éclairciſſemens, qui font voir, pourquoi dans le Choc la Force ne détruit jamais la Force immédiatement; & que par le ſeul examen de la nature du Choc, on peut démontrer qu'il eſt contradictoire, que deux corps inégaux, ayant leurs mouvemens contraires, reſtent en repos après le Choc, ſi leurs Forces ne ſont inégales (*). Deux Propoſitions, que l'expérience mettoit hors de doute, mais dans l'explication deſquelles il reſtoit encore de l'obſcurité.

Cette obſcurité a été cauſe, que dans l'Eſſai, dont je viens de faire mention, j'ai parlé comme ſi entre Force & inertie il y avoit une diſtinction réelle, quoiqu'elle ne ſoit que rélative, comme on l'a expliqué ci-deſſus.

Si on veut ſe donner la peine de jetter les yeux ſur quelques-uns des écrits, que je viens d'indiquer, on verra, qu'à l'égard du Choc, il ne s'agit plus d'une diſpute de mots avec ceux qui diſent, que la Force eſt proportionelle à la maſſe multipliée par la viteſſe. Pour peu qu'on faſſe d'attention à la manière dont ils raiſonnent ſur le Choc, on verra aiſément, que par le produit de la maſſe & de la viteſſe, ils entendent la Force totale, ſans faire attention à l'action inſtantanée.

La plûpart de ceux, qui ſont entrés en diſpute ſur ces matières, n'ont pas parlé du Choc en particulier; quand on croit avoir renverſé la théorie de la Force, qui ſert de fondement à celle du Choc, il paroit aſſez inutile d'attaquer celle-ci. Par cette raiſon, je n'ai proprement qu'une difficulté à reſoudre, par laquelle on a tâché de faire voir, que ma théorie mène à l'abſurde.

J'ai dit, que la grandeur du Choc, c'eſt à dire l'action immédiate d'un corps ſur l'autre, dépendoit de la viteſſe reſpective, & que par cette raiſon cette action eſt toujours la même, auſſi longtems que la viteſſe reſpective de ces corps ne change point. J'ai dit de plus, que l'applatiſſement des corps, ou l'enfoncement de leurs parties, dépendant de cette action, il s'enſuivoit, que cet applatiſſement étoit le même, ſi la viteſſe reſpective étoit la même; & j'ai ajouté, que ceci étoit conforme à des expériences connues.

Ce qu'on vient de voir a été attaqué de deux manières. Un très habile Mathématicien m'a blamé, d'avoir avancé ces propoſitions comme non con-

(*) Tout ce qui regarde la Force & le Choc eſt traité beaucoup plus amplement dans la troiſième Edition de la Phyſique de l'Auteur, qui a paru en 1742., longtems après la publication de ces Remarques, & dans l'Abregé que j'en ai donné en 1744. & 1766.

conteſtées ; il les regarde comme nouvelles, & faiſant une des principales différences des deux théories : je repons, que je n'ai rien dit qu'on ne trouve dans le traité du Choc par Mariotte, où on peut voir les expériences que j'ai appellées expériences connues.

L'autre objection eſt d'une toute autre nature : on ſoutient, que les propoſitions qu'on vient de voir ſervent à renverſer la théorie que nous ſuivons ſur la meſure de la Force.

Suppoſons deux corps mous, c'eſt à dire, ni élaſtiques, ni parfaitement durs, égaux entre eux ; le corps A avec 8. de viteſſe choque B en repos, il s'agit par-tout ici du Choc direct, B recevra 4. de viteſſe, par conſéquent 16. de Force.

Si A a 18. de viteſſe, & B 10. du même côté, la Force immédiate du Choc eſt la même qu'auparavant, l'enfoncement des parties le même, puiſque la viteſſe reſpective eſt la même ; & B aura 14. de viteſſe, c'eſt à dire, 196. de Force, mais ſa Force avant le Choc étoit 100. : il a donc gagné 96. de Force, au lieu de 16., c'eſt à dire, ſix fois plus. Or c'eſt ce qu'on trouve abſurde, & on dit que je fais produire à la même cauſe des effets extrémement inégaux.

Il y a deux réponſes a faire : la première renverſe l'objection ſans éclaircir la matiére, la ſeconde contient les éclairciſſemens néceſſaires.

Voici la première. *Ce qui eſt conforme à l'expérience n'eſt point abſurde.* Le corps A avec 8. de viteſſe, frappe B en repos ; les deux corps après le Choc ont chacun 4. de viteſſe, & l'enfoncement des parties eſt tel, qu'A, avec toute ſa Force avant le Choc, pouvoit en produire deux en y employant entiérement cette Force. Si donc nous nommons 64. la Force d'A ſa viteſſe étant 8., il faut 32. de Force pour faire un tel enfoncement de parties. A & B ont chacun 4. de viteſſe, & on trouve que leur capacité d'agir à chacun vaut le quart de celle qu'A avoit au commencement : ils ont donc chacun 16. dégrés de Force.

Tout ceci eſt prouvé immédiatement par l'expérience, & l'effet ſe trouve proportionel à ſa cauſe : A a 64. de Force, il en conſume 32. à enfoncer les parties, il en communique 16. à B, & il lui en reſte 16. mais 32. joint à 16. & 16. donne 64.

Dans le ſecond cas A a 18. de viteſſe, & B en a 10., après le Choc ils en ont chacun 14., & l'expérience donne préciſément le même enfoncement de parties que dans le cas précédent.

L'expérience donne encore la capacité d'agir de B avant le Choc 100. après le Choc 196., de manière que B a réellement gagné 96. dégrés de capacité d'agir ; & comme il s'agit ici de dégrés égaux à ceux dont nous avons parlé, en examinant le prémier cas, il ſe trouve par l'expérience, que B a

gagné six fois plus de capacité d'agir qu'il n'en avoit gagné dans le prémier cas.

Dans ce second cas l'effet se trouve encore proportionel à sa cause. A avant le Choc a 18 de vitesse, c'est à dire, 324. de Force, il en consume 32. en enfonçant les parties comme dans le prémier cas, puisque les enfoncemens sont égaux, il communique 96. de Force à B & il lui reste 14. de vitesse, c'est à dire, 196. de Force; or 32. 96. & 196. valent ensemble 324 quarré de 18.

Voici la seconde réponse. Il faut distinguer le mouvement respectif d'avec le mouvement absolu. Les actions respectives égales produisent des effets égaux; mais il ne faut pas regarder comme effet de l'action respective ce qui n'en dépend pas entiérement. L'enfoncement des parties, & par conséquent la Force qui se consume à faire cet enfoncement, comme aussi le changement de vitesse dépendent uniquement de l'action respective, & ne varient point, tant qu'il s'agit des mêmes corps, & de la même vitesse respective; & cela est confirmé par l'expérience. Mais il ne s'ensuit point qu'en changeant les Forces absolues, on ne change pas aussi les actions absolues, sans changer les actions respectives; l'expérience le fait voir, & en voici la raison.

Nous avons vu ci-devant, en parlant de la Force, que la même cause mouvante agit plus ou moins suivant qu'elle est poussée avec plus ou moins de Force, parce qu'alors les deux actions se joignent ensemble. Le ressort dont nous avons parlé ci-dessus, qui étoit bandé avec $64\frac{1}{125}$ de Force, a communiqué 96. dégrés en se débandant sur le vaisseau, dont nous avons parlé; ce même ressort en auroit communiqué davantage si le vaisseau avoit eu une plus grande vitesse: l'action respective est pourtant toujours la même, & l'action seule du ressort ne diffère pas, que le vaisseau soit en repos, ou qu'il soit en mouvement.

Quand un corps a plus de vitesse, il a aussi plus de Force, & les parties antérieures qui pressent le corps qui est rencontré forment une cause mouvante poussée avec plus de Force, quoique l'action respective soit la même; ce qui par conséquent n'empêche pas que l'effet total & absolu ne soit plus grand.

En commençant cet écrit, mon dessein n'étoit pas borné aux éclaircissemens qu'on vient de voir: je me proposois d'attaquer à mon tour les Défenseurs de l'ancien systéme, je l'appelle ancien, en opposition du nouveau: mais j'ai changé d'avis: je crains de donner occasion à de nouvelles disputes, & c'est un genre d'écrire que je hais naturellement. D'ailleurs, cet écrit est déja assez long.

DIS-

DISSERTATION

Sur la Force des Corps, par MR. CALANDRIN (*).

L'idée de Force que nous avons peut venir de deux sources : & il faut s'entendre là-dessus, avant que de définir la Force. Quand nous voyons un changement qui a été produit par un corps, nous disons que ce corps avoit de la Force ; & comme nous ne concevons rien d'actif dans l'essence du corps, lorsqu'un corps produit quelque changement, nous concevons qu'un principe actif est joint à ce corps ; & c'est ce principe que nous appellons *Force*. C'est de cette idée que Mr. Poleni a tiré sa définition ; mais, ce n'est pas la seule occasion où nous concevions de la Force. Nous concevons que les corps en eux mêmes ne sont qu'en repos : & quand un corps se meut, & qu'il continue à se mouvoir, nous estimons qu'il doit y avoir en lui un principe actif qui produise en lui même ce changement continué : ce principe actif se nomme aussi la Force ; & c'est-là la source de l'ancienne idée que l'on se faisoit de la Force. On ignore quels sont ces principes actifs dans l'un & l'autre cas ; mais, il semble qu'on ne sçauroit douter de leur réalité ; puisque, dans l'une & l'autre manière de considérer ces Forces, on les trouve susceptibles d'augmentation, de diminution, de comparaison, & que ce sont par conséquent des quantités. Il semble aussi, que quoiqu'on ait considéré ces principes actifs, eu égard à deux effets différents, ce n'est pourtant qu'un seul & même principe différemment envisagé, & qu'ainsi ces deux effets dépendants d'une même cause seront toujours proportionels entre eux. C'est-là l'ancien systême : on a regardé la continuation du mouvement comme l'effet le moins équivoque de la Force du corps, & on en a déduit que les Forces étoient proportionelles aux vitesses, si les corps étoient égaux.

Mais, dans le nouveau systême, on ne veut point considérer cet effet, sçavoir la continuation du mouvement, comme un effet de la Force : on veut s'en tenir à la considération des impressions qu'un corps fait sur un autre, à l'exclusion de cette autre face sous laquelle la Force se présente à notre esprit.

La raison de cette exclusion est exprimée dans la définition que l'on don-

(*) Je crois devoir joindre ici cette Dissertation, afin que l'on comprenne mieux les nouvelles Expériences, qui suivent, & qui ont été faites par MR. 'sGRAVESANDE pour résoudre les difficultés proposées ici par MR. CALANDRIN.

donne de la Force dans le nouveau ſyſtême; c'eſt que l'on croit que l'on ne peut meſurer la Force que par l'effet qu'elle produit en ſe conſumant entiérement; & il eſt vrai que la Force ne s'épuiſe point en produiſant à chaque inſtant la viteſſe du corps qu'elle tranſporte.

Mais, il me ſemble que, bien loin qu'il ſoit univerſellement vrai que toute cauſe ſe détruiſe en produiſant ſon effet, au contraire les véritables cauſes produiſent leur effet ſans perdre de leur Force; & on conçoit très bien un principe actif dont l'eſſence conſiſte à produire continuellement un certain effet, ſans que cet exercice de ſon action épuiſe ſon activité. Et c'eſt ainſi que tout le monde conçoit, que quand un corps ſe meut, il y a en lui un principe actif, qui produit une certaine viteſſe, & pourroit la produire éternellement. Il n'y a donc point de contradiction à concevoir l'effet inſtantané d'un principe actif tel qu'eſt la Force, que cette Force produiſe continuellement ſans ſe détruire, & qui ſeroit la vraie meſure de l'activité de ce principe.

Auſſi, à parler à la rigueur, les Forces vraies ne ſe détruiſent point en produiſant leur effet, ſeulement elles ſe diſtribuent différemment; &, lorſque ces forces s'éteignent, c'eſt par l'action oppoſée des forces mortes. Je ne décide point de ce qui doit arriver quand deux forces vives agiſſent l'une contre l'autre: mais, nous ſçavons par le fait, qu'une Force vive peut être détruite par celle de la gravité ſans produire aucun effet; &, pour me ſervir d'un exemple qui ne ſoit pas hors du ſujet, s'il y a une Force du genre des forces mortes, par exemple une preſſion, qui uniſſe les parties des corps, lorſqu'un corps fera effort pour ſéparer les parties d'un autre corps, cette Force de ténacité s'oppoſera à cet effort, & pourra enfin détruire la Force de ce corps; & on doit convenir avec ces MM. que l'on peut déterminer la quantité de cette Force vive qui a été détruite par la quantité des forces mortes requiſes pour la détruire, & je crois que les expériences de M. Poleni prouvent que cette quantité eſt proportionelle à la viteſſe des corps, les maſſes étant ſuppoſées égales.

Je prens donc la définition de M. Poleni, que l'effet total qu'un corps peut produire juſques à ce qu'il perde tout ſon mouvement, c'eſt la meſure de la Force vive qui réſide en lui. Or, dans l'expérience de M. Poleni, je ne vois que deux effets qui ſoient produits: le premier, c'eſt que certaines parties du corps mou ſe ſont mues avec le corps qui perdoit ſa Force, & ont fait certain chemin: le ſecond effet, c'eſt que ces parties n'étant pas dans une union de ſimple repos les unes avec les autres, mais y ayant une Force qui les contenoit dans cette ſituation, cette Force de ténacité a été vaincue. Voilà en quoi conſiſte tout l'effet qui a été produit. Eſt-ce donc à vaincre cette ténacité des parties du ſuif, que la Force

ce s'est consumée? Ou, seroit-ce à faire faire à une très pétite portion de ce suif un chemin très court? Or, je crois qu'on ne peut guéres prendre d'autre parti, que d'établir que la Force se consume à vaincre la ténacité des parties du suif, d'autant plus que si on suppose que cette Force se distribue dans ces petites portions de matière qui sont transportées, cette Force même se trouvera bien-tôt détruite par la ténacité des parties voisines, de sorte qu'au bout on verra que toute la Force a été uniquement détruite par la ténacité des parties de ce corps sur lequel se fait l'impression.

Je ne crois pas me tromper, en prenant cette ténacité qui détruit la Force vive d'un corps, pour être une Force elle-même, mais de celles que l'on nomme mortes, & qui agissent continuement comme la gravité; &, cela étant, la quantité de la Force qui a été détruite sera précisément égale à la somme des actions de cette Force morte qui par leur continuité ont pu détruire cette Force vive. Reste donc à sçavoir si les profondeurs des enfoncemens, qui sont produits dans ce corps *ténace*, sout proportionels aux sommes des actions de cette Force morte.

Pour trouver le rapport des sommes de ces actions, il faut remarquer d'abord que l'action instantanée de cette Force morte, qui produit la ténacité, doit être toujours la même pendant tout le tems que le corps agit contre elle, si la surface qui s'enfonce est toujours la même, comme par exemple si c'est la base d'un cilindre; & on peut si peu me nier ce principe, que si le dégré de ténacité du corps changeoit, comme si par exemple la compression du Choc rendoit ce corps plus ténace, les expériences que l'on feroit en seroient altérées: la Force de la ténacité est donc la même à chaque instant. Donc pendant tout le tems que la Force vive subsiste, elle reçoit à chaque instant une égale diminution.

D'où il résulte, que le nombre des instans qu'il faudra pour que la Force soit entièrement détruite sera toujours proportionel à cette Force; & c'est-là un principe important pour ma solution; *les tems, pendant lesquels deux forces agiront sur un corps ténace jusques à leur extinction, seront toujours proportionels à ces forces.*

Si nous concevions un corps mu pendant une minute avec un certain dégré de Force, qu'à chaque minute ce dégré de Force diminuât d'une égale quantité, & ainsi continuellement jusques à extinction, l'espace total qui seroit parcouru par ce corps seroit la somme d'une progression arithmétique. C'est ce qui arrive dans le cas proposé: deux corps égaux qui s'enfoncent dans un corps mou perdent à chaque instant un égal dégré de Force; les espaces qu'ils parcourront jusques à exstinction seront donc les sommes de progressions arithmétiques, dont le nombre des termes sera le nombre

bre des inſtans qu'ils emploieront à perdre leurs forces. Or, on ſçait que les ſommes des progreſſions arithmétiques, qui ont un même prémier terme & une même différence, ſont comme les quarrés du nombre des termes. Donc (ce qu'il falloit démontrer) les profondeurs des enfoncemens (qui ſont les eſpaces parcourus par ces forces décroiſſantes) ſeront comme les quarrés de ces nombres d'inſtans; mais, les actions de la ténacité étant toutes égales, leurs ſommes ſont comme les tems ou les nombres d'inſtants pendant leſquels elle agit; & les profondeurs des enfoncemens ſont comme les quarrés de ces nombres d'inſtans. Donc, ces profondeurs ſont comme les quarrés des ſommes des actions de la ténacité, c'eſt à dire, comme les quarrés des forces, & non comme les forces mêmes.

Appliquons ma théorie au cas des corps inégaux; & puiſqu'à chaque inſtant la ténacité détruit une Force égale dans chaque corps, la diminution inſtantanée de viteſſe ſera réciproquement proportionelle aux maſſes ſuivant l'ancien ſyſtéme; & alors les profondeurs des enfoncemens, ſeront les ſommes des progreſſions arithmétiques, dont les différences & le nombre des termes ſeront différents, & ces ſommes ſeront entre elles en raiſon compoſée de la raiſon de leurs différences & de la raiſon des quarrés du nombre de leurs termes: & comme en ce cas la raiſon réciproque des maſſes, & les nombres des termes ſont comme les forces, les profondeurs des enfoncemens ſont entre eux en raiſon compoſée de la raiſon réciproque des maſſes, & de la raiſon des quarrés des forces. Donc, enfin, ſi les maſſes ſont réciproquement proportionelles au quarré des viteſſes, auquel cas (ſuivant l'ancien ſyſtême) les forces feroit réciproquement proportionelles aux viteſſes, il eſt évident que les profondeurs des enfoncemens ſeront en raiſon compoſée de la raiſon directe des quarrés des viteſſes (qui eſt égale à la raiſon réciproque des maſſes) & de la raiſon réciproque des quarrés des viteſſes (qui en ce cas eſt la même que la raiſon des quarrés des forces). Or, la raiſon compoſée de ces deux raiſons eſt manifeſtement la raiſon d'égalité. Donc, ſi les maſſes ſont réciproquement comme les quarrés des viteſſes, les enfoncemens ſeront égaux, ſans qu'il ſoient proportionels aux forces.

La ſeule choſe, qu'on pourroit dire contre ce raiſonnement, c'eſt que j'ai ſuppoſé les réſiſtences égales à chaque inſtant, quoiqu'elles agiſſent continuement ſur des ſurfaces différentes, la ſurface de la boule qui s'enfonce préſentant toujours un plus grand objet à la réſiſtence. Mais, il faut remarquer que cela ſe compenſe en ſorte que, prenez une boule, prenez un cône, prenez un cilindre (auquel ma théorie conviendroit parfaitement) il en réſultera phyſiquement la même choſe: & la ſomme des réſiſtences aura le même rapport avec le chemin parcouru, c'eſt à dire, avec la profondeur des enfoncemens.

Je

Je crois donc avoir prouvé, que les enfoncemens ſont la meſure des quarrés des forces dans les cas des maſſes égales, & non pas des forces mêmes; & qu'ainſi, toutes les expériences qu'on a faites là deſſus ſont en faveur de l'ancien ſyſtême. Je crois même avoir mis la métaphyſique de mon parti, & avoir découvert le point de ſéparation des deux ſyſtêmes. Je puis auſſi m'être trompé; car, dans une matière auſſi délicate, peut-on s'aſſurer qu'un moment de prévention n'empêchera point de découvrir le côté foible d'un ſyſtême auquel on s'eſt accoutumé?

NOUVELLES EXPÉRIENCES

Sur la Force des Corps en mouvement; précédées d'une Réponſe à la Diſſertation de Mr. CALANDRIN.

Dans pluſieurs écrits, que j'ai publiés juſques à préſent ſur la meſure de la Force, j'ai évité avec ſoin d'entrer en aucune diſpute proprement dite. Quand j'ai travaillé à reſoudre les difficultés qu'on avoit propoſées contre mes écrits, je l'ai fait ſans répondre directement aux Auteurs qui m'avoient attaqué.

J'ai expliqué les motifs de cette conduite au commencement des Remarques ſur la Force des corps en mouvement, inſerées ci-devant, *pag* 251. en marquant pourtant, que j'étois perſuadé, que les diſputes bien réglées pouvoient être d'une grande utilité pour éclaircir la vérité. Mais, il eſt bien difficile qu'elles reſtent telles juſques à la fin.

C'eſt ce qui m'a fait prendre une ferme réſolution de n'entrer en diſpute qu'avec des perſonnes, dont, non ſeulement le caractère me ſera bien connu, mais, qui d'ailleurs voudront bien m'honorer de leur amitié; &, alors, ce ſera toujours avec plaiſir que je propoſerai directement mes difficultés, & que je répondrai de même à ce qu'on m'objectera.

C'eſt par ces raiſons qu'aujourd'hui j'entre en diſpute, & que je deviens en quelque ſorte l'Agreſſeur, en répondant à un écrit dans lequel je ne ſuis pas attaqué directement.

L'Auteur de la pièce dont il s'agit ici eſt Monſieur *Calandrin*, Profeſſeur en Mathématiques à *Génève*, qui ne m'a pas voulu refuſer la permiſſion de le nommer.

Le raisonnement, que cet ingénieux Auteur a proposé, pour prouver que les expériences, qu'on allégue pour réfuter le sentiment qu'il défend dans sa dissertation, servent au contraire à confirmer ce sentiment, est certainement des plus frappants: & il a mis ce raisonnement dans un si beau jour, que, quoiqu'on le trouve indiqué ailleurs, il devient nouveau par le tour qu'il lui a donné. C'est un éloge, que ne pourront réfuser à Mr. *Calandrin* ceux-mêmes que son raisonnement ne persuadera pas.

Il n'y a pas un grand nombre d'années, qu'on ne soupçonnoit pas seulement qu'il pût y avoir le moindre différent sur la mesure de la Force. Aujourd'hui, c'est une des principales questions qui partagent les Physiciens; & le nombre des écrits sur cette matière est devenu fort grand en peu d'années.

Celui, dont il s'agit ici, n'est pas le seul dont on soit redevable à l'Académie de Genève. Monsieur *Cramer*, Professeur en Mathématiques dans la même Académie, collégue & ami de Mr. *Calandrin*, a soutenu le sentiment contraire à celui de son collégue; & on peut dire, que les deux opinions opposées ont été défendues à *Genève* avec la même force & le même génie.

Je viens à la dissertation de Mr. *Calandrin*; & je vais exposer, aussi clairement qu'il me sera possible, les raisons qui m'empêchent de me rendre à celles qui sont proposées avec tant de netteté dans cette dissertation. Les raisonnemens sont justes; c'est à dire les conclusions sont bien tirées. La dispute ne roulera que sur un principe, que Mr. *Calandrin* trouve évident, & qui ne me paroit pas tel.

1. Je ne m'attacherai point à la définition du mot de *Force:* je renvoie à ce que j'en ai dit ci devant, *pag.* 256. & suiv. Je passe à quelque chose de plus essentiel qu'une dispute de mots.

Le but de Mr. *Calandrin* est de faire voir, que quand un corps perd sa Force par une pression contraire, ou, pour me servir des termes mêmes de l'Auteur, quand une Force vive est entiérement détruire par une Force morte, l'action de cette derniére Force, quand la masse du corps est déterminée, est proportionnelle à la vitesse du corps, & non point au quarré de la vitesse, comme l'a soutenu le célébre Mr. *Poleni*, que Mr. *Calandrin* attaque.

2. Prenons pour exemple un corps qui perd sa Force, en enfonçant les parties d'un corps mou; &, pour ne parler que du cas le plus simple, supposons que la partie qui s'enfonce soit cilindrique. C'est sur cet exemple, que roulent les principaux raisonnemens de la dissertation que nous examinons, & que nous prions le Lecteur de relire avant de passer à notre réponse.

Fig. 6. Nous supposons encore qu'un même corps vienne frapper en A & en B avec

avec différentes viteſſes la ſuperficie DE d'un corps mou, inébranlable quant à ſa maſſe totale; & cela, de manière que le corps agité perde chaque fois toute ſa Force en enfonçant les parties. Soient A & B les deux enfoncemens formés de cette manière.

La queſtion ſe réduit à ſçavoir ſi les actions totales, par leſquelles ces enfoncemens ont été formés, ſont en raiſon des viteſſes qu'avoit le corps en rencontrant la ſuperficie DE, ou bien en raiſon doublée de ces mêmes viteſſes. 3.

On demeure d'accord de part & d'autre. 1. Que l'action totale, qui dure pendant un tems fini, eſt la ſomme d'un nombre infini de petites actions qui ne durent chacune qu'un moment infiniment petit. 4.

2. Que pour déterminer chacune de ces petites actions, il faut multiplier dans chacun de ces momens la grandeur de l'action par le tems qu'elle dure. 5.

3. Que chacune des petites actions dont il s'agit ici eſt égale à la réſiſtence qu'on lui oppoſe. De ſorte que la queſtion ſe réduit à comparer enſemble les ſommes de toutes les petites réſiſtences, qui viennent de la ténacité des parties que le corps ſépare en formant les cavités. 6.

4. Enfin on tombe d'accord, que les profondeurs des cavités cilindriques, qui ont été formées par le même corps, ſont entre elles en raiſon doublée, c'eſt à dire, comme les quarrés des viteſſes dont il s'agit ici. 7.

En avançant ces principes comme non conteſtés, je ne dis pas qu'ils ſoient ſi généralement reçus, qu'il n'y ait perſonne qui les révoque en doute: il ſuffit pour le preſent que M. *Calandrin* en tombe d'accord avec moi; & cela paroit par ſa diſſertation: avec cela, il ſemble, qu'à examiner la matière avec ſoin, il n'eſt guére poſſible de diſputer là deſſus.

Voici ſur quoi on ſe partage. M. *Poleni* dit que la ſomme de toutes les petites réſiſtences eſt comme la profondeur de la cavité, parce que le nombre des parties ſéparées ſuit cette raiſon. Si la profondeur de B eſt quadruple de celle de A, la réſiſtence en formant B eſt quatre fois auſſi grande, parce que le nombre des parties ſéparées eſt quadruple: par conſéquent, pour former B, on ſurmonte quatre fois la ténacité, qu'on ne ſurmonte qu'une fois en formant A; puiſque B eſt l'aſſemblage de quatre cavités comme A. 8.

Si on compare la ténacité de deux parties qu'on ſépare à un fil qu'on rompt, on trouve que le nombre des fils rompus eſt en raiſon de la profondeur de la cavité.

Suivant ce raiſonnement, la Force du corps eſt comme la profondeur de l'enfoncement, c'eſt à dire, comme le quarré de la viteſſe *. * 7.

M. *Calandrin* enviſage l'expérience ſous une autre face. Il obſerve, que 9.

que la *Force morte qui produit la ténacité doit être toujours la même, pendant tout le tems que le corps agit contre elle*; parce que *la ténacité est la même à chaque instant*; d'où il conclut, *que pendant tout le tems que la Force vive subsiste, elle reçoit à chaque instant une égale diminution.*

De là il déduit d'une manière claire & incontestable, que les forces du corps qui a fait les enfoncemens A & B étoient dans ces deux cas comme les vitesses. C'est surquoi nous renvoions à la dissertation.

10. J'entreprens de défendre la manière de raisonner de M. *Poleni*; & je demeure d'accord, qu'il n'y auroit rien à répondre à M. *Calandrin*, s'il étoit vrai que, *pendant tout le tems que la Force vive subsiste, elle reçoit à chaque instant une égale diminution*: ce que M. *Calandrin* déduit de ce que la ténacité reste la même pendant tout ce tems; en supposant que de ce que la ténacité est la même, il s'ensuit que *la résistence qui vient de cette ténacité est la même, sans qu'on doive avoir égard au nombre des parties qu'on sépare dans un certain tems, pourvû que les superficies qui s'enfoncent soient égales.* Sans cette supposition tout le raisonnement tombe; car, si la résistence est inégale, la diminution de Force le doit être aussi. C'est donc là le seul point que j'ai à examiner.

M. *Calandrin* a trouvé cette égalité de résistence si évidente, qu'il ne l'a pas seulement exprimée. Le contraire ne me paroit pas moins clair: C'est à ceux, qui voudront bien comparer nos deux écrits, à juger qui de nous deux se trompe; & j'ôse bien assurer, que nous n'en serons pas moins bons amis pour cela.

11. Je commence par prier M. *Calandrin* d'essaïer d'enfoncer, simplement avec la main, un cilindre dans de la terre glaise, ou dans quelqu'autre corps semblable, & de l'enfoncer à plusieurs fois avec différentes vitesses: suivant ses principes, le corps mou doit toujours résister également dans chaque instant; &, par conséquent, la main ne doit pas trouver plus de difficulté dans un cas que dans l'autre. C'est sur quoi je me rapporte à ceux qui voudront bien en faire l'essai; & je passe à l'examen de la proposition même.

12. J'accorde que la ténacité est la même pendant tout le tems. C'est sur ce principe, que je vais raisonner, en tâchant de faire voir, que d'en déduire l'égalité de la résistence, c'est renverser toute la méchanique, & révoquer en doute les effets les plus connus des machines simples.

13. Comparons encore la ténacité de deux parties à un fil qui les joigne, & qu'il faut rompre pour les séparer Je suppose tous les fils également forts; & je dis que l'effort total par lequel je romps un certain nombre de fils est proportionel à ce nombre. M. *Calanderin* soutient au contraire, que si je casse les fils plus vite, je puis en casser un plus grand nombre

avec

avec un même effort. Ce qui revient à ceci, qu'un même fil peut être rompu avec plus ou moins d'effort suivant les circonstances.

Mais, pour rompre un fil, il faut un dégré déterminé de tension: aussitôt qu'on l'applique au fil, il se rompt; sans cela, il reste entier. Par conséquent, l'effort qui le rompt est déterminé & invariable. 14.

M *Calandrin* n'aiant pas envisagé la ténacité des parties sous cette face, j'abandonne la comparaison des fils, pour envisager la résistence qui vient de cette ténacité comme une pression continue; & il s'agit à present de démontrer en géneral comment dans chaque instant infiniment petit il faut determiner l'effet d'une pression, pour avoir l'effet total qui est la somme de tous les effets infiniment petits. 15.

La première chose à laquelle il faut faire attention, c'est la grandeur de la pression considerée à part; & on compare les grandeurs de deux pressions par leurs effets en tems égaux dans des circonstances entiérement semblables. C'est ainsi qu'on dit que le poids d'une livre vaut seize fois le poids d'une once. C'est cette grandeur de la pression que nous nommons son *Intensité*. 16.

Mais, ce n'est pas cette intensité seule qu'il faut considérer. Dans certaines circonstances, une once peut soutenir une livre, c'est à dire, former elle seule une action qui empêche la livre de tomber; tout de même qu'on a quelquefois besoin de l'effort entier d'une livre pour empêcher une seule once de tomber. 17.

Si nous examinons ce phénoméne si commun, nous aurons la clef de tous les calculs sur les pressions.

Une once soutient l'effort d'une livre, lors qu'elle ne sçauroit se mouvoir sans faire seize fois le chemin qu'elle fait faire une seule fois à la livre; & un enfant soutiendra l'effort d'un homme vingt fois plus robuste, si cet homme ne peut avancer sans faire reculer l'enfant par un chemin vingt fois plus grand que celui qu'il fait lui-même. 18.

Or, une pression qui ne vaut qu'une once ne sçauroit égaler celle qui vaut une livre, à moins que l'effort de cette once ne vaille seize fois l'effort de chaque once de celles qui composent la livre, & on ne conteste point que cette augmentation d'effort ne sçauroit être attribuée qu'à la plus grande vitesse qu'auroit l'once, si elle mettoit en mouvement la livre, ou que la livre la mit en mouvement. Pour dire qu'il ne faut avoir égard qu'à l'intensité de la pression, quand il s'agit de déterminer l'effort qu'elle fait, & la résistence qu'elle peut surmonter, il faut soutenir que quelque inégaux que soient les bras d'une balance, il n'y a que les poids égaux qui soient en équilibre.

On voit donc que pour comparer les efforts de deux pressions en tems

égaux, il faut avoir égard aux intensités des pressions & aux vitesses des points ou des superficies auxquelles on les applique immédiatement : & ce n'est qu'en multipliant l'intensité par cette vitesse, qu'on détermine l'effort.

19. Pendant qu'un cilindre entre dans un corps mou & perd sa Force, la ténacité des parties reste la même ; & la même superficie agissant, c'est toujours le même nombre de parties qui résiste & l'intensité de la pression est toujours la même ; mais, la vitesse de la superficie qui presse, & est pressée, change à tous momens ; par conséquent, les efforts qui détruisent la Force du corps dans les moments qui se suivent, quoiqu'égaux, sont inégaux, & étant comme les vitesses ils sont comme les espaces parcourus dans ces tems égaux. Or, la somme de tous les efforts étant égale à toute la Force perdue, il s'ensuit que cette Force est proportionelle à la somme de tous les petits espaces parcourus, c'est à dire, proportionelle à la profondeur de l'enfoncement, qui est proportionelle au quarré de la vi-

* 7. tesse *.

Je viens aux nouvelles expériences annoncées dans le titre de cet écrit. Mais, je dois avertir d'avance ceux qui voudront les repeter, de faire attention à tout. Il faut que les machines soient travaillées avec exactitude ; &, avec cela, la moindre négligence en faisant l'expérience l'empêche de réussir ; mais, si on prend toutes les précautions nécessaires, on trouvera toujours ces expériences conformes à ce que je vais dire.

Experience I.

20. A une barre de fer, longue de trois pieds, large de trois quarts de pou-

Fig. 7. ce, & épaisse d'un demi pouce, j'attache à trois hauteurs différentes trois cones semblables & égaux en A, B, & D. Vis-à-vis de chacun, il y a des poids égaux de l'autre côté, pour faire équilibre, afin que la barre soit exactement verticale, étant suspendue par le bout C, où elle est mobile autour d'un axe, en formant de cette manière un pendule composé. L'axe est mince, d'acier poli, & tourne dans deux trous dans du cuivre ; ensorte que, sans avoir de jeu, il tourne sans frottement sensible. Si ce pendule est agité, les trois points A, B, D, parcourront des arcs inégaux en tems égaux. Le pendule en descendant a sa plus grande vitesse quand CD est vertical ; c'est-là que je l'arrête par un obstacle immobile : mais ayant un creux rempli de terre glaise vis-à-vis de la pointe A, les pointes B & D ne frappent rien.

Ensuite, c'est B seul qui frappe, quand le pendule est arrêté.

Enfin, le pendule perd sa Force, pendant que D rencontre l'obstacle.

On

On a soin que le pendule soit chaque fois également élevé, pour qu'il ait la même vitesse, & par conséquent la même Force, quand il frappe l'obstacle; & on trouve les trois cavités exactement égales. C'est la même Force qui se perd à chaque fois, mais les tems sont bien inégaux.

EXPERIENCE II.

Je me sers du même pendule. J'ôte les cones, &c. que j'avois attachés en A & B, en laissant celui qui est en D. & j'attache à quelque hauteur au dessus de D le poids P, long de trois pouces, & pesant une demi livre. J'éléve le pendule, & le laissant tomber il perd sa Force en frappant de la terre glaise en D. 21. Fig. 8.

Ayant ôté P, j'attache le poids Q de manière que la distance CP soit double de CQ; & pour que ceci se puisse appliquer à tous les points des deux corps, Q n'a que la moitié de la hauteur de P, c'est à dire, un pouce & demi. Q pese deux livres, & est par conséquent quadruple de P. Je calcule à quelle hauteur il faut lever le pendule, pour que, étant parvenu à être vertical, où D rencontre la terre glaise, il ait la même vitesse que lors que P y étoit attaché. La cavité dans ces deux cas est précisément la même.

Le point D ayant chaque fois la même vitesse, & pénétrant chaque fois à la même profondeur & de la même manière dans la terre glaise, les forces sont détruites en tems égaux. Voici donc deux cavités égales, semblables, & formées en tems égaux: les forces détruites sont donc égales; & le pendule ayant chaque fois perdu toute sa Force, il s'ensuit que dans ces deux chûtes les forces entières étoient égales. La barre de fer avec la pointe D n'a pas été changée, la vitesse a été la même, donc la Force de cette partie du pendule n'a pas varié. Retranchant chaque fois cette partie de la Force, il reste des forces égales pour les corps P & Q. Or, les masses sont comme 1 à 4, & les vitesses comme les distances CP, CQ, c'est à dire comme deux à un, ou en raison inverse sous-doublée des masses.

EXPERIENCE III.

J'attache un ressort à un corps. En pliant ce ressort, & en le relachant, ce corps est mis en mouvement aussi bien que le ressort même, qui avec le corps ne fait qu'une même masse, dont le poids peut être changé. Le ressort se bande toujours de la même manière, & est chaque fois également plié. Quand la masse est *un*, la vitesse que le ressort communique est 16 & demi. La masse étant *quatre*, la vitesse, que l'action du ressort donne au corps, est 8 & un quart. Mais, le poids du corps étant 22.

neuf,

neuf, la vitesse n'est que 5 & demi. Le produit du quarré de la vitesse par la masse étant toujours le même.

EXPERIENCE IV.

23. Dans l'expérience précédente, le ressort quand on le plioit étoit appuié contre un obstacle immobile, ici ce même ressort est plié entre deux corps & est attaché à l'un des deux. Il y a bien des choses à observer dans la construction des machines pour cette expérience, & pour la précédente; sans quoi, elles ne réussissent point. On en verra tout le détail dans un autre Ouvrage.

Les masses des corps étant nommées A & B. Si A est *six* & B *quatre*, la vitesse que reçoit A est 4 & un quart, celle de B 6 & un sixième. Si les masses sont A *un*, B *neuf*, la vitesse d'A sera 15, 6. Celle de B. 1, 7. Si A est *huit* & B *quatre*, la vitesse d'A est 3, 3. Celle de B. 6, 7.

Et, de quelque manière qu'on varie l'expérience, on trouve toujours que les vitesses sont en raison inverse des masses, & qu'en multipliant chaque masse par le quarré de la vitesse, & en ajoutant les deux produits ensemble, on trouve dans chaque expérience la même somme 272.; qui est celle qu'on trouve dans l'expérience III., en multipliant la masse du corps qu'on y emploie, par le quarré de sa vitesse.

Sur ces expériences, on pourra dire qu'il faut avoir égard au tems que le ressort emploie à se débander Je l'accorde; mais, il faut aussi avoir égard à la vitesse avec laquelle il se débande, comme nous l'avons fait voir
* 18. en parlant de la pression en général *: & alors, on trouve que ce qu'on perd en diminuant le tems est regagné par l'augmentation de la vitesse; de manière que l'effort total est toujours le même, quand le même ressort a été plié de même. Ce qui paroit plus clairement dans les expériences suivantes.

EXPERIENCE V.

24. J'emploie ici la même barre de fer dont j'ai parlé dans la 1. expérien-
Fig. 7. ce; & successivement j'attache en B & D, le ressort dont je me suis servi dans les dernières; en observant de ne mettre le ressort qu'après avoir ôté un corps aussi pesant, que je remets dans l'endroit d'où j'ai ôté le ressort. Le ressort étant également bandé, en se rélachant communique chaque fois la même vitesse au pendule.

25. On peut en emploiant ce même ressort faire une expérience qui réponde à l'expérience II. ci-dessus; &, en général, de quelque manière que j'aie varié ces expériences, j'ai toujours trouvé que le même ressort, plié de

de même, produisoit toujours en se débandant la même Force, qui se trouve en multipliant par le quarré de sa vitesse chaque petite partie de matière mise en mouvement, & en prenant la somme de tous ces produits. Il est aisé de trouver cette somme par le moyen de ce théoréme, qu'il n'est pas difficile de démontrer, que *cette somme est égale au poids de tous* 26.
les corps mis en mouvement, multiplié par la hauteur à laquelle ce mouvement fait monter le centre commun de gravité de tous ces corps. Or, ce produit dans toutes les expériences a toujours été trouvé le même.

Quelque décisives que me paroissent ces expériences, je prévois qu'on 27.
y peut faire une objection; c'est que, dans ces expériences, je ne fais pas attention à l'effort du pendule par son axe.

Il est certain, que quand le ressort n'est point attaché dans le *centre d'oscillation* du pendule, l'axe C fait effort. Mais, je n'y fais pas d'attention, quand l'axe n'a point de jeu, parce que jamais effort sans mouvement local n'a été cause de diminution de Force.

Si le corps A, mu horizontalement, glisse le long d'une superficie ver- 28.
ticale BC, & que par-là il soit détourné, il pressera cette superficie : *Fig.* 9.
mais, si elle ne céde pas, le corps ne perdra rien de sa vitesse, à moins qu'il n'y ait frottement.

Mais, sans abandonner nos expériences, voici quelque chose de plus di- 29.
rect.

Soit QO un pendule composé, C le centre de suspension, P & Q deux *Fig.* 10.
corps attachés au pendule: en *o* & O, on fixe ce qu'il faut pour pouvoir y appliquer le ressort, en ôtant un corps aussi pesant que le ressort; tout est fixe, hormis le corps Q, qui peut se détacher & être appliqué en *q*, ensorte que C*q* soit égal à CQ. Lors que ce corps est en Q, le centre d'oscillation de tout le pendule est O, & on y attache le ressort. Quand le corps est en *q*, ce centre est *o*, & c'est alors dans cet endroit qu'on fixe le ressort. En mettant chaque fois le pendule en mouvement, de la manière qu'il a été dit dans l'expérience V., qu'arrivera-t-il? Je n'ai jamais fait l'expérience: mais, je ne crains point qu'on me nie ce que je vais dire. Mr. *Calandrin* peut conclure de ses principes ce que je conclus des miens: aussi je ne propose cette expérience, que pour en déduire une autre, dont on ne pourra pas me nier l'effet, aussi tôt qu'on aura accordé ce qui regarde celle-ci; &, par cette raison, j'ai regardé l'expérience même comme inutile. Je pourrai pourtant bien la faire quelque jour, s'il ne manque que cela pour ôter tout scrupule, quoique ce que je vais dire soit une suite des expériences dont j'ai parlé N. 25. Je reviens à notre pendule, & je dis que dans les deux cas la vitesse communiquée au

 pen-

pendule sera précisément la même, & par conséquent la Force communiquée à tous les corps la même ; le corps Q ayant la même vitesse, soit qu'il soit attaché en Q ou en q. Cependant, la vitesse du point O est bien différente de celle d'o ; &, par conséquent, quoique les effets soient égaux, les tems dans lesquels le ressort se débande sont bien différents. J'en conclus, que le tems a été compensé par la vitesse, & qu'à cause de cela
* 18. l'action totale est la même *.

30. Voici ce qu'on peut répondre : on m'accordera que les vitesses sont les mêmes, mais qu'il ne s'ensuit point que les forces soient les mêmes ; que quand le corps qu'on peut transporter est en Q, au-dessus du point de suspension, il recule, & que sa Force est négative ; que par conséquent elle doit être retranchée de la somme, bien loin d'y être ajoutée, pour avoir la Force totale ; & que dans les deux cas il faut en agir de même à l'égard de la barre de fer pour la partie qui est au-dessus du centre de suspension. J'avoue, qu'en comptant de cette manière, & en mettant la Force proportionelle à la vitesse multipliée par la masse, les forces totales sont comme les tems que le ressort est à se débander ; ce qui convient avec le principe de M. *Calandrin*, & ce qui m'a fait dire, qu'on m'accorderoit aisément que la vitesse est la même dans les deux cas.

Il faut remarquer, qu'il ne s'agit ici que de la vitesse que le ressort donne au pendule ; & on ne doit pas faire attention à ce qui arrive après, c'est à dire, à la manière dont la vitesse est détruite, quoique la vitesse soit égale : la hauteur à laquelle le pendule monte n'est pas la même ; ce n'est que par l'inégalité de ces hauteurs, & par leur proportion, qu'on peut conclure que les vitesses étoient égales.

La difficulté, que nous venons d'indiquer, & à laquelle les défenseurs du sentiment que la Force est proportionelle au produit de la masse par la vitesse sont obligés de recourir souvent, est fondée sur ceci ; que, pour avoir l'effet d'un effort, il faut retrancher de l'effet que cet effort fait d'un côté l'effet que ce même effort fait du côté opposé : au lieu que nous disons, que l'effet total est la somme de ces deux effets.

Voilà comme nous avons raisonné dans l'expérience IV. ; au lieu que, suivant le sentiment que nous combattons, l'effet d'un ressort, qui se débande entre deux corps, sera toujours nul, quel que soit le ressort, parce que les forces opposées sont égales. L'effet d'un coup de canon sera nul, parce que la poudre fait reculer le canon d'un côté avec la même Force qu'elle pousse le boulet de l'autre.

On voit aisément combien d'autres choses il y auroit à dire sur cette manière de raisonner : aussi ne l'applique-t-on pas à tous les cas, & on ne

nie

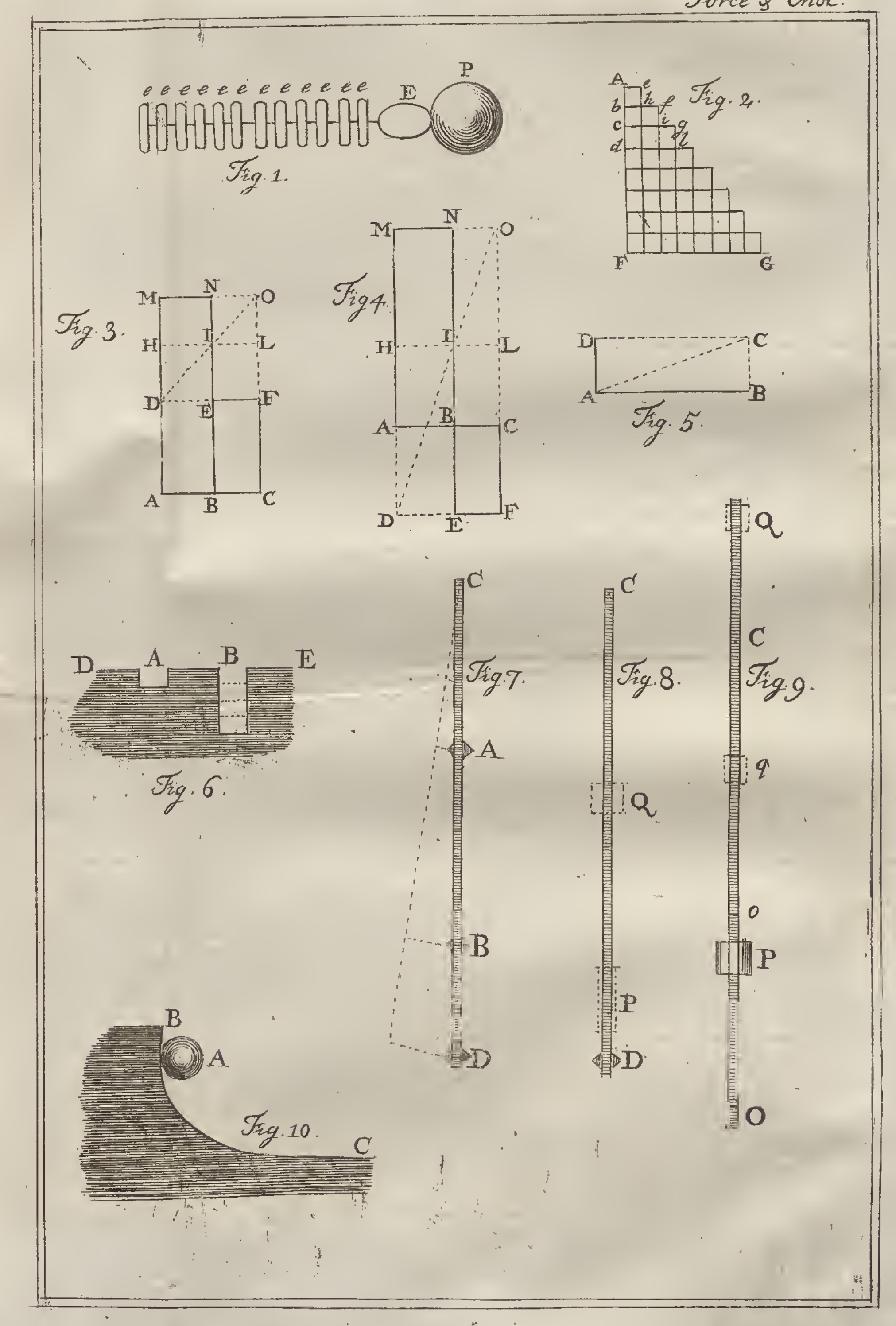
nie point que dans les cas analogues à l'expérience IV. il ne faille mettre les deux efforts dans une même ſomme; du moins c'eſt ce qui ſuit de bien des raiſonnemens des défenſeurs de l'ancien ſyſtême: & l'expérience IV. ne leur doit point faire de peine. Dans les différents cas, les Forces, meſurées à leur manière, ſont proportionelles au tems que les reſſorts ſont à ſe débander; il n'y a contre eux que le raiſonnement que nous avons vu ci-devant *.

Voici quelque-choſe, je ne dis pas de plus fort, car le raiſonnement N. 18. me paroit démonſtratif, mais de plus frappant, étant moins abſtrait. Je poſe qu'on m'accorde, que dans l'expérience indiquée N. 29. la viteſſe eſt la même dans les deux cas dont j'ai parlé; ce qui eſt une ſuite du N. 25. comme auſſi des principes que ces Meſſieurs admettent. * 18. 31.

Je conçois deux pendules abſolument ſemblables à celui dont j'ai fait mention dans cet endroit, & les deux corps mobiles attachés au-deſſus de C en Q: le reſſort eſt appliqué entre les deux pendules en O, étant attaché à l'un; alors, le reſſort venant à ſe débander repouſſera les deux pendules, leur donnant à chacun le même dégré de viteſſe: & la même choſe arrivera encore, ſi le reſſort eſt en *o*, après que les corps mobiles auront été tranſportés au-deſſous des centres de ſuſpenſion en *q*; & ces dernières viteſſes ſeront préciſément les mêmes que les premières, auſſi bien que dans l'expérience mentionnée N. 29. On a, dans ces deux cas, les barres de fer & tous les corps attachés en *o*, B, & O, agités abſolument de même; outre cela, des deux corps Q ou *q*, l'un eſt pouſſé d'un côté & l'autre de l'autre, & la viteſſe eſt la même dans les deux cas, de ſorte que la quantité de Force, de quelque manière qu'on la veuille meſurer, eſt abſolument la même de chaque côté; par conſéquent, le même reſſort, plié de même, produit la même Force, quelque inégaux que ſoient les tems dans leſquels il ſe débande, qui dans ce cas ſont entre eux comme C*o* à CO. Il me ſemble que ceci lève la plus grande des difficultés qu'on ait oppoſées juſques à préſent aux expériences alléguées pour prouver que la Force eſt proportionelle au quarré de la viteſſe multiplié par la maſſe. Je n'ajoute qu'un mot, pour éviter toute diſpute inutile. Le mot de Force eſt équivoque; mais, dans tout ce que j'ai écrit ſur la Force d'un corps en mouvement, j'ai entendu, par ce mot, la capacité que ce corps avoit d'agir ſur les autres corps en perdant ſon mouvement. *Fig.* 10.

Je renvoie à ce que j'ai dit ci-devant, *pag.* 258. & 259.; & je crois pouvoir affirmer, que les expériences prouvent immédiatement ce que j'avance.

Qu'on donne au mot de Force un autre ſens ; qu'on diſe que cet autre ſens eſt plus naturel ; je ne m'y oppoſe pas : tout ce que j'ai voulu ſoutenir, c'eſt que ce que j'ai nommé *Force* doit être meſuré par le produit de la maſſe & du quarré de la viteſſe. Pour ſoutenir, qu'en enviſageant la Force ſous une autre face, on peut admettre une autre meſure, il faut expliquer toutes les expériences qu'on a faites ſur la *Force* & ſur le *Choc* ; ce que que nous faiſons de notre côté : & j'ôſe aſſurer, que cela n'a pas encore été fait par ceux qui ont embraſſé le ſentiment oppoſé.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

REMARQUES

Sur la Construction des MACHINES PNEUMATIQUES, *& sur les Dimensions qu'il faut leur donner. Avec quelques Problèmes qui ont raport à cette matière.*

Une des Inventions qui a le plus contribué à avancer la Physique, & dont cette science tire encore tous les jours des avantages très considérables, c'est, sans contredit, la *Machine Pneumatique*, ou *Pompe d'air*. *Otto de Guericke*, Bourguemaitre de *Magdebourg*, est le premier qui ait tiré l'air d'un récipient, & qui ait fait voir l'effort nécessaire pour séparer deux hémisphéres vuides d'air: M. *Boyle* perfectionna d'abord cette invention; au lieu d'une simple séringue, il employa une machine plus grande, dont on tiroit le piston par le moyen d'un pignon & d'une manivelle; il employa même deux corps de pompes placés l'un à côté de l'autre, & dont les pistons étoient joints par une corde qui passoit par une poulie, de manière qu'en faisant rentrer un des pistons on faisoit monter l'autre.

La *Machine Pneumatique* a été fort perfectionnée depuis M. *Boyle*, & on fait aujourd'hui un grand nombre d'expériences qu'on n'auroit pas osé espérer du tems de ce grand Physicien; mais c'est un détail dans lequel je n'entrerai pas ici. Mon dessein dans ce Mémoire est de faire quelque remarques génerales sur la construction des *Machines Pneumatiques*, d'examiner quelles en sont les dimensions les plus avantageuses, & d'y ajoûter quelques problémes qui ont raport à cette matière.

Dans un second Mémoire je parlerai plus particuliérement de la construction des *Machines Pneumatiques*: je donnerai le moyen de corriger plusieurs défauts qui y restent encore, & celui de faire la plupart des expériences avec moins d'embarras. (*)

Il

(*) Mr. *'s Gravesande* avoit commencé le second Mémoire qu'il promet ici, & même il en avoit déjà fait graver les Planches, qui representoient dans le plus grand détail toutes les parties de la *Machine Pneumatique* dont il se servoit, & qui étoit de son invention. Mais l'usage lui en ayant fait connoitre les défauts, il s'est appliqué à les corriger, à diverses reprises, & enfin il a porté cette Machine au dégré de perfection, dans lequel elle est representée dans la dernière édition de ses Elemens de Physique; par là ses premiéres planches lui sont devenues inutiles; & il a abandonné le dessein de publier ce second Mémoire, parce que dans sa Physique il donne une description assez étendue de cette Machine, & des expériences auxquelles on peut l'emploier.

Il semble qu'on n'a pas fait assez d'attention aux dimensions qu'on doit donner à la *pompe*; le calcul que j'en donne ici pourra faire voir, que bien des gens sont dans un faux préjugé à cet égard, & que les grandes *Machines Pneumatiques*, n'ont pas sur les petites autant d'avantage, qu'il paroit d'abord; on verra encore que les Ouvriers font mal, de donner le plus de longueur aux *corps de pompes* qui ont le plus grand diamétre, ce sont au contraire ceux-là qui doivent être les plus courts; & ce qui paroîtra un paradoxe à bien des gens, on prouvera ici, qu'il est inutile de donner plus de quatre ou cinq pouces de longueur à quelque *pompe* que ce soit: je ne parle que de la longueur de l'espace que le piston doit laisser vuide quand il est élevé; & c'est dans ce sens que j'entens la *longueur de la pompe* dans le reste de cet écrit.

Dans toutes les *Machines Pneumatiques*, de quelque manière qu'on les construise, le corps de pompe est un cilindre de cuivre, qui doit être le plus exact qu'il est possible; souvent même on en met deux: dans chacun de ces cilindres glisse un piston, qui pendant qu'on l'élève, ne doit pas laisser le moindre passage à l'air, & il doit s'apliquer exactement contre le fond du cilindre. Il y a dans ce fond une petite ouverture, par le moyen de laquelle la pompe a communication avec un récipient, dans lequel se fait l'expérience, & qui est posé sur une platine, ou attaché à la pompe de quelque autre manière.

A l'égard de tout le reste, on peut réduire les *Machines Pneumatiques* à deux sortes; les unes ont une soupape ou valvule au fond de la pompe, & les autres ont un robinet entre le fond de la pompe & la platine, sur laquelle on place le récipient.

Dans les premières, la valvule, qui est au fond de la pompe, s'ouvre quand on élève le piston, & l'air du récipient entre dans la pompe. Quand on repousse le piston, cette valvule se referme, & l'air qui est entré dans la pompe s'échape à côté du piston, qui est construit de manière, qu'il ne ferme exactement que lors qu'il remonte: autrefois on mettoit une seconde valvule dans le piston, & l'air s'échapoit par là.

Dans les autres *Machines Pneumatiques*, après qu'on a élevé le piston, & que l'air du récipient est entré dans la pompe, le robinet sert à fermer la communication de la pompe avec le récipient, & alors en repoussant le piston, l'air, qui est entré dans la pompe, s'échape par un pertuis qu'on a fait pour cet effet dans le robinet.

Les pompes de la première sorte ont un grand avantage sur les derniéres, principalement dans les pompes doubles, dont nous parlerons dans la suite; mais d'un autre côté, la valvule, qui est au fond de la pompe, entraine avec soi de grandes incommodités, qui surpassent de beaucoup le peu de tems

tems qu'on perd à tourner le robinet dans les autres pompes ; c'est pour cette raison que pour avoir les avantages des premières, sans en avoir les incommodités, il faut se servir d'une pompe avec un robinet, mais dans lequel il n'y ait point de pertuis pour laisser échapper l'air de dedans la pompe, & il faut employer un piston comme celui dont nous avons parlé pour les premières pompes, & qui laisse échaper l'air à côté. Ce sera donc de ces sortes de pompes que nous parlerons dans la suite de ce Mémoire.

Mais avant que de parler de leurs dimensions, il est nécessaire de donner la solution des deux problémes suivans.

PROBLEME I.

Etant donné la grandeur de la pompe, celle du récipient, & le nombre des coups de pompe, trouver le dégré de raréfaction de l'air dans le récipient.

Quand on a élevé le piston, l'air du récipient entre dans la pompe, & il est aisé de voir, qu'il reste répandu également dans le récipient & dans la pompe ; de manière que la quantité d'air, qui reste alors dans le récipient, est à celle qui y étoit avant qu'on élevât le piston, comme la grandeur ou solidité du récipient jointe à celle de la pompe, est à celle du récipient seul.

Si on nomme p la solidité de la pompe, r celle du récipient, & a l'air contenu dans le récipient avant qu'on en ait rien tiré ; on aura par ce que je viens de dire $p + r,\ r :: a,\ \frac{ar}{p+r} =$ à l'air qui reste après qu'on a élevé le piston, c'est à dire, après le premier coup de pompe.

On voit par la même raison que $p + r,\ r :: \frac{ar}{p+r}$, à la quantité d'air qui reste après un second coup de pompe ; cette quantité par conséquent est $\frac{ar^2}{\overline{p+r}^2}$.

Après trois coups c'est $\frac{ar^3}{\overline{p+r}^3}$ & ainsi de suite ; de sorte que si 1. désigne la densité de l'air dans son état naturel, le dégré de raréfaction, après un nombre indéterminé de coups de pompe, que je nomme n, sera exprimé par $\frac{r^n}{\overline{p+r}^n}$ *C. Q. F. T.*

PRO-

PROBLEME II.

Les mêmes choses étant données, trouver le nombre des coups de pompe, qu'il faut pour réduire l'air à un dégré donné de raréfaction.

Soit z. le nombre cherché, & b le dégré déterminé de raréfaction; par ce qu'on vient de démontrer $\frac{r^z}{\overline{p+r}^z} = b$; prenant les logarithmes des deux membres de cette équarion, on a log. $r \times z$ — log. $\overline{p+r} \times z = \text{l}\ b$. d'où l'on tire $z = \frac{-\text{l.}\ b}{\text{l.}\ \overline{p+r} - \text{l.}\ r}$. Si on prend $r = 1$. on aura z

3. $= \frac{-\text{l.}\ b}{\text{l.}\ \overline{p+1}}$ *C. Q. F. T.*

THEOREME.

De toutes les pompes de même diamétre, (si on n'a pas égard au tems, qu'il faut pour tourner le robinet après chaque coup) *les plus courtes réduisent l'air dans le moins de tems à un dégré déterminé de raréfaction.*

DEMONSTRATION.

On ne considére ici que le tems qu'il faut pour faire monter & pour repousser le piston; ce qui fait voir, que dans les pompes de différentes longueurs, les tems sont entre eux en raison composée de ces longueurs & du nombre des coups de chacune de ces pompes, & ainsi dans le calcul

* 3. 4. précédent * $z\,p = \frac{-\text{l.}\ b \times p}{\text{l.}\ \overline{p+1}}$ exprime le tems qu'on a dû mettre pour réduire l'air au dégré de raréfaction b. Car quoique p ait été pris pour la solidité de la pompe, comme dans les pompes de même diamétre, la longueur est proportionelle à la solidité, p peut aussi dénoter cette longueur.

Pour la démonstration, prenons $pn - 1$ pour la longueur de la pompe, n marque une quantité indéterminée. On trouve le tems qu'il faut pour réduire l'air au dégré de raréfaction b, en substituant $\overline{pn - 1}$ à p dans

* 4. l'expression précédente *, & on a $\frac{-\text{l.}\ b \times \overline{pn - 1}}{\text{l.}\ pn}$.

Quand on augmente ou quand on diminue n, ce tems suit la proportion de $\frac{pn - 1}{\text{l.}\ pn}$ parce que — l. b est une grandeur constante. Mais lorsque

n croit, $\frac{pn - 1}{l.\ pn}$ devient auſſi plus grand, car on augmente le numerateur de cette fraction beaucoup plus que le dénominateur, comme il eſt évident par la nature des logarithmes. Le contraire arrive quand n diminue. Par conſéquent, en augmentant la pompe le tems s'augmente auſſi, & en la racourciſſant il diminue. *C. Q. F. D.*

Je n'ai pas fait entrer dans cette démonſtration le tems qu'il faut pour tourner le robinet après chaque coup, ce qui change la choſe; car ce tems augmente par la diminution de la pompe, le nombre des coups devenant plus grand. Ce tems néanmoins n'eſt pas aſſez conſidérable pour rendre les pompes longues les meilleures; mais il y a une longueur moyenne qui donne le tems le plus court pour tirer l'air, & cette longueur eſt différente, ſuivant la différente grandeur du récipient.

PROBLEME III.

Etant donné la capacité du récipient, le diamétre de la pompe, le tems qu'il faut pour tourner le robinet, trouver la longueur qu'on doit donner à la pompe, pour réduire l'air dans le moins de tems, à un dégré déterminé de raréfaction.

Soit x cette longueur cherchée; comme on connoit le diamétre de la pompe, x peut auſſi ſervir à en marquer la ſolidité *. Le récipient eſt 1. & c eſt le tems qu'il faut pour tourner le robinet après chaque coup; z exprime le nombre des coups qu'il faut pour réduire l'air au dégré déterminé de raréfaction b. * 4.

Par ce qui a été démontré * $z = \frac{-l.\ b}{l.\ \overline{1+x}}$, le tems que l'on met à faire monter & à repouſſer le piſton eſt $2zx$. Celui qu'on met à tourner le robinet après chaque mouvement du piſton eſt égal à $2c$ multiplié par le nombre des coups, c'eſt à dire que c'eſt $2cz$. Il faut ajouter enſemble ces deux quantités pour avoir le tems entier que l'on met à réduire l'air au dégré de raréfaction b. Par conſéquent c'eſt $2zx + 2zc$ que je ſuppoſe égal à $2t$, qui eſt un *moindre :* on a donc $zx + zc = t$ $= \frac{-l.\ b \times \overline{x+c}}{l.\ \overline{1+x}}$ en ſubſtituant à z ſa valeur $\frac{-l.\ b}{l.\ \overline{1+x}}$. * 3.

L'équation $zx + zc = t$ donne $z = \frac{t}{x+c}$; comparant cette valeur de z à ſa valeur déjà trouvée, on a $\frac{t}{x+c} = \frac{-l.\ b}{l.\ \overline{1+x}}$ ou bien $t \times$

$l.\ \overline{1+x} = -\ l.\ b \times \overline{c+x}$. Il faut prendre la différence de cette égalité en supposant $dt = 0$. à cause que t est un *moindre*, & on trouve $\frac{t\,dx}{1+x} = -\ l.\ b \times dx$. Ce qui donne $t = -\ l.\ b \times \overline{1+x}$ qu'il faut comparer avec le valeur déjà trouvée de t. On a donc $-\ l.\ b \times \overline{1+x} = \frac{-\ l.\ b \times \overline{x+c}}{l.\ \overline{1+x}}$, d'où l'on déduit $\frac{x+c}{1+x} = l.\ \overline{1+x}$. Par le calcul des *suites* on trouve $l.\ \overline{1+x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ * &c. on a donc $\frac{x+c}{1+x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. ce qui donne $c = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2 \times 3}x^3 + \frac{1}{3 \times 4}x^4 - \frac{1}{4 \times 5}x^5$ &c. par la méthode du retour des *suites* on trouve

$$x = 2c^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}c^{\frac{2}{2}} - \frac{1}{72}\,\overline{2c}^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{135}c^{\frac{4}{2}} - \frac{23}{17280}\,\overline{2c}^{\frac{5}{2}} \text{ \&c.}$$

Mais comme $\frac{1}{72}\overline{2c}^{\frac{3}{2}}$, avec tout le reste de cette suite, est très petit par raport à ce qui précède, on peut le rejetter dans la pratique & n'employer
5. que $x = \overline{2c}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}c$ qui sera la longueur cherchée.

Si au lieu de prendre le récipient égal à 1 on le nomme r, il faut faire entrer r dans l'égalité, qui donne la valeur de x. Mais il ne faut le faire entrer que dans les termes qui sont multipliés par l'unité pour en augmenter les dimensions. L'égalité $x = \overline{2c}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}c$. n'a tous ces termes linéaires que lors qu'on suppose $x = \overline{2c \times 1}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}c$. On voit par là que r ne doit entrer que dans le terme $\overline{2c}^{\frac{1}{2}}$, ce qui donne $x = \overline{2cr}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}c$.

Pour appliquer ceci à la pompe, il faut remarquer que dans le tems c on peut faire avancer le piston de la pompe d'une certaine quantité, & c'est proprement cette quantité que c désigne dans l'équation précédente. Au lieu de r il faut y faire entrer la longueur qu'auroit la pompe, si en solidité elle étoit égale au récipient, & alors on connoîtra la longueur cherchée x.

EXEM-

* *Cette suite est de* Mercator. *Voyez l'Algèbre de* Wallis, *chap.* 90. *ou l'Analise démontrée du* P. Reyneau *p.* 710.

E x e m p l e.

Soit donnée une pompe de trois pouces de diamètre; ſuppoſons le tems pour fermer ou pour ouvrir le robinet égal à celui qu'il faut pour faire avancer le piſton d'un quart ou 0.25." de pouce, ce qui s'accorde aſſez bien avec l'expérience. Prenons un récipient de ſept pouces de diamètre & d'autant de hauteur, c'eſt à dire qui ait 343. pouces cilindriques de ſolidité; il faut diviſer ce nombre par neuf & on aura 38.11." pour la longueur d'une pompe de trois pouces de diamètre & égale en ſolidité au récipient. Appliquons ceci à l'équation $x = \overline{2cr}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}c$, on aura $x = \overline{19.05''}^{\frac{1}{2}} + 0.08''$. ou $x = 4.37' + 0.08'' = 4.45''$, c'eſt à dire que la longueur de la pompe n'eſt pas de quatre pouces & demi. Il ne s'agit ici, comme je l'ai déjà dit, que de l'eſpace que le piſton doit laiſſer vuide; & il faut y ajouter l'épaiſſeur du piſton pour avoir la longueur de toute la pompe.

Pour déterminer la longueur d'une pompe, il faut choiſir un récipient qui puiſſe ſervir au plus grand nombre d'expériences, ſans avoir égard à quelques unes qui pouroient demander des récipiens beaucoup plus grands. Nous verrons dans la ſuite encore une autre raiſon pourquoi il faut prendre une longueur fixe pour tous les récipiens. Si néanmoins on veut voir, d'un coup d'œil, la différente longueur qu'à la rigueur mathématique il faut donner à une pompe ſuivant les différents récipiens, il faut dans l'égalité $x = \overline{2cr}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}c$ regarder r comme changeante & c comme conſtante. Cette égalité devient alors un lieu à la parabole, qu'il faut conſtruire pour avoir ce qu'on cherche.

Si au contraire dans cette même équation on regarde r comme conſtante & c comme changeante, elle devient un autre lieu à la parabole, dans lequel r déſigne la ſolidité du récipient, & c l'éſpace que le piſton laiſſe vuide dans un intervalle de tems égal à celui qu'il faut, pour ouvrir ou pour fermer le robinet. On ne peut pas conſidérer ici r & c comme on l'a fait dans l'exemple qu'on vient de voir, parce qu'alors r ne pourroit pas être une grandeur conſtante; mais cela revient à la même choſe. La conſtruction de ce lieu donne la ſolidité des différentes pompes pour un même récipient; & il eſt alors aiſé de trouver les longueurs de ces pompes, puis qu'on en doit connoître les diamètres, pour déterminer la quantité que c doit déſigner. Je ne remarque ceci qu'en paſſant, j'ai déjà dit que cela n'eſt pas d'une fort grande utilité pour la pratique.

Ce qu'on vient de voir touchant le tems peut aussi se rapporter au *travail* qu'il faut faire, pour réduire l'air à un dégré déterminé de raréfaction. Le travail est égal à l'effort qu'on fait, multiplié par le tems que cet effort dure. Celui qui pendant deux heures fait un certain effort, fait le même travail que celui qui pendant une heure feroit un effort double.

Dans toutes les pompes le travail qui regarde le robinet est le même; celui qu'on fait pour tirer le piston est égal à l'effort qu'on fait, multiplié par la longueur de la pompe, car cette longueur est proportionelle au tems, quand l'effort ne change point. Cet effort doit surmonter deux choses, la résistence de l'air, & le frottement du piston. La résistence de l'air est proportionelle à la capacité de la pompe, comme on le voit aisément; c'est à dire qu'en augmentant la capacité de la pompe, cette résistence croit en raison des quarrés des diamètres. Le frottement des pistons dont il s'agit ici garde la même proportion. Il y faut considérer deux choses; la grandeur de la superficie qui frotte, & la force avec laquelle elle est pressée contre la pompe. Cette pression dans toutes les pompes est la même, étant causée par le poids de l'atmosphère, & ainsi le frottement est proportionel à la superficie qui frotte, & cette superficie doit suivre la proportion de la capacité de la pompe.

On voit par là, que dans toutes les pompes le travail est proportionel à la capacité de la pompe, c'est à dire à la grandeur du vuide qu'on fait; ce qui prouve que dans deux pompes quelconques, on fait le même vuide avec le même travail, & que par conséquent il est indifférent à cet égard de quelle pompe on se serve: c'est donc principalement le tems qu'on doit regarder dans le choix qu'on fait d'une pompe, & ce sont les occasions dans lesquelles on s'en sert qui le réglent. Dans les Universités & dans les Académies où l'on fait des expériences en public, on doit se servir de grands récipiens, outre qu'on y est borné pour le tems: ainsi on y a besoin de grandes pompes, & on ne doit pas prendre garde à l'effort qui est plus grand. Ce n'est pas la même chose pour les curieux qui font les expériences dans leur cabinet; ils doivent moins considérer le temps qu'ils employent, que la peine qu'ils se donnent en faisant des expériences. De plus il n'ont pas besoin de se servir de si grands récipiens, ce qui diminue assez le tems, & ainsi ils doivent prendre de petites pompes.

Si en envisageant la chose uniquement du côté du travail, on vouloit connoître la solidité de la pompe pour tirer l'air avec le moins de travail, (par ce qu'on vient de dire cette solidité est la même pour toutes les pompes) il faudroit se servir encore de l'égalite $x = \overline{2cr}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}c$. Pour c il

faut

faut mettre le vuide qu'on fait en tirant le piston par un travail égal à celui qu'il faut pour tourner le robinet: *r* désigne la solidité du récipient & alors *x* est la solidité cherchée de la pompe. Mais il est fort inutile d'envisager la chose de ce côté là, à cause de l'inégalité entre l'effort qu'on fait pour tourner le robinet & celui qu'on fait pour faire avancer le piston. On fait mieux de déterminer la longueur de la pompe par la considération du tems, sans faire attention au travail; & on doit avoir égard à l'un & à l'autre quand on veut faire choix d'une pompe.

Le tems pour tourner le robinet est le même dans toutes les pompes; c'est un tems fixe qui sert à comparer ensemble les pompes de différents diamètres, & cela tant à l'égard de leurs longueurs que par raport au tems dans lequel on réduit l'air par différentes pompes à un même dégré de raréfaction, dans des récipients soit égaux, soit inégaux. Ce même tems fixe sert encore à comparer ensemble les tems que deux pompes de même diamètre, mais de différentes longueurs, demandent pour la même expérience.

Pour faire tous ces calculs, il faut examiner combien dans chaque pompe le piston peut avancer, dans le tems qu'on tourne le robinet. Pour cet effet il faut faire deux suppositions, qui doivent néanmoins avoir leur fondement dans l'expérience. Je pose en premier lieu; que dans une pompe d'un pouce de diamètre, on peut faire avancer le piston d'un pouce dans le tems qu'on peut faire faire au robinet un quart de tour, qui est le mouvement qu'on lui donne pour l'ouvrir ou pour le fermer. La seconde supposition regarde les pompes de différente capacité. Soient deux pompes; la capacité de la première est d'un pouce circulaire, c'est à dire qu'elle a un pouce de diamètre; la capacité de la seconde est de trois pouces circulaires, c'est à dire que le diamètre en est de 1.73″. po. Il est aisé de voir que la résistence étant triple dans la grande pompe, je puis dans un même espace de tems faire avancer davantage le piston de la petite pompe que celui de la grande; je ne puis pourtant pas le faire avancer du triple, car il faudroit, avec un effort égal pour les deux pompes, un mouvement trois fois plus rapide dans la petite pompe; il faut donc prendre un nombre moyen; c'est pourquoi je pose que dans une pompe, dont la capacité est le tiers de celle d'une autre, le mouvement du piston est du double plus rapide. Si on applique ceci aux problémes qu'on a vu ci-devant, il sera aisé de comparer ensemble les différentes pompes, tant à l'égard de leur longueur, & du tems que durent les expériences, que par raport à l'effort pour tirer le piston. Ce n'est que par de tels calculs qu'on peut se déterminer dans le choix qu'on fait d'une pompe, & qu'on peut savoir les dimensions qu'on doit lui donner.

La Table ſuivante fait voir d'un coup d'œil, tous les différents raports dont nous venons de parler, & cela pour ſix pompes différentes, dont la première eſt d'un pouce, & la dernière de trois pouces de diamètre: il eſt tout à fait inutile d'en faire de plus grandes que la dernière, & de plus petites que la première. On a donné dans cette Table un plus grand récipient aux grandes pompes qu'aux petites; on en en a vû la raiſon ci-devant.

TABLE

Pour les Machines Pneumatiques.

Proportion du tems pour la longueur reduite.	Longueur, réduite de la pompe.	Proportion du tems.	Longueur de la pompe.	Solidité du recipient.	Hauteur du récipient.	Diam. du récipient.	Proportion de l'effort pour tirer le piſton.	Mouvement du piſton pendant qu'on ouvre le robinet.	Capacité de la pompe.	Diamétre de la pompe.
***	Pouces.	***	Pouces. $0.^{00''}$	Pouces Cilindri.	Pouces.	Pouces.	***	Pouces. $0.^{00''}$	Po.circul. $0.^{00}$.	Pouces. $0.^{00''}$
110	5	100	$17.^{65}$	150	6	5	100	$1.^{00}$	$1.^{00}$	$1.^{00}$
90	5	87	$12.^{29}$	150	6	5	117	$0.^{75}$	$1.^{56}$	$1.^{25}$
77	5	76	$9.^{14}$	150	6	5	135	$0.^{60}$	$2.^{25}$	$1.^{50}$
138	4	132	$8.^{60}$	343	7	7	168	$0.^{42}$	$4.^{00}$	$2.^{00}$
115	4	114	$6.^{00}$	343	7	7	200	$0.^{32}$	$6.^{25}$	$2.^{50}$
102	4	102	$4.^{45}$	343	7	7	225	$0.^{25}$	$9.^{00}$	$3.^{00}$
							Petites Pompes.		Grandes Pompes.	

Après

Après ce qu'on a vû jusques ici il n'est pas nécessaite que je m'arrête à expliquer la manière dont cette Table a été calculée. Je dirai seulement à l'égard de la troisième colomne qu'elle est calculée sur ce qu'on a vû, que dans une pompe de triple capacité d'une autre, le mouvement du piston y est de la moitié plus lent. D'où il s'ensuit que dans deux pompes, dont l'une a *neuf* & l'autre *un* de capacité, le mouvement du piston de la dernière seroit quatre fois plus rapide que celui de la première. C'est pourquoi dans la Table le mouvement du piston de la pompe 9.00. est de 0.25., pendant que celui du piston de la pompe 1.00., est 1.00. Le calcul qu'on a fait pour trouver le mouvement du piston dans les autres pompes, par exemple dans celle dont la capacité est de 6.25., est fondé sur cette réflexion; que 6.25 est une certaine moyenne proportionelle entre 1.00 & 9.00, & que le nombre qui exprime le mouvement cherché du piston est une semblable moyenne proportionelle entre 1.00. & 0.25. elle est 0.32. C'est la même chose pour les autres nombres de la troisième colomne. Les nombres de la quatrième colomne expriment l'effort qu'on fait dans chaque pompe pour tirer le piston; le travail étant égal dans toutes les pompes, comme nous l'avons vû, cet effort suit la proportion du vuide qu'on fait dans un même tems dans les pompes différentes; prenons le tems pour tourner le robinet, & on voit alors que pour avoir ces vuides pour les pompes différentes, & par conséquent des nombres qui expriment la proportion de l'effort pour tirer les pistons, il faut multiplier chaque nombre de la seconde colomne de la Table par ceux qui leur répondent dans la troisième colomne. Ce sont ces produits dont on a retranché les deux derniers chiffres qus forment la quatrième colomne.

En comparant la dernière colomne de la Table avec la neuvième on voit combien peu on perd de tems, lors qu'on réduit toutes les petites pompes à cinq pouces de longueur, & les grandes à quatre pouces. Ce qui prouve qu'il est entièrement inutile de se lier à l'exactitude mathématique pour la longueur des pompes; mais il ne faut point négliger cette exactitude pour faire les pompes plus longues qu'il n'est nécessaire, défaut si ordinaire aux ouvriers, principalement pour les grandes pompes, ce qui ne sert qu'à les rendre moins justes & de plus grand prix. C'est tout le contraire quand on néglige l'exactitude mathématique pour faire la pompe plus courte; la petite perte de tems est bien regagnée, ou du moins récompensée, par le plus de justesse de la pompe; car quelque adresse qu'ait un ouvrier, l'inégale dureté des parties du cuivre, sans parler du reste, l'empêchera toujours de faire un tuyau long aussi exact qu'un plus court du même diamètre.

Tout ce qu'on vient de voir est une preuve suffisante de ce que j'ai avan-

avancé d'abord sur la longueur des pompes; il suffit de faire les grandes de quatre pouces, & on peut en donner cinq aux petites. Mais pour mettre cette vérité dans un plus grand jour, il faut examiner ici une objection qu'on peut proposer contre les petites pompes. Quand, après avoir fermé le robinet, on fait rentrer le piston, l'air sort de la pompe, mais il en reste toujours dans la communication de la pompe au robinet, & cet air y reste dans son état naturel; quand ensuite on tire le piston, & qu'on ouvre le robinet, cet air se mêle à celui qui étoit resté dans le récipient : comme cela arrive à tous les coups de pompe, c'est autant de nouvel air qui rentre à chaque fois. Dans les petites pompes le nombre des coups étant plus grand, il y entre aussi plus de nouvel air, & celui qui y entre à chaque coup, n'est pas si fort diminué par les coups suivants qu'il l'est dans une grande pompe.

J'accorde toute l'objection, & je répons que tout l'air qui peut rentrer par là est si peu de chose, même pour les plus petites pompes, qu'il est inutile d'y faire la moindre attention, dans les expériences qui demandent le plus d'exactitude: dans une pompe d'un pouce de diamètre sur cinq pouces de longueur, tout l'air rentré n'ira jamais à un quatre millième de l'air dans son état naturel que peut contenir le récipient; & quoique cette erreur puisse être entièrement négligée, elle est beaucoup moindre pour peu que la pompe ait plus de diamètre. Voici la preuve de ce que j'avance.

L'air qui rentre à chaque coup est diminué par tous les coups suivants, & cela dans la même proportion que l'est l'air du récipient; ainsi pour avoir la quantité d'air rentrée en tout, il faut après l'expérience prendre la somme de ce qui reste de l'air rentré à chaque coup; pour trouver exactement cette somme il faut sçavoir le nombre des coups de pompe, ou il faut supposer le nombre le plus grand qu'il est possible, c'est à dire infini; c'est le seul moyen de donner une démonstration génerale, & c'est accorder à ceux qui pourroient faire cette objection tout ce qu'ils peuvent demander.

Soit a la quantité d'air qui rentre à chaque coup, p la pompe, r le récipient; il est clair que ce qui reste de l'air rentré avant le dernier coup

* 1. est $\frac{ar}{p+r}$*, ce qui reste de l'air rentré au coup précédent est $\frac{ar^2}{\overline{p+r}^2}$; le coup d'avant ce dernier ne laisse que $\frac{ar^3}{\overline{p+r}^3}$, & ainsi de suite à l'infini. Toutes ces quantités forment une progression géométrique, dont la somme

me donne la quantité cherchée de l'air rentré pendant toute l'expérience; la somme de cette progression continuée à l'infini est $\frac{ar}{p}$; ce qui donne cette proportion p, r :: a, à la quantité de l'air rentré. Si dans cette proportion a désigne l'espace que l'air qui entre à chaque coup occupe dans son état naturel, le dernier terme donnera aussi l'espace qu'occuperoit dans son état naturel l'air rentré pendant l'expérience; & on voit alors que la solidité de la pompe est à ce premier espace, comme la solidité du récipient est au dernier, de sorte qu'il ne reste plus qu'à démontrer que le petit espace qui fait la communication de la pompe au robinet, n'est pas dans les petites pompes, dont nous parlons ici, un quatre millième de leur solidité. Cette communication peut être la même pour toutes les pompes, & comme elle ne sert de passage qu'à l'air, & tout au plus à l'eau, il est inutile de lui donner plus d'une ligne de diamètre, & on peut approcher assez le robinet & le fond de la pompe pour que cet espace n'ait pas plus de deux lignes de longueur: il n'aura donc en solidité que deux lignes cilindriques. Une pompe d'un pouce de diamètre & de cinq pouces de longueur a en solidité 8640. lignes cilindriques; par conséquent cette pompe est 4320. fois plus grande que la communication dont nous venons de parler. *C. Q. F. D.* (*)

Des

(*) Mr. *Nicolas Bernoulli* ayant lu ces Remarques dans le Journal Litéraire, d'où je les ai tirées, il écrivit à Mr. *'s Gravesande* une Lettre, d'attée de Bâle, le 21. Décembre 1715. dans laquelle il lui marquoit qu'il étoit parvenu à résoudre le problème de la longueur des pompes, de la même manière que lui, mais en suivant une autre route. Cette Lettre est très intéressante, & la solution du problème est fondée sur un Théorème que Mr. *Bernoulli* avoit découvert pour la construction des Logarithmes; on la verra ici avec plaisir: la voici. „ La pièce qui paroit sous vôtre nom est très belle, & „ le problème de la longueur des pompes pneumatiques est très bien résolu. Sur ce que „ vous m'avez dit touchant ce problème dans la Lettre que vous m'avez fait l'honneur „ de m'écrire de Londres, je m'y suis aussi appliqué, & j'en ai trouvé la même solu- „ tion, mais par un chemin différent. Je n'ai pas eu recours aux suites infinies, ni à la „ méthode du retour des suites. Je me suis servi d'un Théorème, que j'ai découvert il „ n'y a pas longtems pour la construction des Logarithmes, & qui m'a conduit à une „ équation algébrique ordinaire de 3. dégrés, dont j'ai trouvé la racine par les métho- „ des ordinaires des approximations. Cette méthode est un peu plus longue que la vô- „ tre, mais comme le Théorème sur quoi elle se fonde est curieux, je veux vous en „ faire part. Je remarque d'abord comme vous, que si l'on n'avoit point d'égard au tems „ qu'il faut employer pour ouvrir & fermer le robinet, la pompe devroit être infiniment „ petite; mais comme on ne peut pas négliger ce tems, pendant lequel on peut faire „ avancer le piston par un certain espace, je nommerai la solidité de cet espace $\frac{1}{a}$, celle „ du récipient étant $= 1$, & la solidité cherchée de la pompe, c'est à dire, l'espace que

DES POMPES DOUBLES.

J'ai dit au commencement de cet écrit qu'on mettoit quelquefois deux corps de pompe ensemble : on doit les joindre de manière qu'on mette en mouvement les deux pistons par un seul pignon & une seule manivelle, & qu'on fasse rentrer un des pistons quand on tire l'autre. Cette construction de pompe a plusieurs avantages sur les pompes simples: avec le même mouvement du pignon & de la manivelle qui sert pour un coup de pompe dans ces dernières, on en fait deux dans celles dont il s'agit ici, & le travail n'est pas à beaucoup près augmenté dans la même proportion. Dans les pompes simples il faut surmonter tout le poids de l'atmosphère pour tirer le piston. Quand le piston rentre l'air le repousse avec plus de force qu'il n'est nécessaire, parce que le piston ne frotte presque point dans ce tems-là. Dans les pompes doubles cet effort est mis à profit, l'air qui pousse le piston qui rentre, contrebalance l'effort de l'air qu'il faut surmonter pour faire sortir l'autre piston, ce qui diminue si fort le travail que quand l'expé-

„ le piston doit laisser vuide soit $= \frac{1}{x}$, la densité naturelle de l'air $= b$, la densité
„ de l'air qui doit rester dans la pompe $= c$, le nombre des coups sera $= \frac{l.\,b - l.\,c}{l.\,1 + \frac{1}{x}}$,
„ & le tems qu'il faut employer à chaque coup étant proportionel à $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \frac{a+x}{ax}$,
„ tout le tems sera exprimé par $\frac{a+x \times l.\,b - l.\,c}{ax \times l.\,1 + \frac{1}{x}}$, ce qui doit être un minimum; par
„ conséquent la différentielle de cette fraction, ou, plus simplement, de celle-ci
„ $\frac{a+x}{x \times l.\,x+1 - l.\,x}$ sera $= 0$, ce qui donnera cette équation $\frac{a+x}{ax+a} = l.\,x+1 - l.\,x$.
„ Or j'ai trouvé, que la différence des Logarithmes de deux nombres, qui ont entr'eux
„ une raison presque d'égalité (telle qu'ont dans cet exemple $x+1$ & x, car le tems
„ pour tourner le robinet n'étant pas fort considérable, je prévois que la pompe doit être
„ très petite, & par conséquent que x doit surpasser de beaucoup l'unité) s'approche de
„ fort près de la quatrième proportionelle au quarré de la somme de ces deux nom-
„ bres augmenté de leur double rectangle, à la différence des quarrés de ces mêmes nom-
„ bres, & au triple de la sou-tangente de la Logarithmique dans laquelle on prend les Loga-
„ rithmes. Ayant donc substitué cette quatrième proportionelle à la place de $l.\,x+1 - l.\,x$,
„ j'aurai cette équation $\frac{a+x}{ax+a} = \frac{6x+3}{6xx+6x+1}$, laquelle étant réduite donnera
„ $x^3 + xx + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{3}a = 0$. Supposant donc avec vous, que la
„ solidité du récipient soit de 343. pouces cubiques, & la solidité de l'espace par lequel
„ le piston peut avancer pendant qu'on tourne le robinet $= \frac{9}{4}$ ou 2,25 pouces cubi-
„ ques,

périence est un peu avancée, on ne trouve presque plus de résistence que celle qui vient du frottement d'un seul piston. Le contraire arrive dans les pompes simples, la difficulté augmente à mesure qu'on tire d'avantage d'air.

Du tuyau pour mesurer la rarefaction de l'air.

La dernière chose que j'examinerai ici, & qui regarde les pompes en géneral, c'est l'avantage qu'on tire d'un tuyau de verre, d'une ou de deux lignes de diamètre, qu'on ajoute à la pompe. Il est indifférent de quelle manière on y joigne ce tuyau, il suffit qu'un de ses bouts ait communication au récipient, & que l'autre trempe dans du mercure exposé à toute l'Atmosphère, comme dans les Baromètres : avec cela ce tuyau doit avoir assez de hauteur pour que le mercure y puisse monter aussi haut que dans le Baromètre. Il sert à faire voir d'un coup d'œil, dans tous les momens le dégré de raréfaction de l'air dans le récipient. Pour cet effet on compare ensemble la hauteur du mercure dans ce tuyau, & sa hauteur dans le Ba-

„ ques, on aura $a = \frac{4}{9} \times 343 = 152\frac{4}{9}$, & l'équation trouvée se changera en celle-„ ci $x^3 + xx - 76\frac{1}{18}x - 50\frac{22}{27} = 0$, dont la racine est à peu près 8.568; „ donc la solidité cherchée de la pompe sera $\frac{343}{8.568}$ ou 40.03, & par conséquent la lon-„ gueur $\frac{40.03}{9}$ ou 4.45″, comme vous l'avez trouvé. Au reste le Théorème dont je me „ suis servi dans cette résolution est, comme j'ai dit, fort utile pour la construction des „ Logarithmes; car le Logarithme d'un nombre (tant soit peu grand) étant donné, on „ trouve par ce Théorème fort exactement le Logarithme du nombre immédiatement „ suivant. Par ex. le Logarithme de 10. étant donné sçavoir 1.000000000 pour trouver „ celui de 11. on n'a qu'à multiplier ce nombre 1.302883443 qui est le triple de la sou-„ tangente de la Logarithmique qui appartient aux tables ordinaires des Logarithmes, par „ 21 qui est la somme de 10. & 11. ou la différence de leurs quarrés, & diviser le pro-„ duit 27.360552303 par 661., qui est le quarré de 10 + 11. augmenté du double re-„ ctangle de 10. par 11. le quotient 0.041392666. sera la différence des Logarithmes de „ 10. & de 11. Donc le Logarithme de 11. sera 1.041392666. Ainsi $\frac{1.302883443 \times \overline{11+12}}{\overline{11+12}^2 + 2 \times 11 \times 12}$ „ $= 0.037788549$. est la différence entre les Logarithmes de 11 & de 12, laquelle „ ajoutée à 1.041392666. donnera 1.079181215. pour le Logarithme de 12. Et en con-„ tinuant de cette manière on aura les Logarithmes de tous les nombres qui sont au „ dessus de 10. & par conséquent aussi de tous ceux qui sont au dessous de 10. Mais „ quand on a un nombre un peu plus grand que 100. pour trouver la différence de son „ Logarithme & de celui du nombre immédiatement suivant, il n'est pas nécessaire de „ suivre cette règle, mais on a cette différence fort exactement en divisant le double de „ la sou-tangente par la somme de ces deux nombres.

Baromètre, & alors la différence de ces deux hauteurs eſt à la première, comme la quantité d'air qui reſte dans le récipient eſt à celle qu'on en a tiré. Ou bien, cette même différence eſt à la hauteur du mercure dans le Baromètre, comme l'air tiré du récipient eſt à celui qui y étoit avant l'expérience. Ceci eſt clair, car l'air qui reſte dans le récipient empêchant le mercure de monter auſſi haut dans le tuyau de la pompe, qu'il eſt monté dans le Baromètre, contrebalance par conſéquent une colomne de mercure égale à la différence de ces deux hauteurs; & l'air dans ſon
6. état naturel contrebalançant toute la colomne de mercure du Baromètre, il s'enſuit, que ces deux colomnes de mercure expriment le raport de l'air qui reſte dans le récipient, avec l'air naturel.

Le tuyau, dont nous parlons ici, peut ſervir même ſans qu'on ait de Baromètre, & il a encore pluſieurs autres uſages qu'on verra dans les problémes ſuivants. Il a cette incommodité qu'il rend la Machine Pneumatique plus difficile à tranſporter, la longueur du tuyau demandant une table exprès; outre cela ce tuyau eſt toujours en danger d'être caſſé, parce qu'il doit être entièrement expoſé à la vue. C'eſt ce qui m'a fait chercher un autre moyen de méſurer la raréfaction de l'air dans le récipient. Lors que je parlerai plus particuliérement de la conſtruction des *Machines Pneumatiques*, je donnerai la deſcription d'un nouvel inſtrument qui a tous les avantages du tuyau dont nous parlons, & qui n'en a point les inconvéniens.

PROBLEME IV.

Par deux coups de pompe, trouver la hauteur du mercure dans le Baromètre.

Il faut ici faire attention à deux choſes, 1. Que ce que le mercure monte par un coup de pompe, eſt la colomne de mercure que l'air tiré par ce coup contrebalance, par conſéquent cette quantité d'air eſt proportionnelle à ce que monte le mercure. 2. Que l'air tiré par un coup de pompe, & tout l'air qui étoit dans le récipient avant ce coup, ſont toujours
* 1. en même raiſon pendant toute l'expérience *.

Soit maintenant c la hauteur du mercure dans le tuyau de la pompe après le premier coup, $c + e$ ſa hauteur après le ſecond coup, h la hauteur cherchée du mercure dans le Baromètre. Il eſt clair par ce qu'on vient de dire, que $c, h :: e, h - c$,
cette proportion ſe réduit à celle-ci

$$c - e, c :: c, h$$

7. qui donne la valeur de $h = \frac{cc}{c - e}$ C. Q. F. T.

PRO-

PROBLEME V.

La hauteur du Baromètre étant donnée: Après un coup de pompe, trouver le nombre des coups qu'il faut pour réduire l'air à un dégré donné de raréfaction, sans connoître la grandeur du récipient.

Soit b la hauteur donnée du Baromètre, c la hauteur du mercure dans le tuyau de la pompe après le premier coup, b le dégré donné de raréfaction de l'air, z le nombre cherché des coups de pompe.

Il est clair que b est à $b - c$ comme $b - c$ est à b moins la hauteur du mercure dans le tuyau de la pompe après le second coup *. Et $b - c$ * 1. 6.
est à cette dernière quantité, comme cette même quantité est à b moins la hauteur du mercure dans le tuyau après le troisième coup, &c. ainsi de suite: de manière que toutes ces quantités, qui sont les différences de la hauteur du Baromètre avec la hauteur du mercure dans le tuyau de la pompe après chaque coup, forment une progression géométrique, dont l'exposant de la raison est $\frac{b-c}{b}$. En supposant que cette progression soit continuée, jusques au nombre de coups z, on trouve $\frac{\overline{b-c}^{z}}{b^{z-1}}$ pour la différence de la hauteur du mercure dans le Baromètre & dans le tuyau. En divisant par b cette différence de hauteur du mercure, on trouve le dégré de raréfaction de l'air après le nombre des coups z. Mais ce dégré de raréfaction par l'hypothèse est b; ainsi on a cette égalité $\frac{\overline{b-c}^{z}}{b^{z}} = b$. Les Logarithmes des deux membres de cette équation sont, $\text{l. } \overline{b-c} \times z - \text{l. } b \times z = \text{l. } b$. d'où l'on tire $z = \frac{-\text{l. } b}{\text{l. } b - \text{l. } \overline{b-c}}$ C. Q. F. T. 8.

PROBLEME VI.

Après deux coups de pompe, sans savoir la hauteur du Baromètre, trouver le même nombre que dans le problème précédent.

Prenons les mêmes lettres que dans les deux problèmes précédents; la seule chose qu'il faut faire pour résoudre ce problème c'est de faire entrer dans l'égalité $z = \frac{-\text{l. } b}{\text{l. } b - \text{l. } \overline{b-c}}$ * au lieu de b sa valeur $\frac{cc}{c-e}$ * qui donne $z = \frac{-\text{l. } b}{\text{l. } c - \text{l. } e}$ C. Q. F. T. * 8. * 7. 9.

PROBLEME VII.

Sachant la hauteur du Baromètre, & la ſolidité de la pompe étant donnée, trouver celle du récipient, par un ſeul coup de pompe.

Soit h la hauteur du Baromètre, c la hauteur du mercure dans le tuyau de la pompe, p la pompe, & x le récipient. La hauteur du mercure dans le tuyau de la pompe après le premier coup, étant proportionelle à la quantité d'air qui eſt ſortie du récipient, eſt à la hauteur du mercure dans le
* 1. Baromètre, comme la pompe eſt au récipient joint à la pompe *.

$$c, h :: p, p + x$$

10. ce qui donne $x = \frac{ph - pc}{c}$ C. Q. F. T.

PROBLEME VIII.

Trouver la grandeur du récipient, par deux coups de pompe, ſans ſavoir la hauteur du Baromètre.

Pour réſoudre ce problème il faut faire entrer, dans l'égalité n. 10.
11. $x = \frac{ph - pc}{c}$, la valeur $\frac{cc}{c - e}$ de h & on trouve $x = \frac{pc}{c - e}$ C. Q. F. T.

LETTRE
à
Mr. NEUWTON,
Sur une Machine inventée par Orffyreus.

Le Docteur *Desaguliers* vous aura ſans doute fait voir une Lettre, que le Baron *Fiſcher* lui a écrite, il y a quelque tems, touchant la Rouë d'*Orffyreus*, que l'Inventeur aſſure être un mouvement perpétuel. Monſeigneur le Landgrave a voulu que j'examinaſſe auſſi la Machine. Ce Prince qui aime les Sciences & les beaux Arts, & qui par le ſecours qu'il donne à tous ceux qui s'y attachent avec quelque ſuccès, ne néglige aucune occaſion de rendre utiles au public les inventions qu'on lui préſente, ſouhaiteroit de voir cette Machine connue de tout le monde, & entre les mains de gens plus habiles que l'Inventeur, afin qu'on en retirat l'utilité qu'on doit naturellement attendre d'une invention auſſi particulière. J'ai cru, *Monſieur*, que vous ne ſeriez pas fâché d'avoir une rélation un peu détaillée de ce qu'on obſerve dans un examen extérieur d'une Machine ſur laquelle les ſentimens ſont ſi partagés, & qui a presque tous les habiles Mathématiciens contre elle. Un très grand nombre ſoutient l'impoſſibilité du Mouvement perpétuel, d'où eſt venu le peu d'attention qu'on a fait à la Machine d'*Orffyreus*. Je ſai combien je ſuis inférieur à ceux qui ont donné leurs démonſtrations ſur l'impoſſibilité de ce Mouvement; cependant pour vous expliquer les ſentimens avec leſquels j'ai examiné cette Machine, j'aurai l'honneur de vous dire, qu'il y a environ 7 ans que je crus découvrir le paralogiſme de ces démonſtrations en ce qu'elles ne peuvent être applicables à toutes les Machines poſſibles, & depuis je ſuis toujours reſté très perſuadé, qu'on peut démontrer que le Mouvement perpétuel n'eſt pas contradictoire; & il m'a paru que Mr. *Leibnitz* avoit tort de regarder comme un axiome l'impoſſibilité de ce Mouvement, ce qui ſert néanmoins de fondement à une partie de ſa Philoſophie. Malgré cette perſuaſion j'étois fort éloigné de croire qu'*Orffyreus* fut aſſez habile pour découvrir le Mouvement perpétuel; je regardois ce Mouvement comme ne devant être découvert, qu'après pluſieurs autres inventions, au cas qu'il le fut jamais. Depuis que j'ai examiné la Machine, je ſuis dans un étonnement que je ne ſaurois exprimer. L'auteur a du génie pour les Méchaniques, mais n'eſt rien moins que profond Mathématicien; cependant cette Machine a quelque choſe de ſurprenant, quand même ce ſeroit une fourberie. Voici ce qui regarde la Machine même, dont l'Auteur ne laiſſe voir que l'extérieur, de peur qu'on ne lui vole ſon ſecret. C'eſt un tambour d'environ 14. pouces d'épaiſſeur ſur 12. pieds de diamètre;

tre; il eſt très léger, étant fait de quelques planches aſſemblées par d'autres pièces de bois, de manière qu'on verroit l'intérieur de tous côtés, ſans une toile cirée qui couvre tout le tambour. Ce tambour eſt traverſé d'un axe d'environ 6. pouces de diamètre; terminé par les extrémités par des axes de fer de 3. quarts de pouce, ſur leſquels la Machine tourne. J'ai examiné ces axes, & je ſuis très perſuadé, qu'il n'y a rien en dehors qui contribue au mouvement de la Machine. J'ai tourné le tambour très lentement, & il eſt reſté en repos, auſſi-tôt que j'ai retiré la main; je lui ai fait faire un tour ou deux de cette manière. Enſuite, je l'ai fait mouvoir tant ſoit peu plus vite, je lui ai fait faire de même un tour ou deux, mais alors j'étois obligé de le retenir continuellement; car l'ayant lâché, il a pris en moins de 2. tours ſa plus grande célérité, de manière qu'il a fait 25. à 26. tours dans une minute. C'eſt le mouvement qu'il a conſervé ci-devant pendant 2. mois dans une chambre cachetée, dans laquelle il étoit impoſſible qu'il y eut aucune fraude. S. A. Ser. fit ouvrir la chambre, & arrêter la Machine après ce tems-là; car comme ce n'eſt qu'un eſſai, elle n'eſt pas aſſez forte pour que les matériaux ne s'uſent par une longue agitation. Monſeigneur le Landgrave a été préſent à l'examen que j'ai fait de la Machine. J'ai pris la liberté de démander à S. A. Ser. qui a vu l'intérieur du tambour, ſi lorsque la Machine a été agitée pendant un certain tems, rien n'étoit changé dans l'intérieur; comme auſſi s'il n'y avoit pas quelques pièces dans leſquelles on pouroit ſoupçonner de la fraude, S. A. Ser. m'a aſſuré que non, & que la Machine eſt fort ſimple. Vous voyez, *Monſieur*, que je n'en ai pas aſſez vu par moi-même, pour aſſurer que j'ai une démonſtration, que dans cette Machine le principe du mouvement, qui eſt certainement dans le tambour, ſoit tel qu'il le faut pour rendre le mouvement perpétuel; mais auſſi je crois qu'on ne ſauroit me nier d'avoir des préſomtions fortes en faveur de l'inventeur. Monſeigneur le Landgrave a donné une récompenſe digne de ſa généroſité à *Orffyreus*, afin de voir le ſécret de la Machine, avec promeſſe de ne point ſe ſervir du ſecret, ni de le découvrir, avant que l'Auteur en eut retiré encore d'autres récompenſes, pour rendre ſon invention publique. Je ſai très bien *Monſieur*, qu'il n'y a qu'en *Angleterre* où les ſciences fleuriſſent aſſez, pour faire trouver à l'Auteur une récompenſe digne de ſon invention. Il s'agit ſimplement de la lui aſſurer, au cas que ſa Machine ſoit un véritable Mouvement perpétuel. L'auteur ne demande à toucher l'argent, qu'après que la Machine aura été examinée en dedans; on ne ſauroit raiſonnablement exiger cet examen avant la récompenſe promiſe. Comme il s'agit d'une choſe utile au public, & à l'avancement des Sciences, de découvrir l'invention ou la fraude, j'ai cru que cette rélation ne vous ſeroit pas déſagréable. Je ſuis &c."

RE-

REMARQUES

Touchant le Mouvement perpétuel.

Il y a environ huit mois que j'examinai à Caſſel, par ordre de S. A. S. Monſeigneur le Landgrave de Heſſe, les effets d'une Machine, que l'Inventeur aſſure être un *Mouvement perpétuel.* Il en cache avec ſoin l'intérieur, juſques à ce, dit-il, qu'on lui ait aſſuré une récompenſe, qu'il ne demande de toucher, que lorſque ſon invention aura été examinée, & reconnue par les Mathématiciens pour être ce qu'on appelle en Méchanique le *Mouvement perpétuel.* Je fus frappé des effets de la Machine; & ce que j'en vis, joint à ce que j'en appris, d'une manière à ne pouvoir être révoqué en doute, me fit regarder cette Machine comme une des plus belles inventions en Méchanique dont j'aie connoiſſance, à ne conſidérer que les effets avérés.

Le déſir de faire connoître cette Machine, fondé ſur la perſuaſion de l'utilité qu'on pourroit en retirer, même en ſuppoſant fauſſe la prétenſion de l'Auteur, me fit écrire à *Monſieur Newton* ce que j'avois obſervé. Ma Lettre a été imprimée en François, & auſſi en Anglois, à ce que j'ai appris, n'ayant jamais vu cette traduction.

On a trouvé à redire que j'avance dans cette Lettre, *que je ne crois pas* le Mouvement perpétuel *contradictoire.*

Que les démonſtrations qu'on a données de ſon impoſſibilité ne me paroiſſent pas applicables à toutes les Machines qu'on pourroit imaginer.

Et enfin, *que je trouvois probable que la Machine de Caſſel fut un véritable* Mouvement perpétuel.

Toute la difficulté roule ſur la premiére de ces trois propoſitions. Si elle étoit prouvée, les deux dernières n'auroient pas grande difficulté. Auſſi a-t-on trouvé cette première propoſition trop hardie pour être avancée ſans preuve; ce que j'accorde très-volontiers: je n'aurois pas fait cette faute, ſi ma Lettre avoit été écrite pour être imprimée, mais elle étoit adreſſée à *Monſieur Newton.*

J'étois ſi peu diſpoſé à avancer cette propoſition ſans preuve, que je ne me ſuis jamais déclaré ſur ce que je penſois ſur le Mouvement perpétuel, prévoyant le jugement que les Mathématiciens devoient faire de celui qui, ſur ce ſujet, s'écarteroit du ſentiment reçu.

Ce que j'ai cru devoir à la verité, après avoir vu la Machine de Caſſel, m'a engagé de dire à *Monſieur Newton* ce que je penſois ſur cette Machine, & à cette occaſion ce que je penſois des preuves de l'impoſſibi-

lité du Mouvement perpétuel. Ma Lettre a été imprimée ; il faut me justifier devant le Public : j'aurois même dû le faire plutôt.

Avant d'entrer en matière, il faut établir l'état de la question. *On appelle en Méchanique* Mouvement perpétuel, *une Machine dont le principe du mouvement ne dépend d'aucun agent étranger, & dont le mouvement ne s'arrêteroit jamais si les matériaux ne s'usoient pas.*

On voit par cette définition, qu'une horloge, qui se monteroit par le vent ; par les changemens que l'humidité & la sécheresse, ou le froid & le chaud, produisent dans certains corps ; ou enfin par les changemens dans le poids de l'atmosphère, ne seroit pas un *Mouvement perpétuel.* Il ne seroit pourtant pas difficile de construire une telle horloge, qui ne pourroit s'arrêter que par quelque dérangement dans ses parties ; mais ce seroient des *agents* étrangers qui feroient mouvoir la Machine.

Il faut examiner à présent si la possibilité du Mouvement perpétuel n'est pas une suite de ce que les Mathématiciens ont enseigné sur le choc. Il semble qu'une partie de ceux qui ont voulu prouver l'impossibilité d'un tel mouvement, n'aient pas fait attention aux effets du choc.

Les Mathématiciens, & les Physiciens, sont partagés sur la Force du choc. Les uns croient, & c'est le sentiment le plus ordinaire, que les Forces de différents chocs d'un même corps sont entre elles, comme les vitesses de ce corps. Les autres, au contraire, soutiennent que ces mêmes Forces sont entre elles comme les quarrés des vitesses. Tous conviennent que la Force du choc est proportionelle à la masse : c'est pourquoi les premiers multiplient la masse par la vitesse, pour avoir la Force du choc ; les autres multiplient la masse par le quarré de la vitesse, pour déterminer cette même Force.

Je n'examinerai pas ici lequel de ces deux principes est conforme à l'expérience : je me propose de faire voir, 1. Qu'en admettant le premier, il faut admettre la possibilité du Mouvement perpétuel, dans les Machines qui auront pour principe de leur mouvement le choc des corps. 2. Qu'en admettant le second principe, l'impossibilité du Mouvement perpétuel n'a pas encore été démontrée dans tous les cas possibles. Et 3. enfin, je tâcherai de faire voir que les loix de la nature ne nous sont pas assez connues pour en tirer une conclusion générale, que le *Mouvement perpétuel* est contraire à ces loix.

I. *Preuves de la possibilité du* Mouvement perpétuel, *en supposant que la Force du corps en mouvement est proportionelle à la masse multipliée par la vitesse.*

Ceux qui admettent ce principe conviennent de cette proposition ; que la

la Force d'un corps qui tombe librement, s'augmente en raiſon du tems que le corps dans ſa chute reſte expoſé à l'action de la peſanteur: ce qui eſt une ſuite du principe; puiſqu'il eſt conſtant par l'expérience, que la viteſſe d'un corps qui tombe, s'augmente en raiſon du tems de la chute.

Par la même raiſon, un corps qui monte verticalement, perd de ſa Force en raiſon du tems qu'il monte: par conſéquent, ſi de deux corps égaux l'un monte verticalement, pendant que l'autre tombe librement, le premier perdra autant de Force que le ſecond en gagne, quoi qu'ils parcourent des eſpaces inégaux.

La Force qu'il faut pour faire monter un corps à une certaine hauteur, eſt celle qu'il faut pour ſurmonter l'action de la peſanteur pendant que le corps monte; & cette Force eſt proportionelle au tems que le corps emploïe à monter.

Si donc un corps, en tombant librement d'une certaine hauteur, peut reſter expoſé plus long-tems à l'action de la peſanteur, qu'il ne l'eſt en remontant à la même hauteur, la Force qu'il acquiert en tombant ſurpaſſe celle qui peut le faire remonter. Comme il eſt très poſſible qu'un corps remonte plus vite qu'il n'eſt deſcendu, c'eſt ſur quoi je fonde ma preuve de la poſſibilité du Mouvement perpétuel.

Concevons un corps qui en tombant de la hauteur d'un pied perde tout ſon mouvement par le choc; poſons qu'il tombe quatre fois de ſuite de la même manière: il ſera deſcendu de la hauteur de quatre pieds, & les quatre chocs ſeront égaux à la Force, que la gravité communique au corps pendant les quatre momens de ſa chute. Mais il eſt connu que le corps peut remonter en deux de ces momens à la hauteur de quatre pieds; & par conſéquent la Force de deux des quatre chocs ſuffit pour le faire remonter, & les deux autres chocs pourront être employés à faire mouvoir une Machine, dont le mouvement ſera continué à perpétuité par des chutes réiterées du même corps, qui à chaque révolution gagne la Force de deux chocs. Le gain de la Force ſera plus grand à chaque révolution, ſi on augmente le nombre des chocs dans la deſcente. Il ne s'agit pas ici de la manière d'appliquer l'effort des deux chocs qu'il faut pour faire remonter le corps: je ne dis pas que j'aie trouvé le Mouvement perpétuel; il ſuffit de démontrer, comme je viens de le faire, qu'il y a dans la nature un principe d'augmentation de Force, pour ſoutenir que le Mouvement perpétuel n'eſt pas contradictoire, & même qu'il eſt poſſible.

Cette poſſibilité paroîtra plus clairement, ſi on fait attention à cette propriété des reſſorts, qu'ils ſe débandent avec la même Force qu'ils ont été bandés, ſur quelque corps qu'ils agiſſent. Soient deux corps que je nomme

me A & B. Je ſuppoſe que A péſe quatre livres, & B une livre. B en deſcendant de la hauteur de quatre pieds peut faire monter A à la hauteur d'un pied, par le moyen d'un levier ou de quelque autre machine; ce qui n'eſt pas conteſté. Je nomme *un* la viteſſe qu'un corps acquiert en tombant de la hautenr d'un pied, & je ſuppoſe que A tombe de cette hauteur d'un pied à laquelle il vient d'être élevé: il aura quatre dégrés de Force. Suppoſons encore que A par ſon choc bande un reſſort, & qu'il y employe toute la Force de ſon choc. Si ce reſſort en ſe débandant agit ſur B, il communiquera à B quatre dégrés de Force: c'eſt à dire, puiſque la maſſe de B eſt un, quatre dégrés de viteſſe, qui feront remonter le corps B à une hauteur de ſeize pieds, quadruple de la hauteur dont il étoit deſcendu d'abord.

On trouve dans les Actes de Leipſic une diſpute ſur cette matière entre Mrs. Leibnitz & Papin. Le premier, pour combattre le principe, que la Force d'un corps eſt proportionelle à ſa viteſſe, ſoutenoit que la poſſibilité du Mouvement perpétuel en eſt une ſuite. Mr. Papin ne put nier la validité de la conſéquence, & ſe contenta de répondre, que ſi on lui faiſoit voir, qu'il n'eſt pas contradictoire que toute la Force d'un grand corps ſoit communiquée à un petit, il avoueroit, ou *que le principe qu'il défendoit eſt faux*, *ou que le Mouvement perpétuel eſt poſſible*. Mr. Leibnitz à cette occaſion indiqua pluſieurs moyens de communiquer toute la Force d'un grand corps à un petit, différents de celui du reſſort que j'ai emploïé dans ma démonſtration.

Le reſſort des corps eſt un principe d'augmentation de Force à l'infini, en ſuppoſant toujours, avec le plus grand nombre des Mathématiciens, que la Force du corps eſt proportionelle au produit de la maſſe par la viteſſe.

Concevons onze boules de quelques matière flexible à reſſort, dont les maſſes ſoient en progreſſion géométrique d'un à dix; que ces boules ſoient rangées ſuivant l'ordre de leur grandeur; que la plus petite, que nous ſuppoſons ſeule en mouvement, frappe celle qui la ſuit; que celle-ci, miſe en mouvement par ce choc, aille frapper la ſuivante; & ainſi de ſuite, juſques à ce que la plus grande ſoit frappée. Dans ce cas, ſi tous les chocs ſont directs, & ſi le reſſort des boules eſt parfait, cette dernière aura 394. fois plus de Force que n'en avoit la plus petite; comme on le trouve par les régles du choc, reçuës par tous les Mathématiciens, qui n'ont point de différent ſur la viteſſe des corps après le choc. Les dix premières boules retournent, & les Forces de toutes jointes enſemble ſurpaſſent 393. fois la Force communiquée à la petite boule qui avoit été miſe en mouve-

vement. Or, comme la direction du mouvement n'empêche pas que l'effort de ces corps ne puisse être mis à profit, il s'ensuit qu'un seul dégré de Force communiqué à un corps, en produit près de huit-cens dans d'autres corps.

Soutiendra-t-on que ces huit cens dégrés de Force ne puissent être emploiés à en rendre un seul au premier corps, & outre cela à faire mouvoir quelque Machine, dont on voit aisément que le mouvement pourroit être continué à perpétuité, si les matériaux ne s'usoient pas?

On m'objectera, peut-être, qu'il n'y a point de corps, dont le ressort soit parfait; ce qui ne renverse pas la force du raisonnement. Du manque de perfection dans le ressort, il suit que l'augmentation de la Force sera moindre, que celle que nous avons déterminée; mais, il faudroit qu'il n'y eut du tout point de ressort, pour qu'il n'y eut pas d'augmentation de Force. L'élasticité de l'yvoire, qui n'est pas la plus parfaite que nous ayons, est suffisante pour augmenter la Force plus de six cens fois, dans l'exemple qu'on vient d'alléguer.

Le seul moyen de répondre aux argumens qu'on vient de proposer pour la possibilité du Mouvement perpétuel, est de nier, avec Mr. Leibnitz, le principe sur lequel ils sont fondés, que les Forces des corps sont en raison des produits de leurs masses par leurs vitesses; mais, c'est ce qu'un très petit nombre de Mathématiciens ont fait jusques ici. Dans le tems que j'écrivis ma Lettre à Mr. Newton, je croyois avoir des preuves du principe sur lequel j'ai raisonné jusques à présent; &, en admettant le principe, il me paroissoit que la conséquence étoit démontrée. Si je me suis trompé dans le principe, je suis tombé dans l'erreur avec le plus grand nombre de ceux qui ont trouvé que j'avois tort dans ce que j'ai avancé touchant le Mouvement perpétuel.

II. *Examen des Démonstrations de l'impossibilité du Mouvement perpétuel, en posant pour principe, que la Force d'un corps est proportionelle au quarré de sa vitesse.*

Une suite fort naturelle de ce principe est que la Force qu'un corps acquiert en tombant est exactement celle qu'il faut pour le faire remonter à la même hauteur, sans qu'on doive avoir égard au tems.

C'est encore une suite du même principe, que la Force n'est pas augmentée dans le choc des corps flexibles à ressort: & j'accorde volontiers, qu'à cet égard, ceux qui admettent le principe dont il s'agit, ont démontré l'impossibilité du Mouvement perpétuel.

Mais, il suit aussi du même principe, que deux corps, qui se choquent directement, peuvent rester en repos après le choc, quoique leurs forces

foient inégales ; car deux corps inégaux, dont les viteffes font en raifon inverfe des maffes, & dont par conféquent les forces font inégales, venant à fe choquer directement, s'ils n'ont point de reffort, reftent en repos après le choc : ce que perfonne ne contefte, & ce qui eft prouvé directement par des expériences dans lefquelles il n'eft pas poffible qu'il y ait de l'erreur.

Concevons deux corps dont les maffes foient comme 1. à 10. & les viteffes comme 10. à 1.: la Force du petit fera cent, & celle du grand fera dix, en multipliant les maffes par les quarrés des viteffes, c'eft à dire, que la Force du petit corps furpaffe dix fois l'autre, & cependant la Force du grand corps eft fuffifante pour faire perdre au petit corps tout fon mouvement. C'eft un Axiome reçu de tous les Mathématiciens, qu'il faut autant d'effort pour donner à un corps en repos dix dégrés de viteffe, qu'il en faut pour l'arrêter lors qu'il eft mu avec ces mêmes dix dégrés de viteffe. Or, on a vu comment dans le choc direct une petite Force fuffit pour faire perdre à un corps dix dégrés de viteffe. Par conféquent, pour faire voir que le Mouvement perpétuel eft contradictoire, il faudroit faire voir qu'il implique contradiction, qu'avec un certain dégré de Force, que je nomme f, on puiffe communiquer à un corps une Force dix fois plus grande F, quoique cette même petite Force f fuffife pour faire perdre fon mouvement à un corps dont la Force feroit F. Or, c'eft ce qui ne me paroit pas avoir été entrepris jufques à préfent.

Bien des Lecteurs feront étonnés de voir, entre les fentimens des Mathématiciens fur la Force des corps, une différence auffi grande que celle dont nous avons parlé. La matière du choc des corps eft une des moins éclaircies de la Phyfique: plufieurs problèmes importants fur cette matière n'ont pas encore été examinés ; & le manque de certaines expériences a empêché ceux, qui ont traité jufques à préfent cette matière, quelque principe qu'ils ayent admis, de faire attention à tout ce qui devoit être confidéré. J'ai publié une Introduction à la Philofophie de Mr. Newton. Tout ce que j'y dis du choc eft fondé fur ce principe, que la Force, qu'avec les autres Mathématiciens je nomme quantité du mouvement, eft proportionnelle à la maffe multipliée par la viteffe. En écrivant ma Lettre à Mr. Newton, j'étois, comme je l'ai dit ci-deffus, encore dans le même fentiment. Les régles que les Mathématiciens ont données pour déterminer l'effet du choc de deux corps font trop bien confirmées par l'expérience pour être révoquées en doute: il me paroiffoit qu'elles étoient une fuite du principe dont je viens de parler ; & je foupçonnois d'autant moins que je pouvois me tromper fur ceci, que ce qui regarde le choc des corps, du moins des corps non élaftiques, a été déduit de ce même principe, par les

les Mathématiciens qui admettoient l'autre: ce qui me faisoit croire, que quoi qu'ils admissent ce dernier dans la spéculation, ils étoient obligés de l'abandonner, pour expliquer ce qui regarde les effets du choc.

Depuis, j'ai fait des expériences qui m'ont fait voir, d'une manière à ne laisser pas le moindre doute, que ce dernier principe, que la Force des corps est proportionelle au quarré de la vitesse multiplié par la masse, étoit véritable. Ce principe m'a mené à des conséquences qui m'ont paru bien paradoxes; mais, les ayant trouvées conformes à l'expérience, je me suis attaché à en rechercher les raisons, pour concilier ces expériences avec celles qui ont été faites touchant le choc. Le Public jugera si j'ai réussi, par un *Essai sur une nouvelle Théorie du Choc*, qui paroitra dans peu dans le 12. *Tome* du *Journal Littéraire*, qui s'imprime à la Haye (*). On verra aussi que, d'admettre l'un ou l'autre des principes dont nous avons parlé, ne change rien dans tout ce qu'on a démontré sur la projection des graves, sur les forces centrales, les centres d'oscillation, & plusieurs autres matières qui regardent le mouvement.

III. Quoique depuis ma Lettre écrite à Mr. Newton, j'aie entièrement changé de sentiment touchant la nature de la Force dont dépend le choc, & que je ne croie plus qu'on puisse démontrer la possibilité du *Mouvement perpétuel*, par les raisons qu'on a vues ci-devant, & qui me paroissent encore des suites incontestables d'un principe généralement reçu, je ne saurois me persuader néanmoins, qu'il soit possible de démontrer jamais, qu'il soit contradictoire de construire une Machine qui auroit en soi un principe d'augmentation de Force en conséquence des loix de la nature. Ces loix nous sont trop inconnues, & il y a peu d'apparence qu'on les découvre jamais toutes assez bien, pour en tirer une semblable conclusion. Il me paroit, au contraire, que ce que nous connoissons de ces loix nous doit faire envisager comme très possible une Machine telle que nous venons de décrire, quand même l'Art humain ne pourroit jamais y parvenir.

Il y a dans la nature des principes actifs pour rétablir le mouvement qui se perd en tant de rencontres: on découvre de tels principes dans toutes les petites parties dont les corps sont composés; & on en voit des effets bien considérables dans les ressorts, dans les fermentations, & dans une infinité d'au-

(*) Cet Essai est celui qui a été inseré ci-dessus *pag.* 217. & à cette occasion il est à propos de remarquer, que ce que Mr. *'s Gravesande* vient de dire du sentiment sur la Force qu'il a adopté dans son Introduction à la Philosophie de Neuwton, doit s'entendre de la première édition de cet ouvrage, qui a paru en 1720. Dans les deux autres éditions qui l'ont suivie, & qui ont été publiées en 1725. & 1742. il a établi que la Force étoit proportionelle au quarré de la vitesse d'un corps, multiplié par sa masse.

d'autres occaſions. N'y auroit-il pas quelque témérité d'aſſurer qu'il ſoit contradictoire de mettre à profit ces principes? Il paroit probable, que c'eſt d'eux que dépendent les mouvemens dans les animaux, dont les corps me paroiſſent autant de *Mouvemens perpétuels:* le ſang, qui circule, met en mouvement les muſcles qui agitent le cœur: le cœur agité fait circuler le ſang; &, dans chaque révolution, il faut un gain de Force qui contre-balance ce qui ſe perd par le frottement. La nouriture ne ſert proprement qu'à entretenir en état les matériaux qui compoſent la Machine.

Au reſte, la queſtion de la poſſibilité ou impoſſibilité du *Mouvement perpétuel*, me paroit de fort peu de conſéquence: mais il ſeroit à ſouhaiter que la forte perſuaſion dans laquelle ſont les Mathématiciens, touchant cette impoſſibilité, ne les empêchât pas de faire une attention ſérieuſe à une Machine auſſi étonnante qu'eſt celle de Caſſel. Une roue, dont le principe du mouvement eſt intérieur; qui ſe met en mouvement par le moindre effort; qu'on peut faire tourner du côté qu'on juge à propos, ſans que ce qui la fait tourner d'un côté ſoit arrêté par ce qui l'auroit fait tourner de l'autre, ſi elle y avoit été pouſſée; enfin, une roue, qui, après avoir fait quelques millions de tours, avec une rapidité ſurprenante, continue ſon mouvement de même, & n'eſt arrêtée qu'à force de bras; une telle Machine mérite, à ce qu'il me paroit, quelque éloge, quand même elle ne ſatisferoit pas à tout ce que l'Inventeur en promet. Si c'eſt le Mouvement perpétuel, l'Auteur mérite bien la récompenſe qu'il demande: ſi ce ne l'eſt point, le Public peut découvrir une belle invention, ſans que ceux qui auroient promis la récompenſe fuſſent engagés à rien; l'Inventeur n'ayant jamais exigé qu'une promeſſe conditionelle."

L E T T R E

Sur l'Utilité des Mathématiques, écrite à l'occasion d'une Remarque de Mr. le Clerc, *dans l'extrait qu'il donne de l'Analyse démontrée du* P. Reyneau, *dans le 17. tome de sa Bibliothéque choisie, à* Monsieur B***. *de la Société Royale de Londres.*

Monsieur,

Jamais les Sciences ne sont en plus grand danger, que quand des personnes dont le sçavoir est reconnu, & qui ont enrichi le Public du fruit de leurs veilles, prennent à tâche de les combattre: le Public prévenu justement en leur faveur s'en remet à leur jugement, & abandonne avec beaucoup de facilité des connoissances dont il croit ne pouvoir tirer aucun fruit. C'est là, Monsieur, le danger dans lequel se trouvent aujourd'hui les Mathématiques: le célèbre Auteur de la Bibliothéque choisie ne laisse point passer d'occasion d'insinuer l'inutilité d'une étude qui de tout tems a été en possession d'une estime génerale, & il n'y a pas fort longtems comme vous le sçavez sans-doute, qu'il a soutenu ouvertement qu'on ne peut tirer d'autre avantage des Mathématiques que celui de s'amuser avec esprit.

Vous voyez bien, Monsieur, que je veux parler de la remarque que cet Auteur a faite sur les Mathématiques en géneral dans l'extrait qu'il a donné de l'Analyse du père Reyneau, dans le 17. tome de sa Bibliothéque choisie. Cette remarque est sans doute d'un genre à ne pouvoir être que très utile au Public si elle est bien fondée, & d'un autre côté, à ne pouvoir avoir que des suites désavantageuses à l'avancement des Sciences, en cas qu'elle ne soit fondée que sur des raisons apparentes.

S'il est vrai, Monsieur, comme le craint Monsieur le Clerc, que *les grandes abstractions des Mathématiques ne sont que des amusemens de l'esprit, qui cherche, & qui trouve des raports, entre des nombres, des figures & des lignes; qu'il nous est aussi peu avantageux de connoître, que de sçavoir pour la culture des arbres, les raports qu'il y a entre les figures de leurs feuilles, de leurs fleurs & de leurs fruits.*

Si dis-je, Monsieur, c'est là toute l'utilité qu'on puisse tirer des Mathématiques, il ne peut être qu'avantageux au Public d'en être averti:

afin de détourner de cette étude ceux qui auroient du penchant à s'y attacher; & de la faire abandonner à ceux qui s'y sont déjà appliqués pendant quelque tems, & qui ne sont pas encore assez avancés pour pouvoir juger par eux-mêmes si cette Science leur pourra servir dans la suite.

Mais, Monsieur, si au contraire cette crainte est mal fondée, & si les Mathématiques ont leur utilité, la remarque dont nous parlons ne peut faire qu'un très mauvais effet, en faisant quiter à plusieurs personnes une étude qui pouvoit être avantageuse au Public, & qui n'est déjà que trop abandonnée, à cause de sa difficulté, & à cause du tems qu'on y doit mettre pour y faire quelques progrès.

Ces considérations, Monsieur, m'ont porté à examiner cette remarque, & à y faire quelques reflexions, que je prends la liberté de vous envoyer pour en faire part ensuite au Public, si vous jugez qu'elles en vaillent la peine.

Mais, Monsieur, afin que l'on ne soit pas obligé, de recourir à l'extrait dont j'ai parlé, j'en raporterai ici les paroles qui ont donné occasion à la remarque que nous allons examiner. *Cela servit*, (on parle de l'Analyse) *à perfectionner d'autres Sciences curieuses & utiles; comme celle qui a appris de donner aux horloges la justesse nécessaire, pour mesurer le tems avec exactitude; celle qui nous a donné le moyen d'étendre notre vue aux objets qui nous étoient inconnus, par leur trop grand éloignement, ou par leur extrême petitesse: celle qui a découvert la manière de jetter les bombes & de les faire tomber précisément où l'on veut.*

Il faut néanmoins, dit l'Auteur de la remarque, à l'occasion des paroles que je viens de raporter, *demeurer d'accord que les ouvriers avoient fait en tout ceci la plus grande partie du chemin, & que les Mathématiciens ont plutôt donné les raisons de ce qui avoit été inventé, & les règles qu'il faudroit suivre pour aller plus loin, que fait aucune découverte pour trouver un art qui fut auparavant inconnu.*

Je ne veux point examiner ici, Monsieur, si ce sont des Mathématiciens qui ont inventé les horloges; quoi qu'il en soit, il est très sûr qu'ils ont trouvé un art, inconnu auparavant aux ouvriers, & qui donne à ces horloges la justesse qui leur manquoit: & cet art ne pouvoit être découvert que par des gens assez versés dans les Mathématiques, pour pouvoir déterminer qu'elle est la courbe, que doit décrire un pendule, pour faire dans des tems égaux toutes ses vibrations, quoi qu'elles soient inégales; & ils devoient encore être assez ingénieux pour trouver un moyen de faire décrire au pendule la courbe, qu'ils avoient trouvée. Peut-être, Monsieur, est il encore vrai que ce ne sont point les Mathématiciens qui ont inventé les lunettes d'aproche, mais pourtant cela n'empêche point qu'ils n'ayent trouvé tout ce qui est nécessaire à ces lunettes, pour leur pouvoir donner une gran-

grandeur suffisante pour s'en servir dans l'astronomie. Enfin pour ce qui regarde l'art de jetter les bombes, on ne sauroit en disputer l'invention aux Mathématiciens; car cet art ne consiste point à faire entrer la bombe dans le mortier, ni à mettre le feu à la lumière, mais à conduire, s'il m'est permis de me servir de ce terme, la bombe à l'endroit où on la destine. Les bombardiers, avant que les Mathématiciens eussent donné des règles de cet art, les jettoient à l'avanture, ce qui faisoit que souvent, au lieu de nuire aux ennemis, elles causoient de grands dommages à ceux qui les employoient. Les plus expérimentés même d'entre eux s'abandonnoient si fort à leurs préventions & aux fausses règles qu'ils s'étoient formées que, plutôt que de changer de sentiment, ils aimoient mieux chercher de l'erreur dans les expériences les plus exactes qu'ils faisoient eux mêmes; comme on le voit par le dernier Chap. de la 1. Partie de l'Art de jetter les bombes de Blondel; & si ces bombardiers rencontroient quelque fois leur but, ce n'étoit que par hazard & comme en tâtonant.

Voici, Monsieur, la manière dont l'Auteur continue. *Ils ont aussi sçu se servir des instrumens inventés par d'autres, à des usages aux quels les Inventeurs n'avoient point songés, comme sont les usages des lunettes à longue vue pour l'astronomie, & des microscopes pour la physique. Il est vrai que bien d'autres qui ne sont point Mathématiciens en ont aussi profité. Je ne sçai si les finesses de la nouvelle géométrie ont rien contribué à cela; quoiqu'elles soient propres à réduire plus facilement en méthode ce qui avoit été inventé.*

Il me semble qu'on auroit dit avec plus de raison, qu'ils ont sçu ajoûter aux instrumens inventés par d'autres ce qui leur manquoit pour en rendre l'usage plus universel; & si bien d'autres, qui ne sont point Mathématiciens, en ont aussi profité, ce n'a été qu'en se servant des découvertes de ces premiers; par exemple, pour ne parler que des grandes lunettes, ceux qui en ont fait quelque usage sans sçavoir les Mathématiques, n'ont pas laissé de se servir des machines que les Mathématiciens ont inventées, pour soutenir ces lunettes, & pour les employer sans l'embaras des tuyaux; ils ont dû se servir aussi des proportions que les mêmes Mathématiciens ont déterminées pour l'ouverture de ces lunettes, à quoi les subtilités de la nouvelle géométrie, (j'entens l'analyse en géneral) n'ont pas peu contribué.

Voici, Monsieur, ce qui suit dans la remarque. *Une chose qui feroit un grand honneur aux Mathématiciens, ce seroit une invention utile à la vie, & dont la pratique fut facile, qui eut été déduite des principes les plus abstraits, & conduite par dégrés à une pratique commode, que les ouvriers apprissent des Mathématiciens, & non point les Mathématiciens des ouvriers.*

Cette invention est trouvée depuis longtems, & nous en tirons de si grandes utilités tous les jours que je m'étonne que notre Auteur ne s'en soit pas aperçu ; c'est par elle que cette République est montée au faîte où nous la voyons : ensorte que l'on peut dire que s'il n'y eut point eu de Mathématiciens dans le monde, il y a longtems qu'elle auroit succombé sous ses ennemis. L'invention dont je veux parler, c'est l'art de conduire un vaisseau en grande mer, qui est un art qui a toutes les conditions que demande Monsieur le Clerc. Il est utile à la vie, tout le monde en demeure d'accord ; la pratique en est facile, puisque des gens dont le génie est fort borné, & dont l'adresse est très médiocre, le mettent tous les jours en usage ; il est déduit des principes les plus abstraits de la sphère, & de l'astronomie, & a été conduit à une pratique commode, que les ouvriers ont apprise des Mathématiciens, & non point les Mathématiciens des ouvriers. Je prévois que plusieurs personnes auront de la peine à m'accorder ce que je viens de dire : comme, ils entendent tous les jours louer l'usage de la boussole, ils s'imaginent que c'est d'elle seule que dépend la conduite d'un navire, & que les inventions des Mathématiciens n'y sont pas de grand usage : un peu de connoissance de la navigation leur feroit bien voir que la boussole seroit un instrument inutile entre les mains des pilotes, sans une infinité de pratiques que les Mathématiciens leur ont enseignées tant pour prendre la hauteur du pôle & déterminer le tems, que pour estimer le chemin qu'ils ont fait ; & ces pratiques même leur seroient encore inutiles sans la table des loxodromies, ou sans l'invention ingénieuse de la carte marine, dont la perfection dépend de l'exacte connoissance des longitudes des lieux qui y sont marqués ; & ces longitudes ne peuvent être déterminées exactement, que par des observations astronomiques.

Outre la navigation dont je viens de parler, je pourrois, Monsieur, encore mettre presque au même rang plusieurs autres parties des Mathématiques, comme l'arpantage, la gnomonique ou l'art de tracer les cadrans solaires, & plusieurs autres ; mais cela me méneroit trop loin ; c'est pourquoi je passe à la méchanique, dont on dit dans la remarque ; *qu'on parle à la vérité de quantité de machines, mais qu'on en voit peu, dont l'usage soit introduit communément, & dont on tire beaucoup d'utilité.*

Si toutes les machines que les Mathématiciens ont inventées ne sont pas introduites dans l'usage commun, il s'en faut prendre 1. A ce qu'il y en a plusieurs qui servent à la même chose, & ainsi on s'est contenté d'employer celles qu'on a jugées les plus commodes. 2. Quand une machine est une fois introduite pour un certain usage, il est difficile de la faire abandonner pour quelqu'autre qui sert à la même chose. Ainsi ce raisonnement n'empêche point que les Mathématiques ne soient très utiles & même

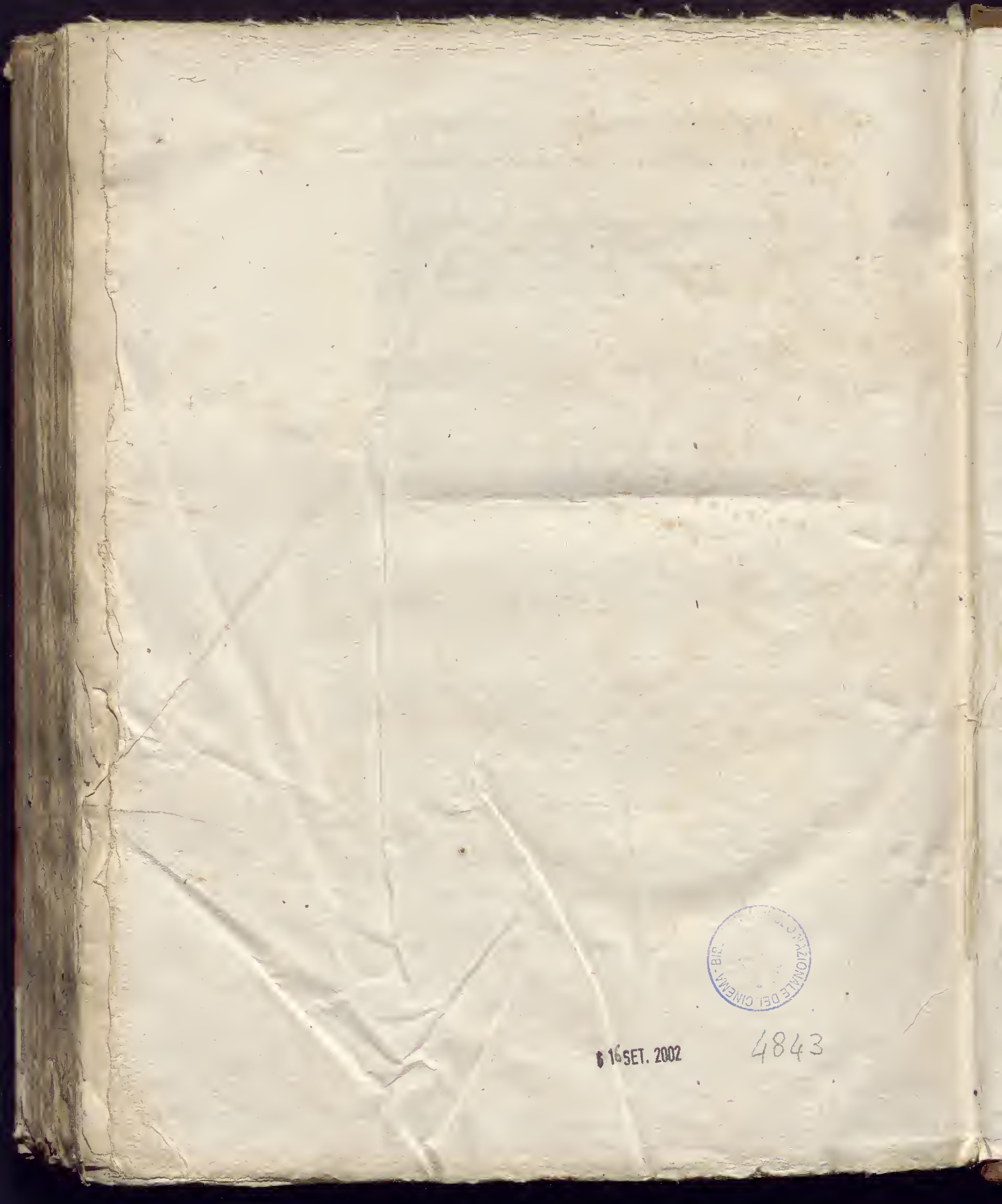
me très néceſſaires à la méchanique. Si tout le monde étoit convaincu de cette vérité, on ne verroit point tant de machines dont on ne tire aucun fruit, après qu'elles ont été miſes en pratique; inconvénient dont il faut chercher la raiſon dans l'ignorance de leurs Inventeurs, peu capables de prévoir ce qui en pourroit empêcher l'exécution & de connoître qu'elle eſt la figure la plus convenable à certaines parties de la machine; comme auſſi de calculer quelle eſt la force néceſſaire pour ſurmonter tout ce qui pourroit en quelque manière en retarder le mouvement; & c'eſt cette ignorance, même de ceux qui ſe mèlent d'inventer des machines, qui eſt une troiſième raiſon pourquoi pluſieurs machines utiles ne ſont pas introduites dans l'uſage commun. Après toutes celles qu'on voit échouer tous les jours par les raiſons que je viens de dire, il ne faut pas s'étonner ſi on aime mieux employer les machines dont on eſt ſûr, que de courir le risque de perdre ſans fruit ſon tems & ſon argent, en faiſant l'épreuve d'une nouvelle machine qui eſt plus ſimple; & avec d'autant plus de raiſon que ceux qui font exécuter les machines ſont ordinairement incapables de juger de l'habileté de ceux qui leur pronent leurs inventions, s'il eſt permis de parler ainſi.

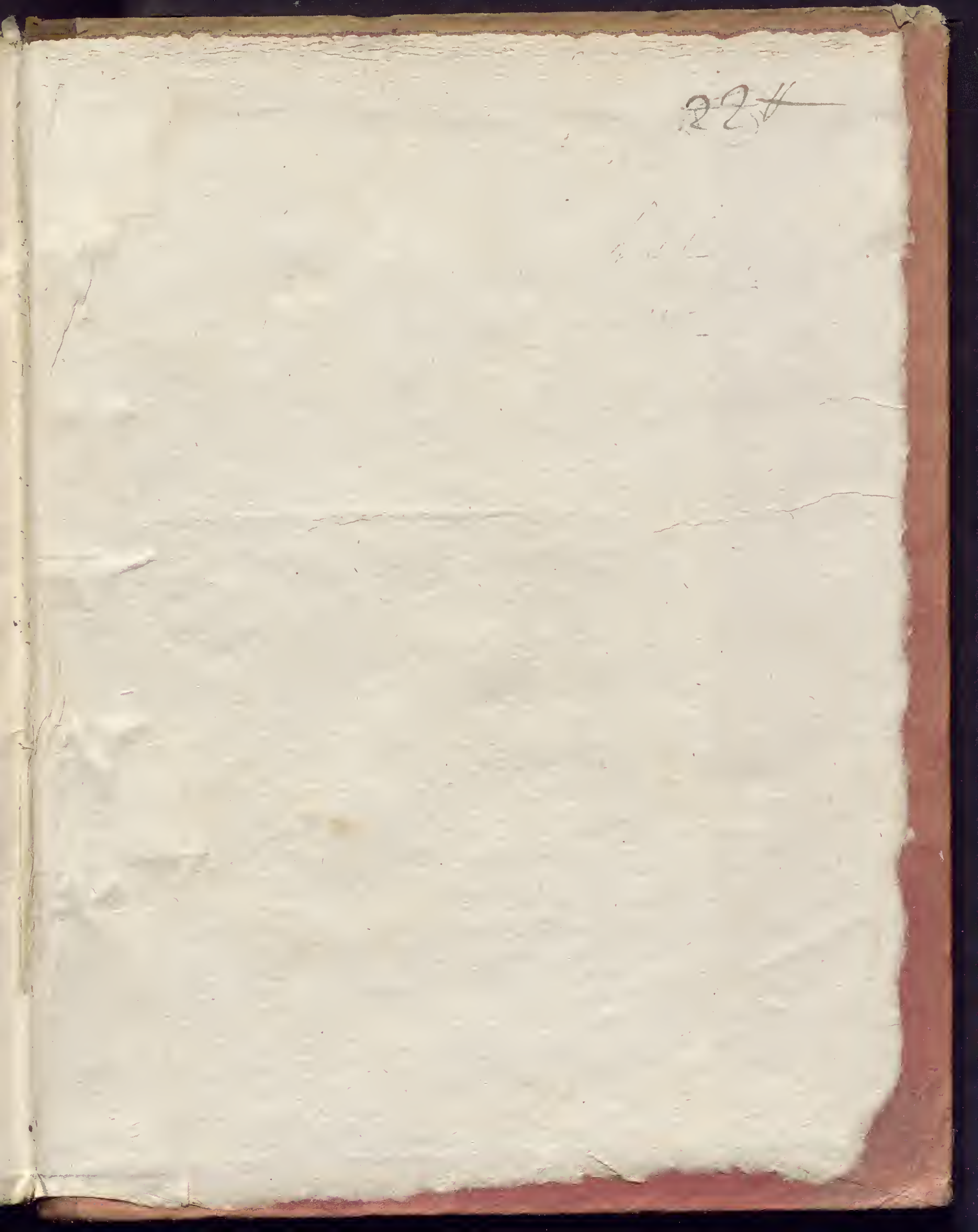
Voila, Monſieur, les reflexions que j'ai faites ſur la remarque de Mr. le Clerc. Vous me connoiſſez aſſez pour ſçavoir que mon unique but en vous les communiquant, eſt la recherche de la vérité, & que je ſuis prêt à me retracter, quand on me fera voir que je me trompe.

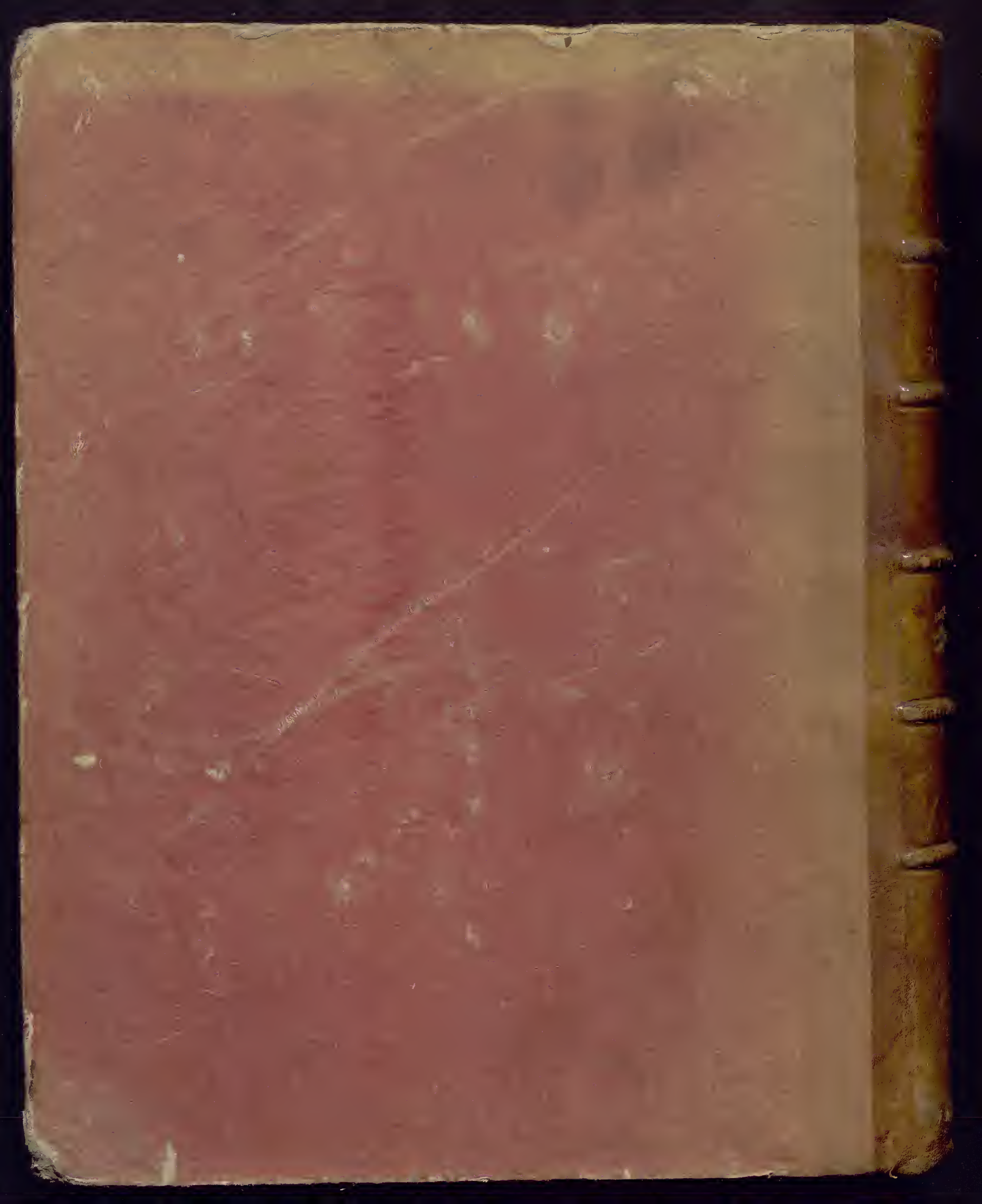
Je ſuis &c.

F I N

de la première Partie.







OEUVRES
PHILOSOPHIQUES
ET
MATHÉMATIQUES
DE
Mr. G. J. 'sGRAVESANDE,

Rassemblées & Publiées

PAR

JEAN NIC. SEB. ALLAMAND,

qui y a ajouté l'Histoire de la Vie & des Ecrits de l'Auteur.

PREMIERE PARTIE.



A AMSTERDAM,
CHEZ MARC MICHEL REY,
MDCCLXXIV.